ANÁLISIS DIDÁCTICO DE TAREAS MATEMÁTICAS: UN EJEMPLO PARA LA CLASE DE GEOMETRÍA

Tania Plazas, Óscar Molina y Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional
tplazas@pedagogica.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

Producto de la interacción con profesores en ejercicio, hemos notado que los aspectos incluidos en el análisis, que habitualmente hacen, de tareas que proponen a los estudiantes, no proveen las herramientas requeridas para gestionarlas con miras a promover razonamiento matemático. El cursillo al que nos referimos aquí tiene como propósito identificar, por medio de un análisis didáctico, elementos que un profesor de matemáticas debe tener en cuenta para la gestión de tareas que promueven procesos de conjeturación y justificación, en una clase de geometría de cualquier nivel educativo.

INTRODUCCIÓN

Durante el más reciente proyecto de investigación, *Geometría: vía al razonamiento científico*, desarrollado por el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), tuvimos la oportunidad de trabajar de cerca con profesores de básica secundaria que tenían a su cargo cursos de geometría plana euclidiana. En tal contexto, nos percatamos de sus dificultades a la hora de analizar, desde un punto de vista didáctico-matemático, las tareas que pretendíamos implementar en las clases, con el objetivo de que sus estudiantes se involucraran en la resolución de problemas abiertos y la justificación de las respectivas respuestas. Este escenario nos llevó a diseñar e implementar herramientas para realizar un análisis didáctico de las tareas que se propondrían a los estudiantes. Con ese análisis, buscábamos empoderar a los maestros para una gestión idónea en la clase.

En este cursillo se quiere compartir la estructura de análisis que diseñamos y realizar, junto con los asistentes al mismo, un análisis didáctico de una secuencia de tareas que aborda objetos y relaciones de la geometría plana euclidiana. Se irán presentando las fases del análisis y las actividades que en cada una de ellas un profesor debe realizar como parte de su labor de planeación de una clase en la que pretende que sus estudiantes exploren una situación, formulen una conjetura y provean su justificación.

Plazas, T., Molina, Ó. y Samper , C. (2017). Análisis didáctico de tareas matemáticas: un ejemplo para la clase de geometría. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 87-92). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Análisis didáctico de tareas

El *análisis didáctico* es la actividad que realiza un profesor para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas, secuencias y clases (Gómez, 2002). Lupiáñez y Rico (2008) proponen que se organice esa actividad en cuatro fases: (a) análisis de contenido, (b) análisis cognitivo, (c) análisis de instrucción y (d) análisis de actuación. El análisis de contenido inicia con la determinación de los contenidos y objetivos, haciendo énfasis en los significados del objeto matemático que se abordarán. Se revisan los objetos geométricos involucrados, sus definiciones, representaciones, etc., y los preconceptos que debe tener el estudiante para abordar la tarea. En el análisis cognitivo, el profesor establece las competencias que se espera desarrollen los estudiantes, a través de las tareas que se proponen. Durante este análisis también se identifican posibles errores y dificultades asociados a las tareas y al objeto matemático correspondiente. El análisis de instrucción se realiza a partir de los dos anteriores. En este momento se diseñan nuevas tareas o se rediseñan las existentes, y se evalúa la pertinencia de las mismas en relación con los objetivos planteados. Finalmente, el análisis de actuación se hace una vez realizadas en el aula las tareas, con base en la reflexión que el profesor hace de las actuaciones de los estudiantes durante el desarrollo de las tareas, con el fin de llegar a tener una idea detallada y consciente de la eficacia de la tarea implementada, y reconocer el proceso de aprendizaje de sus estudiantes; esto le servirá como punto de partida para iniciar un nuevo análisis didáctico.

Tareas: Problemas abiertos de conjeturación

Aquello que aprenden los estudiantes lo determinan, en gran medida, las tareas que desarrollan; es por ello que la elección y el análisis de estas juegan un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas (Hiebert y Wearne 1997, citados en Watson y Sullivan, 2008). Elegir diferentes tipos de tareas permite que los estudiantes desarrollen actividad matemática variada. Cuando el profesor elige un tipo de tarea está haciendo elecciones basadas, aunque no exclusivamente, en su concepción de la naturaleza del aprendizaje. Por ejemplo, si el profesor quiere fomentar la construcción social de conocimiento, las tareas que propone seguramente van a tener en cuenta aspectos relacionados con: (i) la toma de decisiones por parte del estudiante para solucionar la tarea, lo cual está relacionado con su motivación, (ii) la comunicación que deben establecer los estudiantes entre sí al trabajar colaborativamente, y (iii) el tipo de participación que se espera de parte de los estudiantes durante el proceso de resolución de la tarea.

Una tarea es un *problema* para quien la debe resolver (un individuo o un grupo de personas) si necesita "desarrollar una forma más productiva de pensar sobre la situación dada" (Lesh y Zawojewski, 2007, p. 782). Baccaglini-Frank y Mariotti (2010) conciben *problema abierto de conjeturación* como aquel en el que el enunciado no revela la solución y se solicita formular una conjetura. Una conjetura es un enunciado de carácter general, fundamentado en observaciones y exploraciones que generan en el proponente un alto grado de certeza (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013). Consideramos que los problemas de este tipo se pueden caracterizar como *investigaciones matemáticas* (Fonseca, Brunheira y Ponte, 1999) puesto que permiten que los estudiantes determinen la cuestión que van a estudiar, la pongan a prueba para refinar conjeturas, comuniquen sus resultados, y hagan argumentos de diversa índole (inductivos, abductivos o deductivos).

Abordar este tipo de problemas en un Entorno de Geometría Dinámica (EGD) favorece los procesos de conjeturación y justificación. El primero, dado que permite realizar una exploración dinámica gracias a la función de arrastre, para así identificar invariantes y dependencias entre propiedades. Ello propicia la identificación del antecedente y el consecuente que determinarán la conjetura que se formula. El antecedente de esta consta de aquellas condiciones que impone el estudiante en la construcción o en la exploración de la situación. El consecuente refiere a aquellas propiedades que resultan como consecuencia de las condiciones impuestas. El segundo, porque puede generar ideas útiles para la justificación que consiste en proveer una argumentación deductiva para la conjetura formulada, teniendo como marco un sistema teórico de referencia (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013).

UNA MUESTRA DE LA ACTIVIDAD DEL CURSILLO

En esta sección ilustramos las actividades que se deben llevar a cabo en el marco de las cuatro fases de un análisis didáctico. Resolver la tarea puede aportarle al profesor elementos significativos para hacer el análisis didáctico, así que, en primera instancia, se les dará tiempo para que solucionen la siguiente tarea. Luego, se ilustrarán las fases del análisis correspondiente.

Tarea: Dado un triángulo, ¿qué relación hay entre tipo de triángulo y la propiedad "dos de sus alturas son congruentes?

a) Describa su proceso de construcción y exploración en un entorno de geometría dinámica.

b) Formule una conjetura que solucione el problema.

c) Provea una demostración que valide la conjetura.

Análisis didáctico

A continuación se presentan algunos de los elementos que se incluirían en las primeras dos fases del análisis.

Análisis de contenido

Los objetos geométricos que se deberían abordar previamente a la asignación de la tarea son las definiciones de: triángulo, altura, recta perpendicular, congruencia de segmentos, triángulos de distintos tipos, relación de congruencia de triángulos y de segmentos, y deberían ser conocidos los criterios de congruencia triangular. El objetivo general es que los estudiantes realicen la exploración de una situación y provean conjeturas a partir de los invariantes observados. El objetivo específico de la tarea es que los estudiantes descubran la relación entre el triángulo isósceles y la congruencia de dos de sus alturas, y la formulen como una conjetura. Podrían existir otros objetivos propios de la comunidad de la clase en la que se propone la situación. Por ejemplo, generar la necesidad de contar con un elemento teórico nuevo: supóngase que el criterio de congruencia LAA no esté disponible en el sistema teórico compartido; se desea, entonces, que los estudiantes durante el proceso de demostración de la conjetura que proponen, se percaten de la necesidad de contar con dicho criterio para poder completar la argumentación deductiva respectiva.

Análisis cognitivo

Las competencias que queremos desarrollar con tareas como la propuesta están asociadas a dos procesos: el de solución y el de puesta en común de los resultados. Para el primer proceso, los siguientes son ejemplos de competencias: (a) Realizar representaciones simbólicas-manipulativas, en el EGD, de los objetos geométricos involucrados en la situación. (b) Realizar una exploración dinámica[1] de la situación, con miras a establecer relaciones de dependencia.. (c) Formular argumentos deductivos para justificar la conjetura formulada. Para el segundo proceso: (a) Tomar una posición crítica-reflexiva ante las ideas o comentarios de los demás. (b) Usar el lenguaje geométrico (simbólico y diagramático) apropiado como medio de comunicación.

En cuanto a las problemáticas que se pueden encontrar en el proceso de solución de la tarea, se prevén tres. (i) Los estudiantes basados en una concepción errada de altura, según la cual la altura de un triángulo debe tener puntos del interior de este, construyen segmentos que no son alturas (e. g.., medianas, bisectrices). (ii) Los estudiantes representan un tipo de triángulo (e. g., acutángulo) y proponen una generalización teniendo en cuenta solamente ese caso, o hacen un arrastre limitado y formulan conjeturas no generales. Por ejemplo, si la representación que usan para generar la conjetura es como la que muestra la Figura 1, concluirán, a partir de la visualización, que solo los triángulos equiláteros tienen dos alturas congruentes.

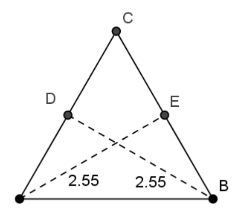

Figura 1. Triángulo que parece ser equilátero con alturas congruentes

(iii) Los estudiantes construyen las alturas del triángulo en cuestión sin considerar la definición. Específicamente, construyen el segmento con extremo un vértice del triángulo, que es perpendicular al lado opuesto y no a la recta que contiene ese lado. Si usan el arrastre para identificar la consecuencia de llegar a tener dos alturas congruentes, el proceso de exploración se verá interrumpido porque una de las alturas se desaparece. Ello incidirá en la posibilidad de formular una conjetura que generalice completamente la situación, porque no tienen en cuenta que un triángulo isósceles obtusángulo o acutángulo también puede compartir la propiedad, o conducirá a declarar que el problema no tiene solución.

[1] Dos aspectos cognitivos importantes de considerar en el análisis de instrucción, vinculados a la exploración dinámica, son: i) la conjetura debe resultar de un proceso de generalización a partir de un proceso de inducción empírica; y ii) la conjetura debe corresponderse con la exploración realizada.

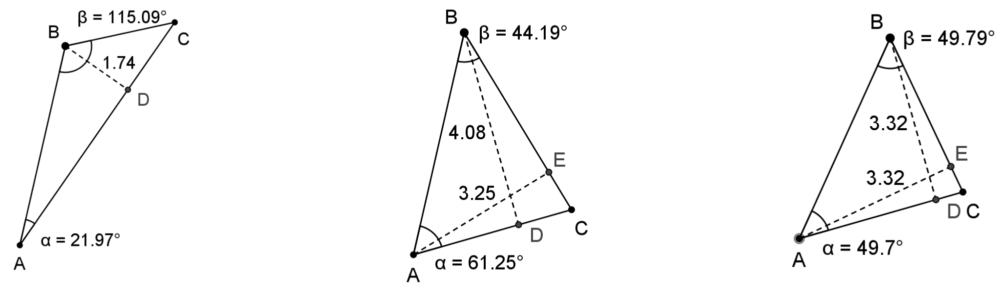

Figura 2. Tres instantes del proceso de arrastre en busca de alturas congruentes

En el cursillo revisaremos otros aspectos que usualmente no se tienen en cuenta, pero que son importantes para favorecer el aprendizaje significativo.

REFERENCIAS

Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-293.

Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, *3*(1), pp. 35-48.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina (Eds.), *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 13-36). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Fonseca, H., Brunheira, L. y Ponte, J. P. (1999). As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática. En *Actas do ProfMat 1999* (pp. 91-101). Lisboa, Portugal: APM. Obtenido de:

http://ppgecm.ensinodeciencias.net/produtos/lydianne/pdf/14-1.pdf

Watson, A. y Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education. Tools and processes in mathematics teacher education* (vol. 2, pp. 109-134). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.