NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 98, julio de 2018, páginas 33-44

Algunos ejemplos de soluciones de problemas que no están en el currículo (y que deberían estar)

Francisco Bellot Rosado (Real Sociedad Matemática Española. España)

Resumen Haremos un recorrido por diferentes problemas propuestos en olimpiadas matemáticas.

Palabras clave Enseñanza matemáticas, resolución de problemas, olimpiadas matemáticas

Abstract We will take a tour of different problems proposed in mathematical Olympiads.

Keywords Teaching mathematics, Problem solving, math olympics

Introducción

Parafraseando el Lema de la Escuela, podría citar una frase de G.H. Hardy (el mentor inglés de Ramanujan) : *La única forma de aprender Matemáticas es hacer diez problemas todos los días de la semana, y veinte los domingos.*

Los dos países europeos donde se publican revistas centenarias de Matemáticas Elementales destinadas a los alumnos de niveles educativos anteriores al universitario, y a sus profesores, son Hungría y Rumania. KÖMAL (1894) es la revista escolar de Matemáticas y Física, que se publica en Budapest. GAZETA MATEMATICA (serie B) (1895) es la revista rumana, publicada en Bucarest, y cuya serie A está dedicada a la Didáctica de la Matemática. En ambos casos, con ligeras variantes, se proponen enormes cantidades de problemas para los distintos ***grados*** (cursos, diríamos en España) de la enseñanza preuniversitaria. Y lo que es mejor, reciben soluciones de los estudiantes, que son analizadas por los equipos de redacción, se eligen las mejores para ser publicadas y se detallan los nombres y centros escolares de procedencia de los autores de las soluciones. En el caso de KÖMAL, con fotografías. Tanto una como otra publican 10 números al año. En el caso de KÖMAL, los problemas están clasificados por niveles de dificultad; en GAZETA MATEMATICA, los más difíciles se reservan para preparación de Olimpiadas y para el Concurso anual de Resolución de problemas de la revista.

Desde mi punto de vista, estas dos revistas son paradigmáticas. En otros países, de Europa, Asia y América, hay revistas de este mismo estilo, pero mi preferencia personal es por las dos citadas. No son revistas de investigación en Matemáticas (que también las hay, obvio es decirlo), ni revistas de Educación Matemática, ni de investigación en Educación Matemática.

Yo no conozco ninguna publicación periódica española que se asemeje algo a estas dos. Y por eso he seleccionado algunos problemas de ambas, junto con algún otro de distinta procedencia, para desarrollarlo en esta ponencia.

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

PROBLEMA 1. Primer problema de la Olimpiada Británica de 2017

Helen divide 365 por cada uno de los números 1, 2, 3,…, 365 y escribe la lista de los 365 restos.

Phil divide 366 por cada uno de los números 1, 2, 3,…,365,366 y escribe la lista de los 366 restos.

¿Cuál de las dos listas tiene una suma mayor, y por cuánto?

Solución oficial

La descomposición de 365 y 366 en factores primos es

$$365 = 5 \times 73 \text{ y } 366 = 2 \times 3 \times 61 .$$

Por lo tanto, los conjuntos de divisores de ambos números son

$$D_{365} = \{1, 5, 73, 365\};\ D_{366} = \{1, 2, 3, 6, 61, 122, 183, 366\} .$$

A efectos del problema podemos eliminar 366 de nuestra consideración, pues no añade nada a la lista de Phil, pues su resto de la división de 366 por 366 es 0. Por tanto nos quedamos con

1, 2, 3, 6, 61, 122, 183 (*)

No debemos caer en la “trampa” del enunciado e intentar calcular efectivamente las dos sumas: en realidad lo que se pregunta es “¿cuál, y por cuánto más, de las dos listas tiene una suma mayor?”.

Podemos escribir las igualdades siguientes, que dan los cocientes y restos enteros por defecto en los dos casos:

$$365 = q \cdot k + r, \text{ con } 0 \le r \le k-1 \text{ ; y}$$

$$366 = 365 + 1 = qk + (r+1) .$$

Podemos hacer una lista comparativa de los restos en ambos casos, para ciertos valores del divisor, subrayando los casos en que el resto sea mayor:

d(divisor)	1	2	3	4	5	6	61	122	183	362	363	364	365
Resto Helen	0	1	2	1	0	5	60	121	182	3	2	1	0
Resto Phil	0	0	0	2	1	0	0	0	0	4	3	2	1

La elección de los valores del divisor que se muestran en la tabla viene justificada por lo que decimos en los párrafos siguientes.

Para todos los números que NO son divisores de 366, el resto de la división de Phil por ellos es una unidad mayor que el resto de la división de Helen, y esto ocurre 365-7 = 358 veces. Este es el número de unidades en que la suma de Phil es mayor que la de Helen.

En el caso de los números que SÍ son divisores de 366, los restos para Phil son 0; y por lo que a Helen respecta, se tiene:

Si $366 = d \cdot c$, entonces $365 = d \cdot c - 1 = d \cdot (c-1) + d - 1$, luego la suma de restos para Helen en este caso es 0+1+2+5+60+121+182=371 más que Phil.

En conclusión, <u>la suma de Helen es 371-358=13 unidades por encima de la de Phil</u> y hemos terminado.■

PROBLEMA 2. Un problema de la Olimpiada Rusa de 1991 (Grado 11, Problema 2)

Supongamos que los números α y β verifican

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 1;\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 5.$$

Calcular el valor de $\alpha + \beta$.

<u>**Solución**</u> *(del autor del problema, B.Kukushkin, de Moscú.*

El primer miembro de ambas igualdades es el valor del polinomio

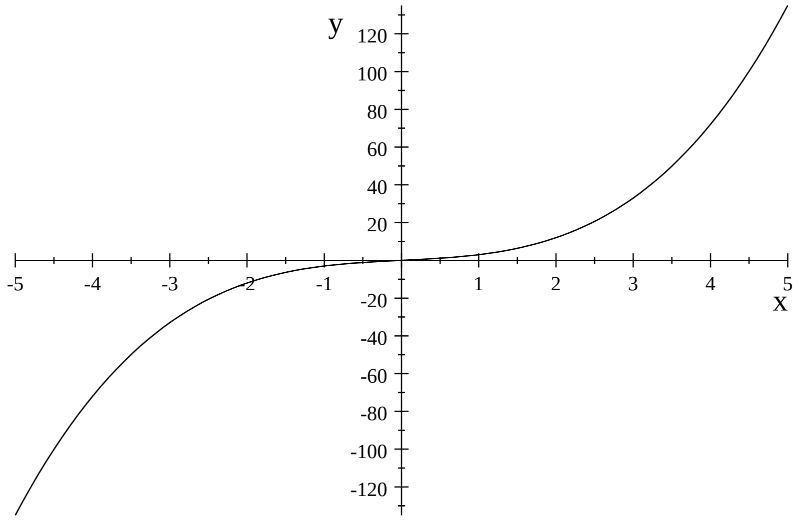
$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x = (x-1)^3 + 2(x-1) + 3$$

en x = α y x = β, respectivamente. Aquí la "idea creativa" consiste en completar un cubo, teniendo en cuenta los dos primeros términos del polinomio. La igualdad anterior la podemos escribir en la forma

$$f(x) - 3 = (x-1)^3 + 2(x-1) = y^3 + 2y,$$

Si convenimos en llamar $y = x - 1$.

Ahora bien, la función $g(y) = y^3 + 2y = y(y^2 + 2)$ es una función estrictamente creciente



como vemos en su gráfica. Entonces los números α y β están determinados unívocamente por las ecuaciones

$$g(\alpha-1)=f(\alpha)-3=-2$$

$$g(\beta-1)=f(\beta)-3=2.$$

Como la función es impar, $\alpha-1=-(\beta-1)$, y $\alpha+\beta=2$.■

PROBLEMA 3. Problema F.2752 de la revista KÖMAL 1990/3

Racionalizar el denominador de $\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{32}-5\sqrt{2}}$**.**

<u>Solución 1</u> (*Majthenyi Ágnes)*

Multiplicando el denominador por $1-5\sqrt{2}-\sqrt[4]{32}$ se obtiene

$$\frac{1}{1+\sqrt[4]{32}-5\sqrt{2}}=\frac{1-5\sqrt{2}-\sqrt[4]{32}}{(1-5\sqrt{2})^2-\sqrt{32}} \quad (1),$$

porque $\sqrt[4]{32}\cdot\sqrt[4]{32}=\sqrt{32}$.

Pero $(1-5\sqrt{2})^2-\sqrt{32}=\ldots=51-14\sqrt{2}$, así que de (1) pasamos a $\dfrac{1-5\sqrt{2}-\sqrt[4]{32}}{51-14\sqrt{2}}$, y volviendo a racionalizar, resulta

$$\frac{1}{1+\sqrt[4]{32}-5\sqrt{2}}=\text{L} \;=\frac{(51+14\sqrt{2})(1-5\sqrt{2}-\sqrt[4]{32})}{51^2-2\cdot 196}=\frac{(51+14\sqrt{2})(1-5\sqrt{2}-\sqrt[4]{32})}{2209}.\blacksquare$$

<u>Solución 2</u> *(Czikó András)*

El denominador de la fracción lo ponemos en la forma

$$a+b\sqrt[4]{2}+c\left(\sqrt[4]{2}\right)^2+d\left(\sqrt[4]{2}\right)^3, \text{ es decir}$$

$$1+\sqrt[4]{32}-5\sqrt{2}=1+2\sqrt[4]{2}-5\left(\sqrt[4]{2}\right)^2.$$

Buscamos números racionales a, b, c, d tales que

$$\left(a+b\sqrt[4]{2}+c\left(\sqrt[4]{2}\right)^2+d\left(\sqrt[4]{2}\right)^3\right)\left(1+2\sqrt[4]{2}-5\left(\sqrt[4]{2}\right)^2\right)=1.$$

(Esto es lo que se conoce como un factor racionalizador del denominador inicial)

Al hacer operaciones en la igualdad anterior, aparece una parte racional que resulta ser $a-10c+4d$, y que tendrá que ser igual a 1; y tres coeficientes de las diferentes potencias de $\sqrt[4]{2}$, que deberán anularse, puesto que el resultado de la multiplicación anterior debe ser 1. En resumidas cuentas, tenemos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2a+b-10d&=0\\ -5a+2b+c&=0\\ -5b+2c+d&=0\\ a-10c+4d&=1 \end{aligned}\right\}$$

Y resolviendo el sistema llegamos a

$$a=\frac{-89}{2209}, b=\frac{-102}{2209}, c=\frac{-241}{2209}, d=\frac{-28}{2209}, \text{ así que la solución del problema es}$$

$$\frac{1}{1+\sqrt[4]{32}-5\sqrt{2}}=-\frac{89+102\sqrt[4]{2}+241\sqrt{2}+28\sqrt[4]{8}}{2209}$$

PROBLEMA 4. Un problema de la competición Kürschak de Hungría de 1906

Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una permutación cualquiera de los números $1, 2, \ldots, n$. Demostrar que, si n es impar, el producto

$$(a_1-1)(a_2-2)\ldots(a_n-n)$$

es par.

<u>Solución 1</u>

Demostraremos que por lo menos uno de los factores del producto es par. Puesto que n es impar, podemos escribirlo como $n=2k+1$, con k entero, y observemos que el producto tiene $2k+1$ factores. Además, de los números $1,2,3,\ldots,2k+1$, hay exactamente $k+1$ impares, porque

$$1=2\cdot1-1$$

$$3=2\cdot2-1$$

$$5=2\cdot3-1$$

$$\ldots\ \ldots$$

$$2k+1=2(k+1)-1.$$

Ya que las "aes" también están formadas por los números 1 a $2k+1$, exactamente $k+1$ de las "aes" son impares. Por lo tanto, hay exactamente $2(k+1)=n+1$ números impares entre los $2n$ números $a_1, a_2, \ldots, a_n; 1, 2, \ldots, n$ que aparecen en el producto anterior. Pero solo hay n factores. Luego por el principio del palomar, al menos uno de los factores contiene dos números impares, digamos a_m y m, así que su diferencia es par.■

<u>Solución 2</u>

El número de factores es impar, y su suma es evidentemente 0, que es par. Esto sería imposible si todos los factores fueran impares. En consecuencia, al menos uno de los factores es par.■

PROBLEMA 5. Un problema de la Olimpiada de Rumanía de 1994

Sean $a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ **tales que las ecuaciones**

$$ax^2 - bx + c = 0 \text{ y } Ax^2 - Bx + C = 0$$

tienen raíces reales.

Demostrar que, cualquiera que sea el número real u **situado entre las raíces de la primera ecuación, y cualquiera que sea el número real** U **situado entre las raíces de la segunda, se verifica**

$$(au + AU)\left(\frac{c}{u} + \frac{C}{U}\right) \leq \left(\frac{b+B}{2}\right)^2.$$

<u>**Solución**</u> (*Gazeta Matematica, serie B, 1994/4, pg.162)*

El problema fue propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest.

Sean $P(x) = ax^2 - bx + c,$ y $Q(x) = Ax^2 - Bx + C$. Si x_1 *y* x_2 son las raíces de la ecuación $P(x) = 0$, por las relaciones entre los coeficientes y las raíces se tiene

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{a} > 0,\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0.$$

Entonces $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Ya que u está comprendido entre ambas raíces, resulta que $u > 0$ *y que* $P(u) < 0$. Esta última desigualdad se escribe como $au^2 - bu + c \leq 0 \Rightarrow au + \frac{c}{u} \leq b$.

Un razonamiento análogo permite escribir que $AU + \frac{C}{U} \leq B$.

La desigualdad de las medias aritmética y geométrica conduce a

$$\sqrt{(au + AU)\left(\frac{c}{u} + \frac{C}{U}\right)} \leq \frac{au + AU + \frac{c}{u} + \frac{C}{U}}{2} = \frac{\left(au + \frac{c}{u}\right) + \left(AU + \frac{C}{U}\right)}{2} \leq \frac{b+B}{2}, \ (1)$$

donde la desigualdad solo se ha aplicado en el primer paso (≤).

Elevando al cuadrado los dos miembros, tenemos la desigualdad buscada:

$$(au + AU)\left(\frac{c}{u} + \frac{C}{U}\right) \leq \left(\frac{b+B}{2}\right)^2.$$

Vamos a estudiar las condiciones para que se verifique la igualdad. Por una parte, en la desigualdad aritmético-geométrica, debe cumplirse que

$$au + AU = \frac{c}{u} + \frac{C}{U} \quad (*);$$

Y por otro lado, en la segunda desigualdad de (1), tendrá que verificarse

$$au + \frac{c}{u} = b \text{ y } AU + \frac{C}{U} = B \quad (**)$$

Las condiciones (**) significan que $au^2 + c - bu = 0$ y que $AU^2 + C - BU = 0$, es decir, que u debe ser una raíz del polinomio P y U debe ser una raíz del polinomio Q (lo cual significa además que en el enunciado la palabra "entre" ha de entenderse incluidos los extremos del intervalo entre las raíces). Pero además, los coeficientes *a, c, A y C* _*no son arbitrarios, sino que han de estar relacionados por la igualdad (*).*_

Construcción de un ejemplo en el que se verifican las igualdades (*) y (**)

Llamemos u_1 y u_2 a las raíces de P, y U_1 y U_2 a las de Q. Se tiene entonces

$$P(x) = a(x-u_1)(x-u_2) \quad \text{y} \quad Q(x) = A(x-U_1)(x-U_2) \ ,$$

y por las relaciones entre los coeficientes y las raíces, resulta

$$b = a(u_1+u_2), \quad c = au_1u_2 \quad (2)$$

$$B = A(U_1+U_2), \ C = aU_1U_2 \ (3) .$$

Escribimos (**) en la forma $au = b - \frac{c}{u}$ y $AU = B - \frac{C}{U}$. Sustituimos en (*):

$$b - \frac{c}{u} + B - \frac{C}{U} = \frac{c}{u} + \frac{C}{U} \Rightarrow b + B = 2\left(\frac{c}{u} + \frac{C}{U}\right) \quad (4)$$

Llevando a (4) los valores de (2) y (3) podemos escribir que

$$a(u_1+u_2) + A(u_1+u_2) = 2(au_2 + Au_2)$$

Y simplificando obtenemos $a(u_1-u_2) = A(U_2-U_1)$, que podemos poner como

$$\frac{a}{A} = \frac{U_2-U_1}{u_1-u_2} \quad (5)$$

Como a y A son positivos, hay que tomar $U_1 < U_2$ y $u_1 > u_2$.

Entonces, un ejemplo de los dos polinomios para los que se verifican las condiciones (*) y (**) puede ser el siguiente:

$$P(x) = 5(x-2)(x-5), \quad Q(x) = 3(x-3)(x-8),$$

con lo que $\frac{a}{A} = \frac{5}{3}$, $u_1 = 5, u_2 = 2; U_1 = 3, U_2 = 8$ y entonces

$$\frac{c}{u_1} = au_2 = 5 \cdot 2; \frac{C}{U_1} = AU_2 = 3 \cdot 8 \to 5 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 34$$

$$au_1 + au_2 = 5 \cdot 7 = 35; \ A(U_1 + U_2) = 3 \cdot 11 = 33$$

Y efectivamente la media aritmética de 33 y 35 es 34.■

PROBLEMA 6. Un problema de la Olimpiada URSS de 1984

Arshabad, clase 10

Los números reales estrictamente positivos *x, y, z* **verifican**

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \ z^2 + zx + x^2 = 16 .$$

Calcular $xy + 2yz + 3zx$.

<u>**Solución 1**</u> (Algebraica)

Sean $A = x^2 + xy + \frac{y^2}{3}$, $B = \frac{y^2}{3} + z^2$, $C = z^2 + zx + x^2$; y $D = xy + 2yz + 3zx$.

La igualdad (evidente) A = B + C es equivalente a

$$xy = 2z^2 + zx \Leftrightarrow xy = x(2z + x) \quad (1)$$

Pero $D = xy + 2yz + 3zx$ y por (1) lo expresamos como $D = 2z^2 + zx + 2yz + 3zx$, luego se tiene

$$D = 2z(2x + y + z) \Rightarrow 2x + y + z = \frac{D}{2z} = \ (por(2)) = \frac{27x}{2z^2} \quad (3)$$

Como A – B + C = 32, esto es lo mismo que $x(2x+y+z)=32 \Leftrightarrow 32 = x\cdot\dfrac{D}{2z} \Leftrightarrow 32=\dfrac{27x^2}{2z^2}$

,

donde en la última igualdad hemos usado (3). De todo ello resulta que $\dfrac{x}{z}=\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$. Sustituyendo en (2), resulta $D=27\cdot\dfrac{8}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow xy+2yz+3zx=24\sqrt{3}$. ■

Solución 2 (Geométrico-trigonométrica)

Vamos a construir un triángulo XYZ, rectángulo en Z, con catetos ZY = 3 y ZX = 4, compuesto por tres triángulos: OYZ (rectángulo en O), OXZ con el ángulo en O de 120º, y OXY con el ángulo en O de 150º y tales que las longitudes de los lados que salen de O sean OY= $\dfrac{y}{\sqrt{3}}$, OX = x , OZ = z (v. la figura)

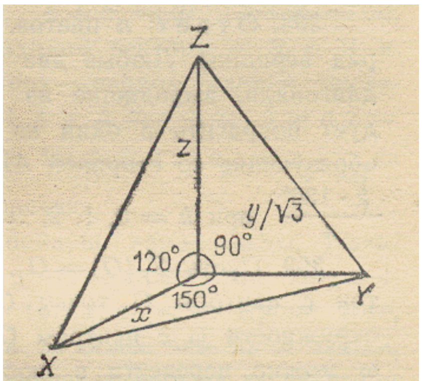


Рис. 118

(Aunque la “ilusión óptica” parece que se trata de una figura en el espacio, es en el plano, ya que los tres ángulos de vértice O suman 360º y si fuera en el espacio esa igualdad no se verificaría). La hipotenusa del triángulo OYZ mide

$$ZY=\sqrt{\frac{y^2}{3}+z^2}=\sqrt{9}=3.$$

Construimos a continuación el triángulo OZX, de manera que

$$OZ=z, OX=x, \measuredangle XOZ=120^{\circ}$$

De acuerdo con el teorema del coseno, se tiene

$$XZ^2=x^2+z^2-2xz\cdot\cos 120^{\circ}=x^2+z^2+xz=16 \Rightarrow XZ=4\ .$$

“Cerraremos la figura” con el triángulo OXY, tal que

$$OY=\frac{y}{\sqrt{3}},OX=x,\mathrm{R}XOY=150^{\text{o}}$$

Otra vez el teorema del coseno permite escribir que

$$XY^2=x^2+\frac{y^2}{3}-2xy\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right).\cos 150^{\circ}=x^2+\frac{y^2}{3}-2x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=x^2+\frac{y^2}{3}+xy=25\Rightarrow XY=5\ .$$

Ahora bien, el área del triángulo XYZ es la suma de las áreas de los tres triángulos OYZ, OZX y OXY:

$$[OYZ]=\frac{1}{2}OY\cdot OZ\cdot sen 90^{\text{o}}=\frac{yz}{2\sqrt{3}}\ ,$$

$$[OZX]=\frac{1}{2}OX\cdot OZ\cdot sen 120^{\text{o}}=\frac{xz\sqrt{3}}{4}\ ,$$

$$[OXY]=\frac{1}{2}OX\cdot OY\cdot sen 150^{\text{o}}=\frac{xy}{4\sqrt{3}}$$

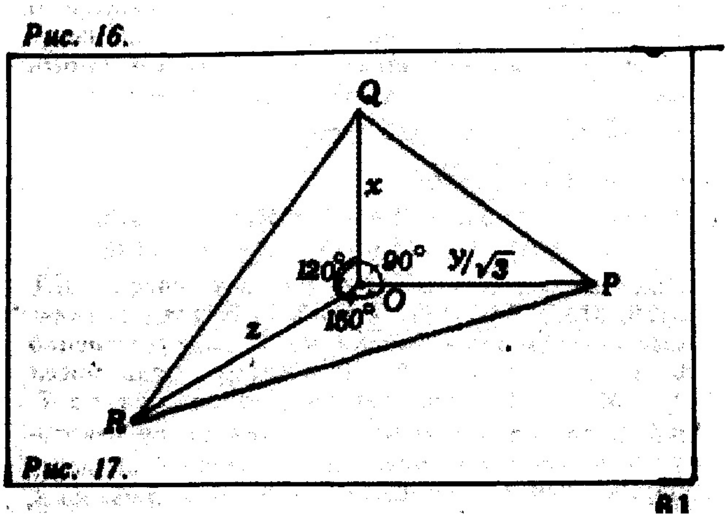
Sumando y haciendo operaciones resulta

$$[XYZ]=\frac{1}{4\sqrt{3}}(xy+2yz+3xz).$$

Pero puesto que XYZ es un triángulo rectángulo (en Z) de catetos 3 y 4, su área es 6, con lo cual resulta

$$[XYZ]=\frac{1}{4\sqrt{3}}(xy+2yz+3xz)=6\Rightarrow xy+2yz+3xz=24\sqrt{3}\ .$$

La figura siguiente, tomada de la revista rusa Kvant, de la página con las soluciones de los problemas de la Olimpiada de 1984, da una mejor impresión de ser rectángulo el triángulo XYZ (que allí le llama PQR, con algunos cambios que no merece la pena analizar).



BIBLIOGRAFÍA

Las fuentes bibliográficas utilizadas, así como la procedencia de los problemas, se han indicado en cada uno de ellos.