DE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS A LOS ARQUIMEDIANOS: UN ESTUDIO DESDE LAS MATRICES DE ADYACENCIA

Fabio Rincón, Nicole Henao y Pablo Beltrán
Universidad Pedagógica Nacional
dma_fnrincong715@pedagogica.edu.co, dma_nmhenaom996@pedagogica.edu.co,
pabeltrans@pedagogica.edu.co

El presente documento muestra un método para hallar sólidos arquimedianos a partir de los sólidos platónicos, haciendo uso de grafos y matrices de adyacencia. En primeria instancia, se representó un sólido platónico mediante grafos con el fin de obtener la correspondiente matriz de adyacencia. Posteriormente, se realizaron truncamientos en cada vértice (nodo para el grafo), obteniendo así nuevas matrices que permitieron hallar regularidades para llegar a la representación del grafo del sólido arquimediano.

INTRODUCCIÓN

El trabajo que aquí se presenta surge de un estudio adelantado en el Seminario de Álgebra de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), al pretender hallar sólidos arquimedianos a partir de los sólidos platónicos. Cada sólido platónico se representa mediante un grafo, a partir del cual es posible establecer una serie de relaciones entre los nodos, para así determinar una matriz de adyacencia asociada. Luego de esto, se realizan una serie de truncamientos con el fin de quitar los nodos (vértices del sólido) principales y dar inicio a la deducción de la matriz que genera el grafo del sólido arquimediano deseado.

MATRICES DE ADYACENCIA DE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS

Los sólidos platónicos se definen como aquellos cuyas caras son polígonos regulares congruentes. Se sabe que existen únicamente cinco sólidos platónicos: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Los sólidos arquimedianos son poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos; la mayoría de estos se obtienen truncando los sólidos platónicos. Dado lo anterior, se busca realizar una deducción de los sólidos arquimedianos a partir de los sólidos platónicos y para ello se hace uso del concepto de matriz de adyacencia en grafos, cuyos elementos representan la relación entre los nodos del grafo (0: no conexión; 1: conexión).

Rincón, F., Henao, N. y Beltrán, B. (2017). De los sólidos platónicos a los arquimedianos: un estudio desde las matrices de adyacencia. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 137-142). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Para determinar las matrices de adyacencia de los sólidos platónicos es necesario realizar la representación de cada sólido por medio de grafos, con el fin de determinar las relaciones entre los nodos (vértices del sólido). En la Figura 1 se ejemplifica la representación, en grafos, del tetraedro, octaedro e icosaedro.

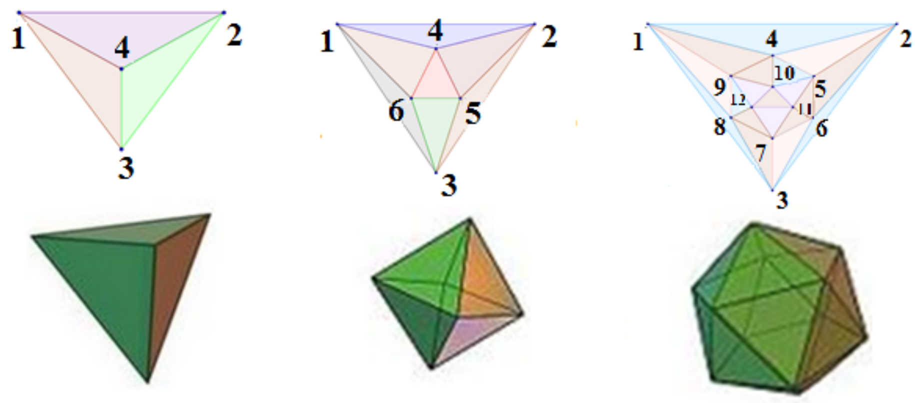

Figura 1. Algunos sólidos platónicos y sus grafos

Tetraedro, cubo y dodecaedro

El primer sólido que se consideró en el estudio fue el tetraedro: se construyó su grafo[1] asociado, se nombraron sus vértices en sentido horario, de manera que cada nodo estuviera conectado con su antecesor y su consecutivo. Teniendo ya la primera relación de antecesor y consecutivo, se escribió la matriz de adyacencia del sólido representado por el grafo (Figura 2). Posteriormente, se hicieron los truncamientos, los cuales se obtuvieron a partir de la matriz original, es decir, la representación matricial del sólido platónico de interés.

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0

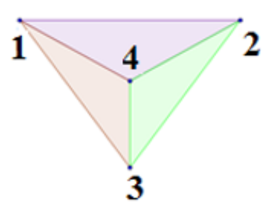

Figura 2. Matriz y grafo del tetraedro

Los cortes se pueden interpretar como un plano que interseca al sólido; así, el corte en el tetraedro genera un triángulo, es decir, se suprime un vértice y apa-

[1] El grafo es una figura plana con el mismo número de aristas y vértices. Se obtiene aplanando el sólido por una de sus caras.

recen tres nuevos vértices. Por ejemplo, se suprime el vértice 1 y se generan tres vértices, *a*, *b* y *c* (Figura 3), entonces la matriz se modifica remplazando la fila y la columna 1 por *a*, y agregando dos nuevas filas y columnas *b* y *c*; luego, se completa la matriz de manera que cada vértice esté conectado con su antecesor y su consecutivo y que, además, cada vértice se conecte únicamente con tres aristas. La matriz propuesta inicialmente para el tetraedro se mantiene, puesto que cumple con la restricción referente al antecesor y consecutivo. Así, la matriz asociada con un truncamiento es:

	a	2	3	4	b	c
a	0	1	0	0	1	1
2	1	0	1	1	0	0
3	0	1	0	1	0	1
4	0	1	1	0	1	0
b	1	0	0	1	0	1
c	1	0	1	0	1	0

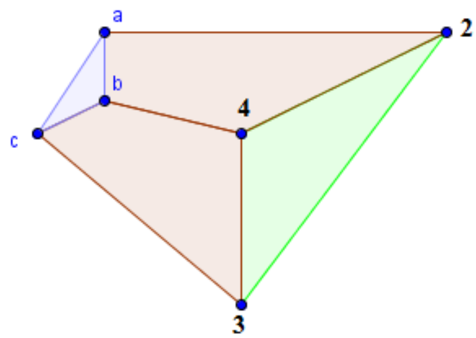

Figura 3. Matriz del tetraedro con un truncamiento y su respectivo grafo

Una vez obtenida la matriz del truncamiento, en esta se permutaron filas y columnas, lo que proporcionó grafos isomorfos que, por consiguiente, representan el mismo sólido. Luego se intercambió la posición de la primera fila y la primera columna, con la última fila y la última columna, como se muestra en la Figura 4, y teniendo cuidado de que conservaran las conexiones. Por ejemplo, la fila *a* muestra que *a* se conecta con *2*, *b* y *c*, por lo cual, al reubicarla en la última fila, estas conexiones se mantienen. Una vez reubicadas la primera fila y columna, se aplicó el mismo tratamiento descrito antes, para realizar el segundo truncamiento.

	c	2	3	4	b	a
c	0	0	1	0	1	1
2	0	0	1	1	0	1
3	1	1	0	1	0	0
4	0	1	1	0	1	0
b	1	0	0	1	0	1
a	1	1	0	0	1	0

Figura 4. Matriz del tetraedro con un truncamiento, filas y columnas permutadas

Así, se logró un método de obtención de sólidos arquimedianos, a partir de sólidos platónicos y con un tratamiento netamente matricial; sin embargo, este método solamente aplica para los sólidos cuyos truncamientos generan tres nuevos vértices, es decir, cuya intersección con el plano que corta al sólido, es un triángulo (tetraedro, cubo y dodecaedro).

OCTAEDRO

En la exploración de los truncamientos para el octaedro y el icosaedro, el método anteriormente explicado no resultó eficaz, debido a que los truncamientos generan figuras diferentes al triángulo, se generan cuadriláteros y pentágonos. En el caso del octaedro se observa que hay unos vértices que no están relacionados entre sí, es decir no hay una arista que los una, y su truncamiento (un cuadrilátero) mantiene la misma relación. Ahora bien, si se observa la matriz de adyacencia del octaedro se puede identificar que el vértice 1 no está relacionado con el vértice 3, puesto que su valor es 0 (no conexión); puntos como estos se denominan opuestos. La deducción del sólido arquimediano a partir del octaedro se dio con base en la siguiente relación: el vértice 1 está relacionado con el vértice 2 y el 5, pero estos dos son opuestos, de lo cual se establece que $\overline{12} \approx \overline{15}$, donde "≈" significa segmentos adyacentes con puntos opuestos. Dada esta relación, en la Figura 5 se tienen los segmentos que cumplen ≈.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	1	1
2	1	0	1	1	0	1
3	0	1	0	1	1	1
4	1	1	1	0	1	0
5	1	0	1	1	0	1
6	1	1	1	0	1	0

$\overline{12} \approx \overline{15}$	$\overline{14} \approx \overline{16}$	$\overline{21} \approx \overline{23}$	$\overline{24} \approx \overline{26}$
$\overline{32} \approx \overline{35}$	$\overline{34} \approx \overline{36}$	$\overline{41} \approx \overline{43}$	$\overline{42} \approx \overline{45}$
$\overline{51} \approx \overline{53}$	$\overline{54} \approx \overline{56}$	$\overline{61} \approx \overline{63}$	$\overline{62} \approx \overline{65}$

Figura 5. Matriz del octaedro, con sus segmentos adyacentes

Dada la anterior relación, se realiza el primer truncamiento, en el que se elimina el nodo 1 y se genera el nodo a_1. Como el corte es un cuadrilátero, el nodo a_1 también tendrá un nodo opuesto, el cual se denotará como c_1. La primera relación del vértice 1 en la matriz de adyacencia era con el vértice 2, luego el nodo a_1 estará relacionado con el vértice 2 y el nodo c_1 estará relacionado con el opuesto de 2, es decir con el vértice 5, puesto que a_1 y c_1 son opuestos. De allí nace una nueva relación, esta es: "≫" (segmentos opuestos). Como la segunda relación del vértice 1 era con el vértice 4, se establece que b_1 está relacionado con 4, lo que se puede observar en la matriz de la Figura 6, en la que b_1 es el opuesto de d_1 y a_1 es el opuesto de c_1.

Truncamiento 1

	2	3	4	5		a1	b1	c1	d
2	0	1	1	0	1	1	0	0	0
3	1	0	1	1	1	0	0	0	0
4	1	1	0	1	0	0	1	0	0
5	0	1	1	0		0	0	1	0
6	1	1	0	1	0	0	0	0	1
a1		0	0	0	0	0	1	0	1
b1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
c1	0	0	0	1	0	0	1	0	1
d1	0	0	0	0	1	1	0	1	0

$\overline{a_1 2} \approx \overline{c_1 5}$ $\qquad$ $\overline{b_1 4} \approx \overline{d_1 6}$

Figura 6. Matriz del octaedro con un truncamiento, con los segmentos adyacentes nuevos

Posteriormente se realizó el truncamiento 2, el cual generó la matriz de adyacencia que se observa en la Figura 7, matriz en la que b_2 es el opuesto de d_2 y a_2 es el opuesto de c_2.

Truncamiento 2

	3	4	5	6	a1	b1	c1	d1	a2	b2	c2	d2
3	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
4	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
a1	0	0	0	0	0	1	0		0	0	1	0
b	0	1	0		1	0	1	0	0	0	0	0
c1		0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
d1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
a2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
b2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
c2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
d2	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0

$\overline{a_2 3} \approx \overline{c_2 a_1}$ $\qquad$ $\overline{b_2 4} \approx \overline{d_2 6}$

Figura 7. Matriz del octaedro con dos truncamientos, con los segmentos adyacentes nuevos

De esta manera se obtienen las matrices de adyacencia de los truncamientos, utilizando únicamente la matriz de adyacencia de los sólidos platónicos.

PARA CONTINUAR ESTUDIANDO

Para el caso del icosaedro, donde los truncamientos resultan ser pentágonos, se establece un orden conveniente para nombrar sus vértices, para el cual aún se está buscando alguna regularidad concreta que permita encontrar las matrices de adyacencia del icosaedro con sus respectivos truncamientos.

Se abordará este problema de forma análoga a como se hizo con el octaedro, es decir, buscando relaciones entre los vértices y las aristas para encontrar una forma de modificar la matriz de adyacencia que permita generar todos los truncamientos.