TAREAS QUE PROMUEVEN EL USO EXPERTO DE UN ELEMENTO TEÓRICO EN LA ARGUMENTACIÓN

Jennyfer Zambrano y Carmen Samper
Universidad Pedagógica Nacional
nifer86@gmail.com, csamper@pedagogica.edu.co

En este documento se ilustra, con ejemplos, el uso experto de un elemento teórico (definición, teorema o postulado) realizado por estudiantes de grado séptimo cuando argumentan. El uso experto de un elemento teórico en la geometría escolar es saber usarlo para resolver problemas o construir justificaciones. Se reconoce que el tipo de problema está relacionado con los argumentos que se generan durante el proceso de resolución, y con el papel del profesor en clase.

INTRODUCCIÓN

Se presentan algunos resultados del estudio de Triana y Zambrano (2016), que se enfocó en identificar la relación entre el tipo de tarea y los argumentos que se generan durante su desarrollo, y en determinar si hay uso experto de elementos teóricos. El estudio se realizó en la clase de geometría de grado séptimo de un colegio oficial de la ciudad de Bogotá.

REFERENTES TEÓRICOS

Uso experto de elementos teóricos

El estatus teórico de postulados, teoremas y definiciones es distinto (Duval 2007); por ende, el uso experto de esos elementos teóricos en la geometría involucra acciones diferentes. Para Samper y Plazas (2017), el *uso experto de un postulado o teorema* incluye principalmente dos acciones: (i) reconocer la viabilidad de su uso para resolver un problema, formular una conjetura o producir una demostración, y (ii) reconocer que su uso, como garantía de argumentos, permite obtener lo que se busca. En cambio, el uso experto de una definición, usualmente depende del tipo de información que provee la situación: cuando se presenta el objeto con el término que lo designa, se desencapsulan las propiedades que lo definen, y cuando se ponen en juego las propiedades del objeto definido se encapsulan estas, para asignarle el término correspondiente.

Zambrano, J. y Samper, C. (2017). Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 155-160). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Argumentación matemática

Un argumento está compuesto por tres elementos básicos: unos *datos* que se proveen o se buscan; una *aserción*, proposición que tiene nexos con los datos; y una *garantía*, regla aceptada como válida que relaciona los datos con la aserción. Los argumentos se pueden clasificar según:

Su *estructura* (Perry, Samper, Camargo y Molina, 2013): un argumento puede ser deductivo, inductivo o abductivo, de acuerdo a cómo se establecen los datos (p), la aserción (q) y la garantía $(r: p \rightarrow q)$ en el argumento. Es deductivo si de p, usando r, se obtiene q; inductivo si de varias instancias de p se evidencia como consecuencia instancias de q y, de ello, se establece r. Es abductivo si se parte de q para concluir la plausibilidad de p, a partir de una regla r.

La *forma como se estructura*: un argumento es *incompleto* si no se expresa alguno de los tres elementos básicos de este (Samper y Toro, 2017). De lo contrario es *completo*.

La *naturaleza de la garantía*: según Krummheuer (2000), un argumento es *analítico* si su garantía es válida y se sustenta en un sistema teórico aceptado. Es *sustancial* si la garantía incluye datos numéricos, dibujos, gráficas, etc., o si está basada en la experiencia con una representación ya sea en el computador o en papel. Samper y Toro (2017) consideran que también son argumentos sustanciales, que denominan *no legítimos*, aquellos en los que se usa como garantía una afirmación que no es elemento del sistema teórico conformado en clase, la garantía no relaciona los datos con la aserción, o la aserción no es consecuencia de los datos.

Tareas matemáticas

Según Yeo (2007) una tarea en el ámbito escolar se puede caracterizar mediante aspectos variables como: la meta, el método, el andamiaje y su solución. La meta se refiere a los elementos teóricos y procesos matemáticos que se requieren para resolver el problema. El método tiene que ver con las estrategias de solución. Otro elemento de la tarea que permite caracterizarla es su objetivo didáctico, que puede estar relacionado con los procesos matemáticos que se quieren desarrollar mediante ella (argumentación, justificación, conjeturacion, investigación, traducción y ejercitación).

CONTEXTO DEL ESTUDIO

En un curso de grado séptimo se les asignó a los estudiantes una secuencia de tareas cuyo objetivo era promover la conceptualización del objeto geométrico punto medio de un segmento y favorecer la argumentación. En algunas tareas se requería usar un programa de geometría dinámica. Luego de producir colectivamente la definición de punto medio, a partir de explorar en geometría dinámica algunas representaciones, se promovió su uso para resolver problemas, para relacionar el punto medio con otros objetos geométricos, y para conjeturar y justificar teoremas relacionados.

EJEMPLOS DE USO EXPERTO DE ELEMENTOS TEÓRICOS

A continuación, se presentan evidencias del uso experto de la definición de punto medio y de un teorema relacionado, que surgieron en la solución de dos tareas de la secuencia. La definición de punto medio establecida en clase fue:

> i) es un punto que pertenece al segmento (lo que incluye colinealidad e interestancia) y ii) es equidistante de los extremos del segmento.

Uso experto de la definición

En la siguiente tarea, el método es único (usar plegados) y el objetivo es promover la argumentación. El enunciado de la tarea es:

> En la hoja blanca encontrarás representados los puntos A y B. Encuentra un punto C para que B sea el punto medio del $\overline{AC}$. Describe lo que hiciste y explica por qué procediste como lo hiciste.

A continuación se transcribe la conversación de Bayron con la profesora:

221	Bayron:	Bueno. Yo primero puse en el papel pergamino el punto A y el punto C. **Los alineé**, o sea, la doblé para sacar el segmento. Después, para sacar el punto B, cogí el punto C y lo alineé; le hice así (hace ademán)
222	Profesora:	Le hice así, ¿qué es?
223	Bayron:	O sea, lo doblé pues en el punto C, para poder sacar el A y el punto B, **para que queden de la misma distancia.**
224	Profesora:	¿Cómo puedes garantizar que el punto B es el extremo del segmento, para que el punto C sea el punto medio?

225 Bayron: Porque C **pertenece al segmento y está en la mitad.**

Bayron expresa un argumento abductivo analítico puesto que la aserción ya se tiene (C debe ser punto medio de un segmento con extremo en A); él usa implícitamente como garantía la definición de punto medio. Como alude a la relación de pertenencia de C al segmento AB y a su equidistancia a los extremos, estos son los datos. Se puede afirmar que Bayron desencapsula la definición de punto medio porque sus frases, que hemos destacado en negrilla, son las propiedades del objeto.

Uso experto de un teorema relacionado con la definición

El enunciado de la tarea asignada es:

> Sea el ΔABC, D punto medio del $\overline{AB}$, E punto medio del $\overline{BC}$, y F punto medio del $\overline{AC}$. Observe los ΔBDE y el ΔDAF. ¿Qué relación existe entre los perímetros de esos triángulos? Justifique su respuesta.

Para esta tarea hay, por lo menos, dos estrategias de solución (método). Una es representar la situación con geometría dinámica, encontrar los perímetros y compararlos. Otra es usar que el segmento con extremos los puntos medios de dos lados del triángulo miden la mitad de la longitud del tercer lado (hecho geométrico abordado en una tarea anterior) para establecer la relación entre los perímetros. La tarea es, de acuerdo con su objetivo, de conjeturación y argumentación.

A continuación se presenta la conversación de los estudiantes con la profesora.

950 Sergio: Nosotros encontramos que los perímetros del triángulo DEF son la mitad de los perímetros del triángulo ABC.

951 Profesora: Demuéstrame que lo que acabas de encontrar es cierto.

952 Nancy: Estamos midiendo los segmentos del triángulo que son BA, BC y AC. Vamos a medir los segmentos del triángulo más pequeño (le muestra a la profesora lo que hizo utilizando el *software*)

953 Sergio: No los midamos. El hecho geométrico que encontramos la clase pasada dice que esto mide la mitad (señala el segmento DF).

Figura 1

954 Nancy: Sería la mitad de cada segmento. Eso da.

En la intervención 950 se identifica la aserción. Los datos son D, E y F puntos medios de los lados del triángulo ABC. La garantía es el hecho geométrico ya mencionado, que Sergio usa al reconocer que no es necesario medir los segmentos. El uso experto de este hecho geométrico se evidencia cuando, a petición de la profesora, Sergio expresa su conjetura como proposición condicional (Figura 2):

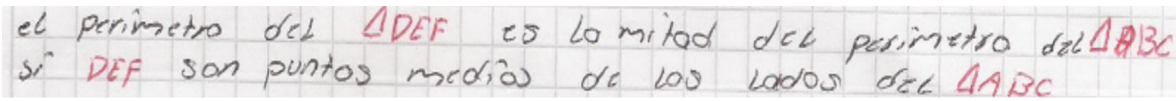
el perímetro del ΔDEF es la mitad del perímetro del ΔABC
si DEF son puntos medios de los lados del ΔABC

Figura 2. Registro escrito de Sergio

COMENTARIOS FINALES

Durante el desarrollo de la secuencia de tareas, la participación de los estudiantes se caracterizó por el uso de los elementos teóricos establecidos en clase. El proceso de conformar conjuntamente un sistema teórico local permitió que los estudiantes fueran adquiriendo elementos que podían usar como garantías en sus argumentos. Además, se evidenció que los estudiantes incorporaban el lenguaje geométrico en sus comunicaciones. Estas ganancias permitieron que en las últimas tareas, los estudiantes se remitieran de manera explícita a las definiciones para desencapsular las propiedades de punto medio y con ella justificar sus soluciones. A raíz de la exigencia de la profesora de explicar cómo obtuvieron la relación entre los perímetros, los estudiantes expusieron sus ideas y recurrieron al hecho geométrico para validarlas.

Las intervenciones del profesor juegan un papel importante en la construcción de significado de los elementos teóricos para ser usados como garantías (Samper y Plazas, 2017). Al diseñar una tarea, el profesor debe tener claro cuál es el objetivo de esta, que debe estar directamente relacionado tanto con la conceptualización de un objeto o relación matemática como con los procesos matemáticos que se pretenden desarrollar, como la generalización, la visualización, la justificación, la argumentación. El profesor debe propiciar la exploración de diversas representaciones de la imagen del concepto, y el uso de la definición del concepto en diferentes contextos, para favorecer el proceso de conceptualización y el uso experto de dicho elemento teórico.

Para que los elementos teóricos vayan adquiriendo significado para los estudiantes y, por ende, que estos puedan idear estrategias de solución y utilizar garantías legítimas en sus argumentos, y además aprendan a manejar con destreza los recursos utilizados en las clase de geometría (e. g., regla, compás, *software* de geometría dinámica), es recomendable proponer tareas en las que sea claro para los estudiantes qué elementos teóricos están involucrados en la solución (meta).

REFERENCIAS

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Krummheuer, G. (2000). Mathematics learning in narrative classroom cultures: Studies of argumentation in primary mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *20*(1), 22-32.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en el aula de geometria a nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometria plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 13-66). Bogotá, Colombia: Fondo Editorial de la Universidad Pedagogica Nacional.

Samper, C. y Plazas, T. (2017). Tipos de mensajes del profesor durante la producción de una demostración en geometría. *Educación Matemática*, *29*(1), 37-60.

Samper, C. y Toro, J. (2017). Un experimento de enseñanza en grado octavo sobre la argumentacıón en un ambıente de geometría dınámıca. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 50, 367-382. Recuperado de:

http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/828/1346

Triana, J. y Zambrano, J. (2016). *Tareas que promueven el uso experto de un elemento teórico en la argumentación* (Tesis de maestría). Universidad Pedagogica Nacional, Bogotá, Colombia.

Yeo, J. B. (2007). *Mathematical tasks: Clarification, classification and choice of suitable tasks for different types of learning and assessment* (Reporte técnico ME2007-01). Nanyang, Singapur: Nanyang Technological University. Recuperado de:

https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/949/3/MathematicalTasks.pdf