CARACTERIZACIÓN DE SÓLIDOS REDONDOS POR MEDIO DE GRAFOS Y MATRICES DE ADYACENCIA

Lina Ombita, Nicolás Mahecha y Pablo Beltrán
Universidad Pedagógica Nacional
dma_lpombitap181@pedagogica.edu.co, dma_nmahechaf898@pedagogica.edu.co,
pabeltrans@pedagogica.edu.co

Uno de los problemas abordados en el Seminario de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional, es el de generar y caracterizar sólidos redondos; para ello, se proponen cortes en una esfera por medio de planos; los grafos y las matrices serán las herramientas.

INTRODUCCIÓN

En el seminario de Álgebra desarrollado en la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), se han planteado problemas de teoría de grafos y algunas relaciones de los grafos con diferentes tipos de sólidos. En este ámbito, la representación de sólidos por medio de grafos permite establecer una matriz de adyacencia que es útil en la solución de los problemas planteados. Ya que es posible representar diferentes tipos de sólidos mediante grafos, el proyecto al que refiere este documento se centra en los sólidos redondos, específicamente en su caracterización a través de las matrices de adyacencia.

POLIEDROS Y SÓLIDOS REDONDOS

Los poliedros son objetos que ocupan un lugar en el espacio y están conformados por polígonos (Wills, Guarín, Londoño y Gómez, 1976); ellos generan tres conjuntos disyuntos: el interior, el exterior y la frontera del poliedro (Muñoz, 2003), nociones estas necesarias para definir y construir un sólido redondo a partir de una esfera intersecada por planos.

El siguiente es un procedimiento para generar sólidos redondos haciendo uso de la esfera. El primer paso consiste en hacer intersecciones de la esfera con planos no tangentes a ella, con lo que se generan circunferencias. Ahora, si por lo menos dos de estas circunferencias se intersecan, entonces ya se tiene un sólido redondo, como se muestra en la Figura 1 (un ejemplo de una esfera y dos planos que cumplen estas condiciones):

Ombita, L., Mahecha, N. y Beltrán, P. (2017). Caracterización de sólidos redondos por medio de grafos y matrices de adyacencia. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 131-136). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

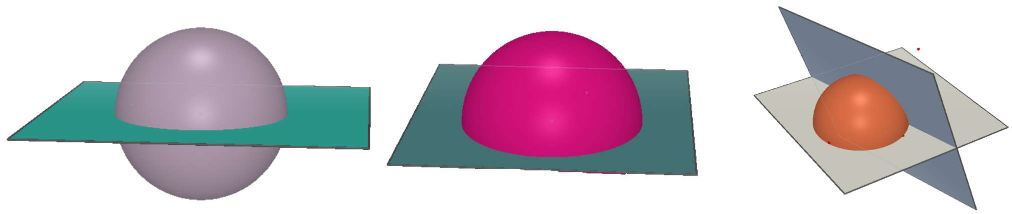


Figura 1. Representación de la manera de generar un sólido redondo a partir de una esfera

Al sólido resultante se le definen vértices y aristas:

Definición 1. Dada una esfera y un plano, la intersección de ellos se llama *circunferencia*.

Definición 2. Dadas dos circunferencias obtenidas de la intersección de una esfera y un plano, las intersecciones de aquellas, se llaman *vértices* del sólido redondo generado.

Definición 3. En un sólido redondo, una *arista* es el arco de circunferencia de menor longitud, unido por dos vértices; en caso de que las longitudes sean iguales, ambos arcos serán una arista.

GRAFOS Y MATRICES DE ADYACENCIA

Los grafos son de gran utilidad en la solución de este problema (i. e., caracterización de los sólidos redondos), ya que con ellos se pueden representar los poliedros y los sólidos redondos. A continuación, se darán las definiciones:

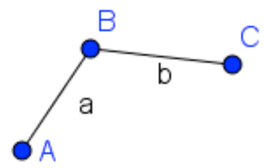
*Definición 4***.** Un *grafo* G es un par (V, E), donde V y E son conjuntos, junto con una aplicación $f_G: E \to \{\{u, v\}: u, v \in V\}$, donde V es el conjunto de vértices, E es el conjunto de aristas y f_G es la aplicación de incidencia.

Esta aplicación de incidencia tiene como finalidad relacionar las aristas con sus respectivos vértices, es decir, en un sólido redondo, una arista es un arco de circunferencia, en este caso denotado por $\widehat{AB}$, y $f_G\left(\widehat{AB}\right) = \{A, B\}$ donde A, B son los puntos extremos del arco que a su vez son vértices del sólido redondo y, por lo mismo, $\widehat{AB} \in E$ y $A, B \in V$.

Las matrices de adyacencia (herramienta para representar grafos, analizarlos y abstraer información), se definen como:

Definición 5. Sea un grafo G con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sus vértices. Se define la *matriz de adyacencia* $A \in M_n(N)$ cuyo coeficiente (i, j) es igual al número de aristas e tales que $f_G(e) = \{v_i, v_j\}$.

La Figura 2 muestra la representación de un grafo y su matriz de adyacencia. G, grafo, con $V = \{A, B, C\}$, $E = \{a, b)$, $f_G(a) = \{A, B\}$ y $f_G(b) = \{C, B\}$, entonces:



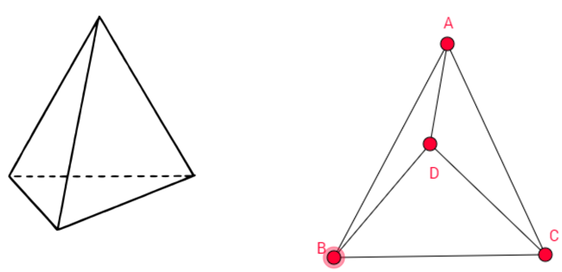
MA	A	B	C
A	0	1	0
B	1	0	1
C	0	1	0

Figura 2. Representación de grafo y su matriz de adyacencia

EL PROBLEMA DE LOS SÓLIDOS REDONDOS

Ya definidos los elementos que se van a utilizar, ahora se da una relación entre los sólidos redondos, los grafos y las matrices.

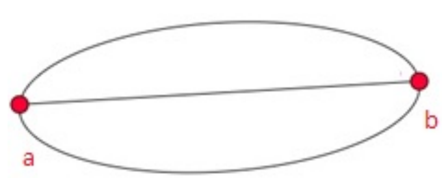
Para iniciar, se toma el tetraedro y por medio de la teoría de grafos se genera su representación y su matriz de adyacencia (Figura 3), así:



MA	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	1	1
C	1	1	0	1
D	1	1	1	0

Figura 3. Tetraedro, grafo y matriz de adyacencia que lo representan

Al sólido redondo generado a partir de una esfera (Figura 1), se le asignaron grafo y matriz de adyacencia (Figura 4).



MA	a	b
a	0	3
b	3	0

Figura 4. Grafo y matriz de adyacencia de un sólido redondo

Este mismo procedimiento se repite, alterando la forma y cantidad de los cortes en la semiesfera.

La organización de los cortes puede darse en dos grupos: en un grupo (**G1**) (Figura 5a) se encuentran las intersecciones cuyas circunferencias generadas no son tangentes. En el otro grupo (**G2**) (Figura 5b) se encuentran las intersecciones cuyas circunferencias generadas son tangentes.

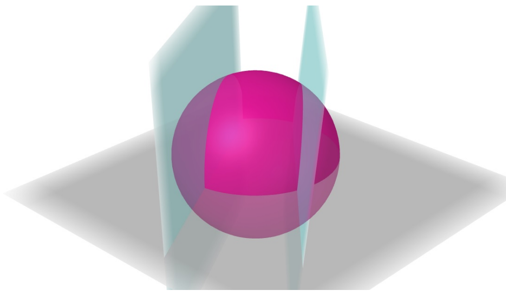


Figura 5a. Cortes no tangentes

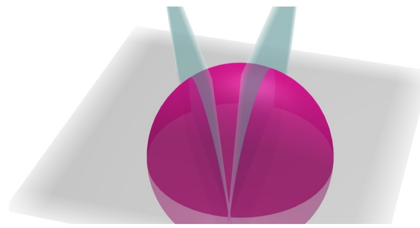
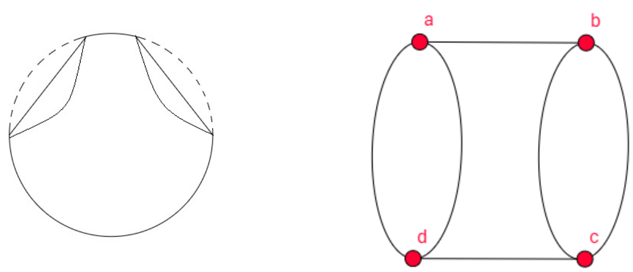


Figura 5b. Cortes tangentes

En cada grupo de cortes, se hace variar n, número de cortes, comenzando con $n = 2$, obteniendo:



MA	a	b	c	d
a	0	1	0	2
b	1	0	2	0
c	0	2	0	1
d	2	0	1	0

Figura 6. **(G1)** Corte $n = 2$ y su grafo

MA	a	b	
a	0	2	2
b	2	0	1
c	2	1	0

Figura 7. **(G2)** Corte $n = 2$, su grafo y su matriz de adyacencia

Si se sigue ejecutando este procedimiento para $n = 3, n = 4$, $n = 5$, …, para una cantidad considerablemente grande de cortes, gráficamente resultaría tedioso representarlo, pero con ayuda de las matrices de adyacencia se encontraron ciertas regularidades que facilitan generar los sólidos. A continuación, los resultados obtenidos:

En los objetos del **Grupo 1** se puede evidenciar que al generar su matriz $A \in M_n(\boldsymbol{N})$ de adyacencia, los coeficientes $a_{m,m+1}$ siempre serán 1 o 2. Si $a_{m,m+1} = 1,$ entonces $a_{m+1,m+2} = 2$ o si $a_{m,m+1} = 2$ entonces $a_{m+1,m+2} = 1$. Además, si $a_{m+1,m+2} = 2$, entonces $a_{m+1,m} = 1$ o si $a_{m+1,m+2} = 1$, entonces $a_{m+1,m} = 2$. Es decir, podría decirse como que la diagonal sobre la diagonal principal se va alternando 1,2,1,2,… al igual que la diagonal debajo de la diagonal principal. También se evidencia que $a_{n,1} = a_{1,n} = 2$, y para las demás componentes de la matriz, su coeficiente es igual a 0. De esa manera queda caracterizada esta matriz.

Respecto al **Grupo 2**, al generar su matriz A, esta siempre será cuadrada; además, los coeficientes de las componentes $a_{m,m+1} = a_{m+1,m} = 2$ y $a_{1,n} = a_{n,1} = 1$ las demás componentes de A tiene como coeficiente igual a 0.

Al realizar una tabla relacionando número de cortes (#C), número de vértices (#V) y números de aristas (#A), se observa que:

# C	# V	# A
1	2	3
2	4	6
3	6	9
4	8	12
5	10	15
6	12	18
7	14	21

# C	# V	# A
1	2	3
2	3	5
3	4	7
4	4	8
5	5	10
6	6	12
7	7	14

Figura 8. Tablas que relacionan número de cortes, vértices y aristas en los **Grupos 1** y **2**

Con estos resultados se evidencian algunas relaciones. Por ejemplo, en la tabla de la izquierda, correspondiente al **Grupo 1** (Figura 8), se puede concluir que:

para $\#C = 1$ o $\#C = 2$, se cumple $\#A = \#V + \#C$

pero

si $\#C \geq 3$, se cumple $\#V = 2\#C$ y $\#A = 3\#C$

De igual forma, en la tabla de la derecha, correspondiente al **Grupo 2** (Figura 8), se puede concluir que:

para $\#C = 1$, $\#C = 2$ y $\#C = 3$, se cumple $\#V = \#C + 1$ y $\#A = \#C + \#V$

y

para los siguientes $\#C$, se cumple $\#A = 2\#C$.

Por tanto, con las características anteriores es posible diferenciar una matriz de adyacencia que represente a un sólido redondo, y con la matriz de un corte se puede generar la del siguiente corte.

PARA TERMINAR

Del estudio aquí referido se puede obtener como resultado el hallazgo de un método para generar grafos que representan exclusivamente sólidos redondos. Para lograrlo hicimos uso de matrices de adyacencia, las caracterizamos en dos grupos e identificamos algunas propiedades que relacionan la cantidad de aristas, la cantidad de vértices y la cantidad de de cortes. La investigación no ha concluido: falta caracterizar nuevos grupos de matrices, considerando la posibilidad de cambiar la esfera por algún otro sólido redondo como el cono, el cilindro, el toro, entre otros.

REFERENCIAS

Muñoz, J. (2003). *Topología básica*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Wills, D., Guarín, H., Londoño, N. y Gómez, R. (1976). *Matemática moderna estructurada*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma.