TAREAS QUE PROMUEVEN LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

Jennyfer Zambrano y Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional
nifer86@gmail.com, csamper@pedagogica.edu.co

Se presenta un instrumento de análisis que ayuda a identificar los objetivos y las características de una tarea propuesta y realizada en el contexto escolar. Usando el instrumento mencionado, se da un ejemplo del análisis de una tarea que propicia el uso comprensivo de elementos geométricos teóricos y de un argumento surgido cuando unos estudiantes de grado séptimo la resolvieron.

INTRODUCCIÓN

Una de las funciones de un profesor de matemáticas es diseñar tareas para implementar en su clase con el fin de promover la construcción de conocimiento y la actividad matemática. El diseño de tareas incluye determinar, entre otras cosas, qué procesos matemáticos favorece la tarea, qué conocimientos se requieren para poder realizarla, y si promueve la argumentación en caso de que este sea uno de los objetivos.

En la primera sesión del cursillo se presentará un instrumento para analizar las tareas e identificar sus características, y se ejemplificará el análisis con una tarea específica. Además, se ilustrará cómo la tarea favoreció el objetivo propuesto. En la segunda sesión, los asistentes resolverán unas tareas para luego analizarlas, y se mostrarán ejemplos de respuestas de estudiantes.

TAREAS MATEMÁTICAS

Para Triana y Zambrano (2016), una tarea matemática es un enunciado dentro de un contexto, relativo a situaciones de la cotidianidad o del marco disciplinar de las matemáticas, que demanda un esfuerzo cognitivo porque resolverla exige usar conceptos, algoritmos y representaciones. Las tareas se caracterizan por su estructura y por sus objetivos.

Estructura de la tarea

Según Yeo (2007), una tarea tiene diferentes variables: la meta, el método, el andamiaje y la solución. A continuación se describen.

Zambrano, J. y Samper, C. (2017). Tareas que promueven la argumentación matemática. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 99-104). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

La *meta* está asociada a los elementos teóricos que se deben usar para resolverla, y a los procesos matemáticos que se quieren propiciar. La meta puede ser *cerrada* si es concreta (e. g., Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 cm y 7 cm, respectivamente, ¿cuánto mide la hipotenusa?), o *abierta*, si el estudiante tiene la posibilidad de escogerla (Investigue propiedades de paralelogramos).

El *método* tiene que ver con las estrategias para el proceso de solución de la tarea. Este puede ser *abierto* si existen varias estrategias para resolverla (Construya un triángulo equilátero dado el segmento AB), o *cerrado*, cuando hay que usar una estrategia determinada (e. g., Utilice el método de Thales para dividir un segmento en cinco partes congruentes.).

El *andamiaje* tiene que ver con la información que se incluye en la tarea. Está presente cuando en el enunciado se incluyen representaciones o esquemas que proveen ayuda al estudiante para resolverla. No está presente cuando no se plantean preguntas orientadoras o indicaciones que le permitan al estudiante saber cómo proseguir (e. g., Dividir un ángulo en cuatro partes congruentes).

La *solución* es el resultado final del desarrollo de la tarea. Esta puede ser *abierta* si hay varias respuestas correctas posibles, *no bien definida* cuando hay varias respuestas válidas y la tarea queda resuelta cuando el estudiante da una o más de ellas, *definida* cuando hay una única respuesta correcta, y *sin solución* cuando no existe una respuesta a la tarea.

Una tarea es abierta si el método lo es; de lo contrario, es una tarea cerrada.

Objetivo de la tarea

Los objetivos están relacionados con los procesos matemáticos que se pretenden desarrollar con la tarea. A continuación se presentan las características.

Tareas de argumentación: promueven el desarrollo de uno o más argumentos para justificar o explicar la respuesta haciendo uso de elementos teóricos (Silva, 2013).

Tareas de justificación: suscitan la explicación basada en experiencias apoyadas en procesos matemáticos como visualización, exploración, comprobación, comparación, estimación, etc.

Tareas de conjeturación: solicitan la formulación de una conjetura que exprese las relaciones que se descubren a partir de la exploración de una situación matemática.

Tareas de investigación: exigen escoger la meta y el método para poder establecer una conjetura, dados unos parámetros (Yeo, 2007).

Tareas de traducción: requieren la traducción de un enunciado, oral o escrito, en una expresión matemática. En el enunciado de la tarea se da la información necesaria para resolverla y suele, implícitamente, indicar la estrategia a seguir. Son tareas típicas de textos; el método de solución se reduce a interpretar correctamente el enunciado, para elegir el algoritmo adecuado (da Ponte, 2004).

ARGUMENTOS MATEMÁTICOS PROMOVIDOS EN LA TAREA

De acuerdo con Perry, Samper, Camargo y Molina (2013), un argumento está compuesto por tres elementos básicos: los datos (p), la aserción (q) se supone es consecuencia de los datos, y la garantía ($r: p \rightarrow q$) que es una proposición aceptada como válida y que relaciona los datos con la aserción. Un argumento puede ser deductivo, inductivo o abductivo, de acuerdo a cómo se estructura el argumento. Es deductivo si de p, usando r, se obtiene q; inductivo si de varias instancias de p se evidencian como consecuencia instancias de q y, de ello, se establece r. Es abductivo si se parte de la aserción para encontrar posibles datos (p), a partir de la garantía r que tiene relación con la situación.

Teniendo en cuenta la forma como se estructura, el argumento puede ser *incompleto* si no se expresa explícitamente alguno de los tres elementos básicos de este (Samper y Toro, 2017). De lo contrario es *completo*. Según la naturaleza de su garantía, Krummheuer (2000) establece que un argumento es *analítico* si su estructura lógica es válida y se sustenta en un sistema teórico aceptado. Es sustancial, si la garantía incluye datos numéricos, dibujos, gráficas, etc., o si está basada en la experiencia con una representación ya sea en el computador o en papel. Este tipo de argumento no tiene el rigor lógico de la deducción formal. Samper y Toro (2017) consideran que hay argumentos sustanciales de otro tipo, que denominan *no legítimos*; corresponden a aquellos en los que se usa como garantía una afirmación que no es elemento del sistema teórico conformado en clase, la garantía no relaciona los datos con la aserción, o la aserción no es consecuencia de los datos.

SABER USAR ELEMENTOS TEÓRICOS

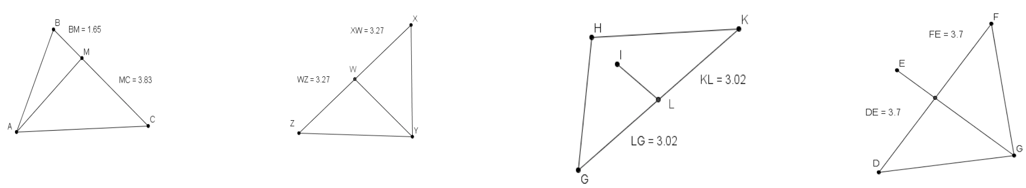
Saber usar postulados, teoremas y definiciones involucra acciones distintas. Según Samper y Plazas (2017), *saber usar un postulado o teorema* incluye principalmente dos acciones: (i) reconocer que es factible su uso en la situación que se está estudiando (ii) reconocer que su uso permite obtener lo que se busca (resolver un problema, formular una conjetura o producir una demostración). *Saber usar una definición* depende del tipo de información que se provee: cuando se menciona el término que designa al objeto, es *desencapsular* las propiedades que lo definen; cuando se ponen en juego las propiedades del objeto definido es *encapsularlas* para asignarle el término correspondiente.

EJEMPLO: LA MEDIANA DE UN TRIÁNGULO

En la Figura 1 se presenta un ejemplo de tarea cuya resolución exitosa hace evidente el saber usar un hecho geométrico (teorema).

Considera la siguiente definición: Dado un triángulo, una *mediana* del triángulo es un segmento con un extremo en un vértice del triángulo y el otro extremo en el punto medio del lado opuesto a ese vértice.

1. Representa en GeoGebra un triángulo con una de sus medianas.
2. Determina si lo que se afirma en cada caso es cierto. Explica tu respuesta.



(a) $\overline{AM}$ es mediana (b) $\overline{WX}$ es mediana (c) $\overline{IL}$ es mediana (d) $\overline{GE}$ es mediana

3. ¿Cuántas medianas tienen un triángulo?
4. Enumera las propiedades que hacen que un segmento sea mediana del triángulo.

Figura 1. Un nuevo contexto para usar la definición de punto medio

El objetivo de la tarea es introducir la definición de mediana para usar la definición de punto medio en un contexto nuevo. Según su estructura tiene las siguientes características:

Variable	Característica
Meta	Cerrada. Se debe usar la definición de punto medio para representar medianas de triángulo y la definición de mediana para decidir si un segmento es o no mediana.
Método	Cerrado. Se debe usar la definición de mediana para representarla en GeoGebra. En la segunda parte, se deben usar las definiciones de mediana y punto medio para justificar las respuestas.
Andamiaje	Presente, porque al solicitar la construcción de una mediana se busca que el estudiante identifique claramente las dos condiciones requeridas para ser mediana de triángulo.
Solución	Definida, puesto que consiste en construir la mediana y decidir si el segmento representado es una mediana.

Esta tarea se clasifica como no abierta porque el método es cerrado. Es de argumentación porque a partir de los datos presentados en las imágenes, usando tanto la definición de punto medio como la de mediana, se debe justificar la decisión respecto al segmento.

En el siguiente fragmento, se reporta la interacción de Mauricio y la profesora, cuando ella cuestiona la representación que él ha hecho en GeoGebra.

627	Profesora:	¿Por qué puedo garantizar que el segmento CE es una mediana?
628	Mauricio:	La definición dice que dado un triángulo… (Lee la definición dada por la profesora de mediana de su cuaderno)
631	Profesora:	¿Cuál condición cumple la mediana?
632	Mauricio:	Que digamos que es un segmento.
633	Profesora:	¿Un segmento con qué característica?
634	Mauricio:	Que está en un vértice del triángulo. Del contrario, del que está al frente, cómo es que se llama… del lado opuesto (lee la definición)
635	Profesora:	¿Cuál vértice?
636	Mauricio:	Sería el vértice C. Y el otro extremo está en punto medio.

En el argumento de Mauricio se evidencia el uso de la definición de mediana como garantía. El estudiante plantea un argumento deductivo analítico en el que los datos son: segmento con extremos en C, vértice del triángulo, y en E punto medio del lado opuesto (segmento AB). Encapsula las propiedades de mediana para dar como aserción que el segmento CE es mediana.

REFERENCIAS

da Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. da Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula: homenaje a Paulo Abrantes* (pp. 25-34). Barcelona, España: Graó.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: Studies of argumentation in primary mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 22-32.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). *Innovación en el aula de geometría a nivel universitario*. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 13-66). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagogica Nacional.

Samper, C. y Plazas, T. (2017). Tipos de mensajes del profesor durante la producción de una demostración en geometría. *Educación Matemática*, *29*(1), 37-60.

Samper, C. y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentación en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 50, 367-382. Recuperado de:

http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/828/1346

Silva, L. H. (2013). *Argumentar para definir y definir para argumentar* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Triana, J. y Zambrano, J. (2016). *Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación* (Tesis de maestría). Universidad Pedagogica Nacional, Bogotá, Colombia.

Yeo, J. B. (2007). Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment (Reporte técnico ME2007-01). Nanyang, Singapur: Nanyang Technological University. Recuperado de:

https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/949/3/MathematicalTasks.pdf