

# GEOMETRÍA DINÁMICA: LA DIFERENCIA ENTRE PERCIBIR Y DISCERNIR

**Carlos Sánchez y Carmen Samper**

*Universidad Pedagógica Nacional*

cdsnnchez@upn.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

En este documento se ilustra la diferencia entre percibir y discernir cuando se utiliza la geometría dinámica. Para esto se analiza una situación de aula en la que dos estudiantes de grado octavo disciernen las propiedades del punto medio de un segmento, cuando están resolviendo un problema en un Sistema de Geometría Dinámica (SGD). Del análisis de la situación se concluye que las representaciones que construyen los estudiantes les permiten percibir ciertas propiedades, que luego pueden discernir, especialmente cuando experimentan la variación. Reconocer cuándo el estudiante discierne propiedades y relaciones geométricas al explorar una situación representada en un SGD permite identificar cómo desarrollan significados de determinados conceptos.

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la clase de geometría de grado octavo es usual que los estudiantes deban realizar demostraciones, en las que tienen que usar alguna definición de un objeto geométrico. Sin embargo, como lo advierten algunos investigadores (e. g., Moore, 1994, citado en Aya, Echeverry y Samper, 2014), una posible dificultad para demostrar es la comprensión deficiente de los conceptos. Además, varios estudios muestran que conocer la definición de un objeto no garantiza su comprensión, ni la conciencia de la necesidad de las propiedades que lo definen (Camargo y Samper, 2014).

La representación de objetos geométricos en un SGD permite percibir que las propiedades esenciales de estos se mantienen invariantes. Por ejemplo, si se representa el punto medio  $C$  de un segmento  $AB$  y se arrastran los extremos de este, es posible percibir que las relaciones de colinealidad y de equidistancia se mantienen. Sin embargo, esto no garantiza que los estudiantes disciernan que estas propiedades son necesarias en la definición de punto medio. Por ello, es importante proponer tareas en el aula que promuevan el reconocimiento de lo que es necesario en una definición (Camargo y Samper, 2014).

## REFERENTES TEÓRICOS

Desde un punto de vista cognitivo, una representación gráfica se puede *percibir* o también se puede *pensar* a partir de esta. Según Neisser (1989, citado en Leung, Baccaglioni y Mariotti, 2013), la percepción y el pensamiento son dos actividades cognitivas diferentes. La percepción es inmediata, se realiza sin esfuerzo y de manera directa. En cambio, el pensamiento es indirecto; es decir, no depende en su totalidad de la experiencia inmediata del individuo con la representación gráfica. Teniendo en cuenta el planteamiento anterior, Leung et al. (2013) afirman que no es posible que un estudiante realice una interpretación geométrica de las propiedades de los objetos representados mediante la simple percepción; es necesario que asociado a esta se promueva cierto tipo de pensamiento que haga que el estudiante evoque aspectos conceptuales. En este caso se dice que hay *discernimiento*.

Leung et al. (2013) plantean que en un SGD los estudiantes pueden discernir propiedades y relaciones entre objetos geométricos cuando se involucran en experiencias basadas en determinados patrones que contempla la Teoría de La Variación. Dichos patrones (contraste, separación, generalización y fusión) permiten describir cómo se descubren características cruciales de un fenómeno al variar intencionalmente diferentes aspectos de este. El contraste hace referencia a la comparación de un objeto o fenómeno con otros, para comprender cuáles son los atributos que lo caracterizan. La separación permite reconocer cierta propiedad de un objeto, observando cómo varía, cuando otros elementos con los que se relaciona permanecen invariantes. La generalización permite comprender las características de un fenómeno a partir de sus propias variaciones, y la fusión consiste en experimentar la variación de varios aspectos críticos de un fenómeno para discernir su estructura parte-todo (Orgill, 2012).

Para enriquecer la diferencia que proponen Leung et al. (2013) entre percibir y discernir, es posible utilizar los conceptos de dibujo, figura y objeto geométrico propuestos por Laborde y Capponi (1994, citados en Larios, 2006). El dibujo es la representación gráfica como tal, el objeto geométrico corresponde al referente teórico, y la figura está constituida por la relación entre el objeto geométrico y uno de los dibujos que lo representan. Así, una figura geométrica se define como “el conjunto de parejas formadas por dos términos: el primer término es el referente y el segundo es uno de los dibujos

que lo representan, tomado del universo de todos los dibujos posibles del referente” (Laborde y Capponi, 1994, citados en Larios, 2006, p. 365).

## CONTEXTO INVESTIGATIVO Y METODOLOGÍA

Para ilustrar la diferencia entre percibir y discernir, se propone el análisis de una escena, que se obtuvo de las videograbaciones de las clases de geometría que se realizaron con dos cursos de grado octavo de un colegio oficial (cada uno con 22 estudiantes). Se buscaba promover el proceso de conjeturación en el aula implementando problemas que se debían resolver utilizando GeoGebra en tabletas. Si bien existía la posibilidad de que cada estudiante trabajara con una tableta, se organizaron las clases para que los estudiantes trabajaran en parejas o en grupos de máximo tres estudiantes. Esto con el fin de promover la interacción entre ellos. Cabe agregar, que el docente, uno de los autores, interactuó con cada grupo, para aclarar dudas de los estudiantes o para cuestionarlos acerca de las estrategias de resolución que proponían para cada problema.

La escena que es objeto del análisis se seleccionó porque las declaraciones de los estudiantes aludían a las representaciones que construyeron en GeoGebra y al uso de la herramienta de arrastre. Para el análisis de cada declaración, primero se determinó a cuál de los conceptos relacionados con la representación se hacía referencia (dibujo o figura). Luego se identificó la acción asociada a ese concepto (percibir o discernir). Finalmente, se estableció en cuáles casos hubo discernimiento a partir de la variación. En estos casos, se determinaron los correspondientes patrones de variación.

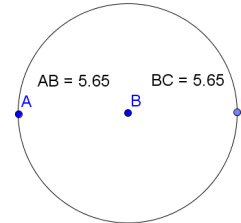
## ANÁLISIS

La escena comienza cuando se les propone a los estudiantes utilizar GeoGebra para resolver el problema: Dados dos puntos  $A$  y  $B$ , hallen un punto  $C$  para que  $B$  se convierta en el punto medio del segmento  $AC$ . Previamente, se había realizado otra actividad en la que los estudiantes construyeron un segmento  $AB$  y su punto medio  $C$  y verificaron mediante el arrastre las propiedades que cumplían estos puntos. Producto de esta actividad se establece la siguiente definición de punto medio:  $B$  es punto medio del segmento  $AC$  si (1)  $A, B$  y  $C$  son colineales y (2)  $B$  equidista de  $A$  y  $C$ . A continuación se presenta la interacción entre dos estudiantes.

1. Luis: (A medida que habla construye una circunferencia con centro  $B$  y radio  $BA$ ) Ubicamos el punto  $A$  y el punto  $B$ . Con la ayuda de [la herramienta] circunferencia damos en el punto  $B$  y en el punto  $A$  para colocar otro punto que sería el punto  $C$  (determina un punto  $C$  en la circunferencia de tal forma que  $A$ ,  $B$  y  $C$  son perceptualmente colineales).

2. Santiago: Y agregamos

3. Luis: La distancia de  $A$  a  $B$  y de  $B$  a  $C$  (usa la herramienta Distancia o Longitud). Así nos damos cuenta que es la misma distancia. (En la pantalla de la tableta se observa la siguiente gráfica).



4. Santiago: Entonces ahí cumpliríamos que el punto  $B$  es el punto medio.

5. Luis: Sí. Así tal como el profesor nos lo dijo. ¡Profe!

6. Profesor: (Se acerca al grupo).

7. Santiago: Profe, pusimos el punto  $A$  y el punto  $B$  y sacamos la circunferencia. Entonces, al sacar la circunferencia pusimos el punto  $C$ ; y al sacar las medidas de  $A$  a  $B$  y de  $B$  a  $C$  son las mismas; entonces, en conclusión,  $B$  es el punto medio de  $A$  a  $C$ .

8. Profesor: ¿Y dónde está el segmento? ¿No es punto medio de un segmento?

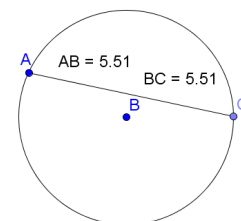
9. Luis: Entonces aquí (utiliza la herramienta Segmento y construye el segmento  $AC$ ). ¡Listo!

10. Profesor: ¿Será que si arrastro los puntos pasa lo mismo que en la tarea anterior? Que yo arrastraba los extremos y el punto  $C$  [que en esa tarea era el punto medio de un segmento  $AB$ ] seguía siendo punto medio.

11. Luis: (Arrastra el punto  $A$ ) Ahí se mueve.

12. Profesor: ¿Entonces  $B$  es punto medio?

13. Santiago: ¡No! (Observa la siguiente representación en la que  $B$  ya no pertenece al segmento  $AC$ ).



14. Luis: ¡Ah!

15. Profesor: Porque para que sea punto medio nosotros dijimos que ¿qué debía pasar?

16. Luis: Debe estar sobre el segmento.

Puede considerarse que en sus declaraciones 1, 3, 9 y 11, Luis involucra el concepto dibujo, ya que solo menciona los elementos de la representación gráfica sin asociarlos con algún referente teórico que los dote de significado. Estos dibujos son construidos por él de manera inmediata y sin esfuerzo, por lo cual se trata de dibujos que son solo percibidos.

En las declaraciones 4, 7, 13 y 16, los estudiantes no solo se refieren a la representación gráfica, sino que le dan un significado que se relaciona con el concepto de punto medio. En este sentido, es posible afirmar que en estas declaraciones se involucra el concepto de figura y hay discernimiento. No obstante, hay una diferencia entre estas intervenciones. Las declaraciones 4 y 7 fueron hechas por Santiago sin haber variado alguno de los elementos de la representación. En cambio, las intervenciones 13 y 16 las realizaron los estudiantes cuando experimentaron, bajo el arrastre del punto  $A$ , la variación de la relación de colinealidad entre los puntos.

En sus declaraciones 4 y 7, Santiago relaciona la representación construida inicialmente con el concepto de punto medio, específicamente con su propiedad de equidistancia respecto a los extremos del segmento. Debido a esta relación, la representación gráfica significa algo para Santiago: es un dibujo que representa el objeto geométrico punto medio, basado en la propiedad de equidistancia. Hasta aquí, puede afirmarse que Santiago discierne que una de las propiedades del punto medio es la equidistancia.

En las declaraciones 13 y 16, los estudiantes relacionan las nuevas representaciones (las que se originan con el arrastre del punto  $A$ ), también con el concepto de punto medio. Por esto, estas representaciones pueden considerarse como figuras. No obstante, en este caso la variación les permite a los estudiantes discernir que la relación de colinealidad, necesaria para ser punto medio, en su representación no es una propiedad invariante, ya que mediante el arrastre del punto  $A$  pueden percibir infinidad de dibujos que no la cumplen. En este caso, el discernimiento depende específicamente de dos patrones de variación: contraste y separación. Hay contraste porque el arrastre les permite a los estudiantes comparar diferentes dibujos, que no representan el concepto punto medio, con el dibujo que inicialmente construyeron y que perceptualmente sí correspondía a dicho concepto. Hay separación porque los estudiantes pueden percibir cómo varía la posición del punto  $A$ , mientras que  $B$  y  $C$  se mantienen invariantes, con lo cual hay discernimiento de la no colinealidad.

## CONCLUSIONES

Como principal conclusión del análisis se tiene que las representaciones que construyeron los estudiantes de manera directa e inmediata les permitió percibir las propiedades de equidistancia y colinealidad relacionadas con el concepto de punto medio de un segmento. Luego, ellos lograron discernir estas dos propiedades, la primera sin variar los elementos de la representación que construyeron, y la segunda mediante los patrones de variación (contraste y separación) que surgen cuando los estudiantes arrastran un punto de la representación. El hecho de que hayan logrado discernir estas dos propiedades puede ser indicador de que los estudiantes reconocen la necesidad de estas en la definición de punto medio.

## REFERENCIAS

- Aya, O., Echeverry, A. y Samper, C. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 35, 63-86.
- Camargo, L. y Samper, C. (2014). Definiciones y construcción de significado en el marco de la actividad demostrativa. En P. Perry (Ed.), *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría* (pp. 55-77). Bogotá, Colombia: Sistema de Publicaciones y Difusión del Conocimiento, UPN.
- Larios, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 361-382.
- Leung, A., Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 439-460.
- Orgill, M. (2012). Variation theory. En N. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning* (pp. 3391-3393). Dordrecht, Holanda: Springer.