

EL TRÁNSITO DEL PLANO AL ESPACIO: PROPUESTA DE MODELO DE DISEÑO DE TAREAS CON CABRI 3D

Armando Echeverry, Leonor Camargo y Ángel Gutiérrez

Universitat de València, Universidad Pedagógica Nacional, Universitat de València
armandoech@gmail.com, lcamargo@pedagogica.edu.co, angel.gutierrez@uv.es

En el cursillo invitamos a los asistentes a resolver algunas tareas que hacen parte de una secuencia de instrucción diseñada con el objetivo de favorecer el tránsito del plano al espacio, en un curso de geometría para maestros en formación, con el apoyo de Cabri 3D. Presentamos los elementos teóricos que fundamentan la secuencia y apoyan el análisis del aprendizaje de los estudiantes, y promovemos una discusión entre los asistentes acerca de los elementos que se ponen en juego en las tareas y que se constituyen en piezas para la construcción de un modelo teórico de diseño de tareas.

INTRODUCCIÓN

Desde nuestra perspectiva, la enseñanza de la geometría tridimensional en todos los niveles de la escolaridad, ha sido, en términos generales, dejada de lado en el currículo realmente ejecutado por los profesores. La disponibilidad actual de programas de geometría dinámica ofrece una oportunidad de saldar esa vieja deuda con nuestros estudiantes y brindarles oportunidades de avanzar en su aprendizaje sobre este tema. Pero para llevar a cabo esta tarea, es fundamental la preparación de los profesores y tengan a su disposición ejemplos de tareas y modelos de diseños de las mismas, para que puedan gestionar aprendizajes con sus estudiantes.

En el cursillo presentamos avances preliminares de una investigación en curso que apunta a construir un modelo teórico para el diseño de tareas y para el análisis de los aprendizajes de los estudiantes, de contenidos relacionados con el tránsito de la geometría 2D a la geometría 3D, con el apoyo del programa Cabri 3D. Con el propósito de favorecer el tránsito, las tareas se enfocan en: la búsqueda de argumentos geométricos para diferenciar el plano del espacio; la necesidad de identificar planos en el espacio o construir imágenes mentales de los mismos; caracterizar objetos geométricos según pertenezcan a un plano o a más de un plano; y las relaciones entre rectas y planos.

MOTIVACIÓN

En Colombia, pese a no existir un currículo prescrito para la educación básica y media, se dispone de tres documentos con orientaciones curriculares para matemáticas: los *Lineamientos Curriculares* (MEN, 1998), los *Estándares Básicos de Competencias* (MEN, 2006) y los *Derechos Básicos de Aprendizaje* (MEN, 2015). En ellos se sugiere cómo organizar el currículo para cada grupo de grados y qué contenidos mínimos deben ser aprendidos. En los tres documentos se incluye la geometría 3D en todos los niveles de la escolaridad, como un contenido que se debe trabajar con los estudiantes. Sin embargo, la comunidad colombiana de investigadores en Educación Matemática tiene información, derivada de la permanente interacción con profesores en ejercicio, acerca del currículo implementado, que permite afirmar que contenidos de geometría distintos a algunas clasificaciones de figuras geométricas y al estudio de fórmulas para determinar áreas, son frecuentemente soslayados en el currículo realmente ejecutado por los profesores.

En un estudio evaluativo internacional en el que participó Colombia, que incluyó preguntas de geometría, (Mullis, Martin y Foy, 2008) se aplicó una prueba de carácter muestral en 49 países, en los grados 4 y 8. La prueba se acompañó de encuestas realizadas a profesores de los estudiantes que participaron en el estudio. En el reporte mencionado se encuentran, entre otros, los siguientes datos relevantes respecto a la educación en geometría y, particularmente, a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría 3D:

- El puntaje promedio de Colombia fue 371, ubicando al país en la posición 44, entre 49 países que se sometieron al estudio. En el primer lugar se ubicó Taiwán, con un puntaje de 592, y en el último lugar quedó Ghana, con un puntaje de 275.
- El porcentaje de estudiantes de grado 4 que recibió instrucción acerca del tema “Relación entre formas 3D y 2D” fue de 46% y en el caso de Colombia fue de 45%. Para el grado 8, el porcentaje global fue de 48% y en el caso de Colombia fue de 37%.
- En Colombia, para grado 4, el porcentaje de estudiantes con profesores que se sentían muy bien preparados para enseñar el tema “Relación entre formas 3D y 2D” fue de 51% y en grado 8 fue de 64%. El resultado contrasta con el de los estudiantes y lleva a preguntarse sobre la for-

mación de profesores y el lugar de la enseñanza de este tema en los currículos.

La evidencia que proporciona el reporte mencionado nos permite afirmar que la enseñanza de la geometría 3D, y particularmente el tránsito de la geometría 2D a la geometría 3D, es un problema de considerable importancia en la educación básica y media en Colombia. Y, asociado a ello, la preparación de los profesores para la enseñanza de este tema de la geometría es un asunto que requiere la mayor atención y respuestas que deben provenir de la investigación.

Diversos autores han hecho manifiesta la necesidad de proponer modelos teóricos para fundamentar diseños instruccionales para la enseñanza de la geometría, y particularmente de la geometría 3D, apoyados en el uso de programas de geometría dinámica. Hace más de diez años, Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strässer (2006) señalaron la necesidad de dirigir la investigación hacia el diseño de tareas y hacia el análisis de las características del programa que influyen en el aprendizaje. En un estudio posterior, Laborde y Laborde (2008), al referirse a la inserción del programa Cabri en las aulas, consideraron el tipo de tareas que se asignan a los estudiantes como un cambio importante en las exigencias para los profesores. Estos planteamientos han sido reiterados en estudios posteriores. Sinclair y Robutti (2013) y Sinclair, Bartolini Bussi, de Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung y Owens (2016), por ejemplo, destacan la necesidad de lograr una mejor comprensión del papel de la tecnología y una mejor integración del uso de esta en las prácticas de enseñanza de los profesores, apoyándolos en el diseño y desarrollo de nuevas tareas que sean apropiadas para el uso de programas de geometría dinámica. Dentro de las áreas de investigación relevantes señalan la necesidad de enfocarse en el desarrollo de marcos teóricos y metodológicos que permitan una mejor comprensión del papel de la tecnología existente y emergente, además de estudios empíricos acerca del uso de tecnología en la enseñanza y el aprendizaje.

Por otro lado, está ampliamente documentado en la literatura investigativa (Gutiérrez, 1996) que la enseñanza y el aprendizaje de la geometría tridimensional enfrentan un problema fundamental: los modelos de objetos tridimensionales son, por lo general, representaciones planas y estáticas. Este hecho conlleva pérdida de información sobre los objetos y genera dificultades en la conceptualización de estos. Los resultados de intervenciones de

enseñanza en geometría tridimensional con el uso de *software* de geometría dinámica 3D han reportado resultados positivos en el tránsito de la geometría intuitiva a la geometría teórica (Mithalal, 2010), la visualización de los estudiantes para la resolución de situaciones (Widder y Gorsky, 2013), la resolución del conflicto entre conocer y ver, a partir de representaciones planas de objetos tridimensionales (Ferrara y Mammana, 2014) y el mejoramiento de imágenes conceptuales de objetos y relaciones de la geometría tridimensional como impulsor del progreso en los niveles de razonamiento (Gutiérrez y Jaime, 2015).

Los trabajos mencionados previamente son reportes de experiencias puntuales con actividades relacionadas con contenidos de geometría 3D. La intención de nuestra investigación es más amplia, pues pretendemos generar un modelo teórico para el diseño de secuencias de instrucción en geometría del espacio, con el apoyo del programa Cabri 3D, y poner a prueba un esquema analítico para el análisis del aprendizaje de los estudiantes al desarrollar tareas concebidas a partir del modelo.

CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

En la construcción del modelo teórico nos enfocamos en tres componentes que podrían estructurarlo. El componente epistemológico alude a cómo se conciben los objetos matemáticos en el modelo: los objetos matemáticos son accesibles solamente mediante sus representaciones (Moreno-Armella, 2014) y nos interesa particularmente el papel que desempeñan las representaciones como mediadores semióticos (David y Tomaz, 2012). El componente cognitivo del modelo alude a cómo entendemos el aprendizaje. La motivación por conocer surge de la incertidumbre (Zaslavsky, 2005), que actúa como un mecanismo que apoya el desarrollo del conocimiento matemático a través del surgimiento de la necesidad intelectual conceptualizada por Harel (2013). El componente didáctico del modelo alude a la gestión de la clase en relación con el uso de las representaciones de objetos matemáticos como mediadoras semióticas para promover el aprendizaje a partir de la generación de incertidumbre y orientar la necesidad intelectual. Ello se logra en la interacción comunicativa mediada semióticamente por el profesor (Bartolini Bussi y Mariotti, 2008).

PREVISIÓN DEL DESARROLLO DEL CURSILLO

En cada sesión del cursillo, invitaremos a los asistentes a resolver algunas de las tareas, expondremos el marco de referencia, comentaremos los análisis disponibles y propiciaremos un intercambio de ideas.

REFERENCIAS

- Bartolini Bussi, M. G. y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh y B. Sriraman (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- David, M. M. y Tomaz, V. S. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 413-431.
- Ferrara, F. y Mammana, M. (2014). Seeing in space is difficult: An approach to 3D geometry through a DGE. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol y A. Darien (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (vol. 3, pp. 57-64). Vancouver, Canadá.
- Gutiérrez, Á. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (vol. 1, pp. 3-19). Valencia, España: PME.
- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA*, 9(2), 53-83.
- Harel, G. (2013). Intellectual need. En K. R. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 119-151). New York, EUA: Springer.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 257-304). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Laborde, C. y Laborde, J.-M. (2008). The development of a dynamical geometry environment: Cabri-Géomètre. En G. W. Blume y K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (pp. 31-52). Charlotte, North Caroline: Information Age.
- MEN (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Recuperado a partir de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

- MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Recuperado a partir de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articulos-340021_recurso_1.pdf
- MEN (2015). *Derechos básicos de aprendizaje*. Recuperado a partir de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articulos-349446_genera_dba.pdf
- Mithalal, J. (2010). 3D geometry and learning of mathematical reasoning. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 796-805). Lyon, Francia: INRP. Recuperado a partir de: www.inrp.fr/editions/cerme
- Moreno-Armella, L. (2014). *Educación matemática: del signo al píxel*. Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.
- Mullis, I., Martin, M., y Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International Mathematics Report. Findings from IEA's trends in International Mathematics and Science Study at the fourth and eighth grades*. Boston, EUA: TIMSS & PIRLS. Recuperado a partir de: http://timss.bc.edu/TIMSS2007/PDF/TIMSS2007_InternationalMathematicsReport.pdf
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A. y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 48(5), 691-719.
- Sinclair, N. y Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. En M. A. (Ken) Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, y F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook in mathematics education* (pp. 571-596). New York, EUA: Springer.
- Widder, M. y Gorsky, P. (2013). How students solve problems in spatial geometry while using a software application for visualizing 3D geometric objects. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 32(1), 89-120.
- Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 297-321.