ALGORITMO PARA LA DETERMINACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL DE UNA IMAGEN MEDIANTE EL MÉTODO DEL PRISMA

Jesús Azor
Universidad de Mendoza, ARGENTINA
jesus.azor@um.edu.ar

El presente trabajo pretende lograr una perspectiva de la importancia de la Geometría general en los desarrollos científicos actuales, tal el caso de la Geometría Fractal. En el caso de tratamiento de imágenes de diverso origen como medicina, geología, biología, etc., la dimensión fractal representa una medida que permite determinar cualidades y comportamientos que no se logran identificar con otras técnicas. A través del desarrollo propuesto, se pretende fundamentalmente que docentes y alumnos del nivel universitario encuentren una herramienta de fácil uso, perfectamente replicable en su instrumentación y que promueve aprendizajes significativos a través de la vinculación.

INTRODUCCIÓN

> "Es la gloria de la geometría que a partir de tan pocos principios, sin que lo buscara, fuera capaz de lograr tanto".
>
> Sir Isaac Newton

Históricamente, el interés en la geometría ha sido estimulado por sus aplicaciones a la naturaleza. La elipse tiene importancia por la forma de las órbitas planetarias, así como la esfera por la forma de la tierra. La geometría de la elipse y de la esfera puede ser aplicada a estas situaciones físicas.

Por supuesto, las órbitas no son perfectamente elípticas y la tierra no es exactamente esférica, pero para muchos propósitos, como la predicción del movimiento planetario o el estudio del campo gravitatorio de la tierra, estas aproximaciones pueden ser perfectamente adecuadas.

Es interesante observar cómo la Geometría ha avanzado en sus concepciones hacia nuevos estadios que presentan gran utilidad a la ciencia moderna. Por caso, la aparición de los fractales ha abierto un amplio camino a la inves-

Azor, J. (2017). Algoritmo para la determinación de la dimensión fractal de una imagen mediante el método del prisma. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 107-112). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

tigación científica en la concreción de nuevas herramientas para caracterizar los fenómenos de la naturaleza (Mandelbrot, 1983; Barnsley, 1993).

Un vistazo a la reciente literatura en física permite vislumbrar la variedad de objetos naturales que son descritos como fractales –límites de nubes, superficies topográficas, líneas costeras, turbulencia en fluidos, etc–. Ninguno de estos es realmente fractal –las características de fractal desaparecen cuando aquellos se examinan a escalas suficientemente pequeñas–. Sin embargo, sobre ciertos rangos de escala, resultan muy parecidos a fractales y a esas escalas usualmente se consideran como tales.

En las aplicaciones usuales, la *dimensión fractal* toma notable protagonismo en la caracterización de objetos, formas y superficies en algunas áreas del conocimiento. Los ejemplos típicos abarcan una amplia gama en campos tan diferentes como la medicina, el análisis de textura, la geología, biología, ingeniería de materiales, electrónica, física, histología, el análisis del suelo, análisis de polímeros, etc.

MÉTODO DEL PRISMA (*TRIANGULAR PRISM SURFACE AREA*, TPSA)

Existe una gran variedad de métodos para determinar la dimensión fractal de formas que no son fractales puras. Uno de los más utilizados, por su simpleza y resultados aceptables, es el llamado conteo de cajas (*box-counting*), el cual se puede aplicar a curvas, superficies o volúmenes.

El método anterior, respecto al caso de imágenes, necesita que la matriz que representa la imagen sea binaria (es decir, con solo elementos 0 y 1).

Se requiere entonces "binarizar" una imagen con niveles de grises (elementos de la matriz compuestos de números entre 0 y 255) mediante algún método de umbralamiento. Esto es generalmente aplicable para la determinación de un contorno, al cual posteriormente se le determina la dimensión fractal.

Un ejemplo es el de una Región de Interés (ROI) de una imagen mamográfica en la que se sospecha una situación patológica. A partir del proceso de binarización se determina el contorno de la lesión y calculando la dimensión fractal se puede inferir si esta es maligna o no. Contornos redondeados indican benignidad, en cambio si son irregulares ("espiculados") apuntan a algún grado de malignidad.

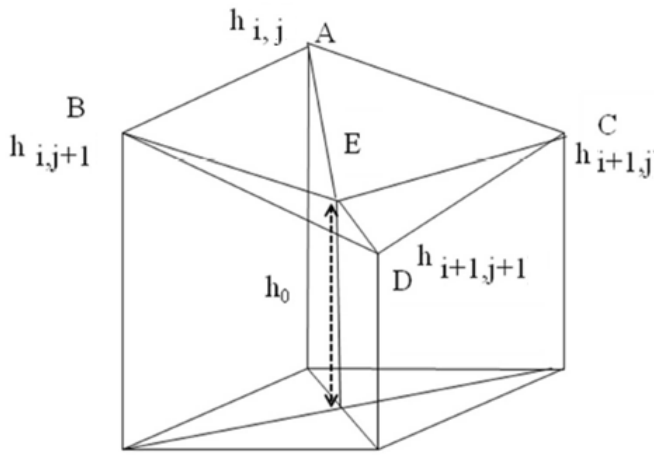

Figura 1. Esquema básico para encontrar la dimensión fractal mediante el método TPSA

En Clarke (1986) se propuso un método para hallar la dimensión fractal considerando la imagen en niveles de grises, que recibe el nombre de *método del prisma triangular, TPSA*. La representación esquemática para la medición del área de superficie prisma triangular se muestra en la Figura 1.

En este trabajo se va a seguir una variante del algoritmo de Clarke, debida a Tang y Wang (2005). La imagen original se supone que está representada por una matriz de tamaño $M \times M$ como en el método de conteo de cajas, con la diferencia de que ahora los elementos de la misma no son exclusivamente 0 y 1 sino númros enteros entre 0 y 255.

Paso 1: La imagen se divide en diferentes rejillas cuadradas de tamaño r. Considerada una de ellas, se especifican cuatro puntos del cuadrado A, B, C, D sobre la superficie fractal. Estos puntos están representados por el valor de nivel de gris de la imagen en ese punto.

Para el caso de la Figura 1, las alturas correspondientes en valores de nivel de gris son $h_{i,j}$, $h_{i,j+1}$, $h_{i+1,j}$ y $h_{i+1,j+1}$ respectivamente.

Paso 2: La distancia desde el plano de planta hasta el centro de cada celda de la cuadrícula (identificada por E) de las cuatro alturas de los puntos adyacentes puede calcularse como:

$$h_0 = \frac{1}{4}(h_{i,j} + h_{i,j+1} + h_{i+1,j} + h_{i+1,j+1})$$

Paso 3: Se halla el área de los triángulos ABE, ACE, CDE y BDE y se suma ($S_{i,j}$).

Paso 4: Teniendo en cuenta toda la imagen, el área total de la superficie fractal es:

$S_r = \sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} S_{i,j}$,

donde N_r es el número total de los cuadrados regulares de tamaño $r \times r$.

Paso 5: En la geometría fractal, el área total de la superficie fractal S_{ij}, la escala r y la dimensión fractal D están relacionadas por

$S_r \sim r^{2-D}$.

Se repiten los pasos1-5 con diferentes valores de r.

Entonces log $(s(r))$ y log(r) se representan gráficamente en el sistema de coordenadas log-log. Si la pendiente de la línea recta mejor ajustada a los puntos es b, la dimensión fractal D de la imagen es:

$D = 2 - b$.

IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO

Para la realización de un programa informático que calcule la dimensión fractal de una imagen por el método del prisma, se procede, conforme a lo visto más arriba, siguiendo el procedimiento desarrollado a continuación.

Para ilustrar los pasos seguidos y permitir la replicación del algoritmo, se habrá de considerar una imagen en niveles de grises generada en forma aleatoria, representada por una matriz de tamaño 17×17 pixeles, como se puede observar en el artículo disponible en: www.um.edu.ar/math/prisma.pdf.

Para el desarrollo computacional se utilizó el *software* Matlab, creando la función *prisma2.m*, que se detalla en el citado documento. Las instancias a cumplir fueron las siguientes:

1. Se determinó el valor de la constante *ex* según la dimensión de la matriz que representa a la imagen. Tal constante indica el número de iteraciones que realiza el procedimiento. Para el caso que se ejemplifica es 5.

2. Luego se seleccionaron cuadrados adyacentes de tamaño 2 como base, recorriendo toda la rejilla y calculando las áreas correspondientes, acumu-

ländolas en la variable S. En total se utilizaron 256 rejillas.

3. Posteriormente se aumentó el tamaño de los cuadrados adyacentes a 3. Calculando las áreas como en el paso anterior, se utilizaron en este caso 64. Luego, de tamaño 5, resultan 16; de tamaño 9, resultan 4, y finalmente, de tamaño 17, resulta 1.

4. Las áreas calculadas en cada paso, van siendo almacenadas (junto a su resolución) en una matriz indicada como T.

5. Una vez terminadas las iteraciones, los resultados se muestran en la Figura 2, a la izquierda. Tomando los logaritmos de cada una de las columnas de la matriz T y volcándolos en un gráfico, el diagrama de dispersión muestra cinco puntos prácticamente alineados.

6. Mediante un ajuste por mínimos cuadrados, se halló la recta indicada por puntos que mejor se ajusta a los cinco puntos, como se muestra a la derecha de la Figura 2.

r	Área	log(r)	log(Área)
1	30568	0	4.4853
4	14682	0.6021	4.1668
16	9451	1.2041	3.9755
64	4637	1.8062	3.6662
256	2494	2.4082	3.3969

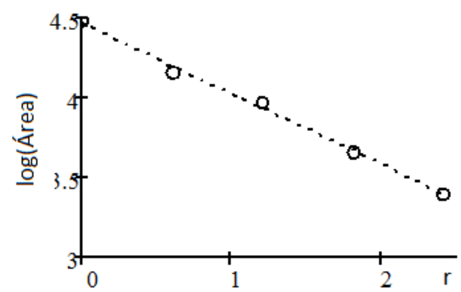

Figura 2. Derecha, tabla resultante del cómputo de áreas en función de la resolución (r). Izquierda, gráfico log-log con la recta de mejor ajuste por mínimos cuadrados

Como resultado del ajuste, la pendiente de la recta tiene el valor -0.445, con lo que la dimensión fractal de la imagen resulta ser $D = 2 - (-0.445) = 2.447$.

CONCLUSIONES

Según lo expuesto, se puede apreciar la importancia de desarrollos geométricos simples en un campo tan impactante como es el de la Geometría Fractal.

A partir de la solución computacional propuesta, que puede ser ampliada y mejorada, se cuenta con una herramienta para acceder a tareas de investigación en diferentes campos de la ciencia donde la dimensión fractal de imágenes sirva como indicador de variadas situaciones.

Estos conceptos están siendo ahora utilizados en el proyecto de investigación "Clasificación de tejidos mediante la característica fractal de la imagen mamográfica", que se lleva a cabo en la Facultad de Ciencias Médicas de la Universidad de Mendoza.

REFERENCIAS

Barnsley, M. F. (1993). *Fractals everywhere*. San Diego, EUA: Academic Press.

Clarke, K. C. (1986). Computation of the fractal dimension of topographic surfaces using the triangular prism surface area method. *Computers and Geosciences, 12*(5), 713-722.

Mandelbrot B. (1983). *The fractal geometry of nature*. New York, EUA: Freeman, New.

Tang, M. y Wang, N. (2005). Feature analysis of brain MRI images based on fractal dimension. En *IEEE Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference* (pp. 3245-3248). DOI: 10.1109/IEMBS.2005.1617168.