

Secuencia didáctica para el estudio de los triángulos en Educación Primaria con Geogebra y un primer análisis

M^a Elena Segade Pampín, M^a Cristina Naya Riveiro

(Facultad de Ciencias de la Educación, Universidade da Coruña, España)

Resumen

Se presenta una propuesta didáctica basada en el uso de GeoGebra para favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de los triángulos en Educación Primaria. La propuesta está compuesta por seis actividades que permiten, mediante la exploración y manipulación, identificar y reconocer de forma intuitiva características comunes y elementos diferenciadores de estas figuras, además de trabajar sus distintas clasificaciones. Todas las actividades están acompañadas de preguntas orientativas para promover las intervenciones del alumnado. Se realiza un primer análisis de la intervención de la propuesta en un aula de 5º curso, cuyos resultados permiten afirmar que ayuda a mejorar la imagen conceptual del triángulo en el alumnado, a detectar dificultades y a superar obstáculos presentes en el aprendizaje del concepto de triángulo.

Palabras clave

Propuesta didáctica, Geometría, Triángulos, GeoGebra, Educación Primaria.

Title

Didactic proposal to studying the triangles in the Elementary School with GeoGebra and a first analysis

Abstract

A didactic proposal is presented using GeoGebra in order to improve the processes of teaching and learning of the triangles in Elementary School. The proposal consists of six activities that allow, through exploration and manipulation, to identify and intuitively recognize common characteristics and differentiating elements of these figures, as well as working with their different classifications. All activities are accompanied by guiding questions to promote student interventions. We display a first analysis of the intervention of the proposal in a 5th grade classroom, whose results allow us to state that it helps to improve the conceptual image of triangle in students, and to detect and overcome learning difficulties on the triangle concept.

Keywords

Didactic proposal, Geometry, Triangles, GeoGebra, Elementary School.

1. Introducción y justificación

En gran medida la enseñanza de la Geometría en Educación Primaria se caracteriza por aplicar sistemáticamente los contenidos y orientaciones de un libro de texto, que presenta una información acompañada de dibujos, fotografías, etc., basada en la abstracción y en la propuesta de actividades prácticas para introducir o afianzar los conocimientos oportunos (Carrillo et al., 2016, p. 217). Este hecho está en contradicción con lo recogido en los Estándares para las Matemáticas escolares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), y en particular para la enseñanza de la Geometría, que señala que desde los primeros años de escolarización los niños y niñas



... deberían desarrollar destrezas de visualización a través de experiencias manipulativas con distintos objetos geométricos, y mediante tecnología que les permita girar, reducir y deformar figuras de dos y tres dimensiones. (NCTM, 2003, p. 43).

Hay que tener en cuenta además que las dificultades y errores que se presentan en el aprendizaje de las figuras planas y en concreto, de los triángulos, se adquieren en los primeros cursos de Educación Primaria y suelen perdurar durante toda su formación académica, e incluso son detectados en futuros docentes de Educación Primaria como muestran estudios de Gutiérrez y Jaime (1996) o Contreras y Blanco (2001), con el peligro de poder ser transmitidos a sus futuros estudiantes.

También se puede concebir el aumento en medios tecnológicos de muchos centros educativos como una oportunidad para el aprovechamiento e integración de las tecnologías y, en particular, de programas de geometría dinámica como puede ser GeoGebra, de creciente implantación en las aulas de Educación Primaria (Barbosa, 2013; Arnal-Bailera y Guerrero, 2015 y 2016; Arnal-Bailera y Lancis, 2016; Miguel, 2016).

Por estas razones se plantea en este trabajo el diseño de una secuencia didáctica basada en el uso del software GeoGebra, que favorezca el proceso de enseñanza y aprendizaje del estudio de los triángulos. En particular, esta propuesta didáctica se enmarca en el Bloque 4: Geometría del currículum básico de la Educación Primaria de la Ley Orgánica de la Mejora de la Calidad Educativa (Real Decreto 126/2014, 2014, pp. 19392-19393), tratando los “elementos de un triángulo”, “clasificación de triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos”, como contenidos; “conocer el triángulo” como criterio de evaluación y, “clasifica triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos, identificando las relaciones entre sus lados y entre ángulos” y “utiliza herramientas tecnológicas para la construcción y exploración de formas geométricas”, como estándares de aprendizaje.

Se recoge también un primer análisis de la secuencia didáctica presentada en un aula de 5º curso de Educación Primaria de un Centro de Educación Infantil y Primaria (CEIP) público.

2. Marco teórico

La información que los estudiantes de Educación Primaria reciben en las clases de Matemáticas es de dos tipos: verbal y gráfica, toda ella transmitida por el docente, el libro de texto, otros compañeros, etc. (Carrillo et al., 2016, p. 198). En general los docentes suelen dar más importancia a las definiciones que a los ejemplos, siendo éstos los que mayor impacto tienen sobre los estudiantes y los que producen un aprendizaje más duradero y profundo (Gutiérrez y Jaime, 1996, p. 145). Por ello, la enseñanza de la geometría en Educación Primaria entendemos que debe basarse en metodologías que faciliten la actividad de exploración y de descubrimiento por los estudiantes (Gutiérrez y Jaime, 2012).

Basamos nuestra propuesta didáctica en los modelos teóricos de Van Hiele (1986) y de Vinner (1991) para el proceso de aprendizaje de conceptos geométricos. Para su diseño se han tenido en cuenta estos dos modelos, aunque se basan fundamentalmente en las investigaciones de Vinner (Vinner y Hershkowitz, 1983; Vinner, 1991) ya que plantea que el cerebro almacena la información verbal y gráfica en su mente mediante dos estructuras: la imagen conceptual y la definición conceptual. Se introduce la idea de imagen conceptual en referencia a aquello que se activa en nuestra memoria cuando leemos o escuchamos el nombre de un concepto conocido, es decir, está integrada por la información gráfica memorizada. Esto no suele ser la definición del concepto escuchado, sino más bien un conjunto de representaciones visuales o experiencias compuestas por un conjunto de

ejemplos (provenientes de la enseñanza recibida y experiencias previas) de dicho concepto y –en ocasiones– de propiedades que el estudiante asocia al concepto. Mientras que la definición conceptual hace referencia a la información verbal memorizada.

Bajo este marco, el aprendizaje de un concepto geométrico consiste en construir una imagen conceptual y una definición conceptual lo más completas posibles de forma combinada, donde el docente juega un rol muy importante en el aprendizaje de sus estudiantes, dado que es el responsable de diseñar y proponer las actividades que ayuden a formar dichas imágenes y definiciones (Carrillo et al., 2016, p. 199).

Según Gutiérrez y Jaime (2012, p.66) o Barrantes y Zapata (2008, p. 69) los estudiantes basan sus razonamientos, en la mayoría de los casos, solo en sus imágenes conceptuales en contraposición a la creencia, casi siempre errónea, del profesorado y del planteamiento de muchos libros de texto de los distintos niveles educativos que lo hacen basándose en sus definiciones verbales, como muestran los resultados de la investigación de Gutiérrez y Jaime (1996). Por tanto, la estructura cognitiva o el esquema conceptual que un estudiante asocia a un concepto matemático, y en particular geométrico, está formada por las imágenes mentales fruto de la experiencia, a partir de situaciones muy variadas, en las que se interiorizan propiedades y se desarrollan procedimientos sin necesidad de recurrir a la definición. Una imagen de un concepto es completa y correcta cuando ese conjunto de ejemplos y propiedades es tan amplio que le permite al estudiante construir e identificar ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades asociadas son correctas (Arnal-Bailera y Lancis, 2016, p. 106). Por tanto, será correcta cuando le permita al estudiante discriminar sin errores todos los ejemplos de ese concepto y cuando las propiedades que lleve asociadas sean todas relevantes (Gutiérrez y Jaime, 2012, p. 65).

Generalmente, según Gutiérrez y Jaime (2012, p. 65), los ejemplos que se tratan para la formación de la imagen de un concepto suelen ser pocos y con alguna característica visual peculiar o estereotipada, convirtiéndose en prototipos y en los únicos casos de referencia con los que el estudiante puede comparar casos nuevos. Por ello, muchos autores como Barrantes y Zapata (2008), Gutiérrez y Jaime (2012), Ortega y Pecharromás (2015), Arnal-Bailera y Guerrero (2016) o Arnal-Bailera y Lancis (2016), defienden que para ampliar y mejorar la calidad de estas imágenes conceptuales es necesario ofrecer una cuidada y mayor variedad de ejemplos, es decir intentar mejorar la imagen conceptual tratando de ampliar el rango de estos ejemplos y propiedades de modo que se adquiera un mecanismo que permita identificar o construir todos los ejemplos del concepto. Por ello se deben diseñar actividades que permitan dar una oportunidad al alumnado para explorar, construir y comparar ejemplos y contraejemplos que les ayuden a identificar sus diferencias más significativas. Y esto se podrá conseguir utilizando algún programa de geometría dinámica en las clases, puesto que, de lo contrario, sólo se podrán apoyar esos ejemplos mediante imágenes estáticas.

A raíz de todo lo expuesto, se plantea el diseño de una propuesta didáctica con GeoGebra para el estudio de los triángulos. La razón de usar este software de geometría dinámica es, por un lado, por ser un software libre, lo que facilita su acceso e instalación únicamente teniendo acceso a internet; y por otro, porque está aumentando el número de investigaciones que avalan el uso de este recurso para la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje geométrico en la Educación Primaria (Lopes de Arújo y Costa, 2010; Cataneo, 2012; Barbosa, 2013; Arnal-Bailera y Guerrero, 2016; Miguel, 2016; Pereira da Costa y Câmara dos Santos, 2016).

La propuesta no exige ningún conocimiento técnico sobre el programa, sino que se presenta su uso de una forma similar a la presentada por Arnal-Bailera y Guerrero (2016, p. 41): como medio de exploración y manipulación, para favorecer la intuición de ciertas propiedades, para identificar



elementos, para favorecer su construcción y clasificación y para ayudar a superar obstáculos de aprendizaje.

3. Objetivos

El objetivo principal que se pretende alcanzar con el diseño de esta propuesta didáctica es mejorar la imagen conceptual del triángulo en el alumnado de Educación Primaria. En particular, ayudar a superar la presentación de una única forma de representación del triángulo que incorpore aspectos circunstanciales, evitando recurrir tan solo a ejemplos estereotipados y realizando actividades de construcción, exploración, identificación y clasificación de triángulos.

Además, una vez realizada una revisión bibliográfica amplia, se pudo observar que, aunque cada vez existen más estudios que fomentan el uso de este software en las aulas de Educación Primaria, el número de recursos o applets de GeoGebra para esta etapa educativa que se puedan usar directamente en un aula es muy pequeño. Por ello también se propone como objetivo facilitar recursos para la enseñanza y aprendizaje a los docentes de Educación Primaria en ejercicio y fomentar el uso de GeoGebra en esta etapa educativa.

4. Descripción de las actividades de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica está compuesta por seis actividades en GeoGebra que permiten, mediante la exploración y manipulación de los triángulos, identificar y reconocer de forma intuitiva las características comunes y los elementos diferenciadores de las distintas representaciones de estas figuras. Esto es, supone un contexto idóneo para la búsqueda y generalización de regularidades, así como para la elaboración y validación de conjeturas sobre las relaciones entre las propiedades de los distintos triángulos que difícilmente se podrían comprobar sin recurrir al GeoGebra.

Concretamente, se comienza descubriendo las propiedades que han de verificar los triángulos respecto a la longitud de sus lados y a la amplitud de sus ángulos a través de la simulación de un mecano. Le sigue una actividad en la que se trabaja la identificación de los elementos básicos que componen un triángulo a partir de la deformación de uno dado. Para finalizar, se proponen varias actividades con el objetivo de presentar las distintas clasificaciones de manera dirigida, para que los estudiantes las puedan descubrir en base a sus propias intuiciones y explorar las relaciones existentes entre los distintos tipos de triángulos. Además, en cada una de las actividades, se incluye una serie de preguntas que sirven de orientación al docente para promover las intervenciones de los estudiantes y como medio para conocer las dificultades presentes en la adquisición del concepto geométrico que se está estudiando.

El enlace al libro en GeoGebra que contiene la secuencia de actividades es el siguiente: <https://www.geogebra.org/m/f2TQG9yk>.

Actividad 1: Mecano simulado en función de los lados del triángulo

Como primera actividad se propone descubrir qué restricción deben cumplir las longitudes de tres segmentos para que sea posible formar un triángulo con ellos. Para ello, el estudiante tiene que tratar de construir un triángulo moviendo los vértices para modificar la posición y los deslizadores para modificar la longitud de los tres lados tal y como se podría hacer al manipular un mecano (ver Imagen 1).



Imagen 1: Captura del applet de Geogebra que muestra la imposibilidad de construir un triángulo con las longitudes escogidas.

Cuando sea posible construir un triángulo (al conseguir que coincidan los dos vértices libres variando las longitudes y posiciones de los segmentos del mecano) se muestra su área coloreada junto con una tabla (ver Imagen 2). En ella, el estudiante tiene que introducir el nombre de un lado cualquiera y se calcula directamente la suma y diferencia de las longitudes respecto de los restantes lados. En todos los triángulos que hayan construido, el docente preguntará cómo es la longitud del lado indicado respecto a la suma de los otros dos y qué pueden observar en los numerosos casos en los que resulta imposible formar un triángulo para que con esta información, traten de intuir la desigualdad triangular.

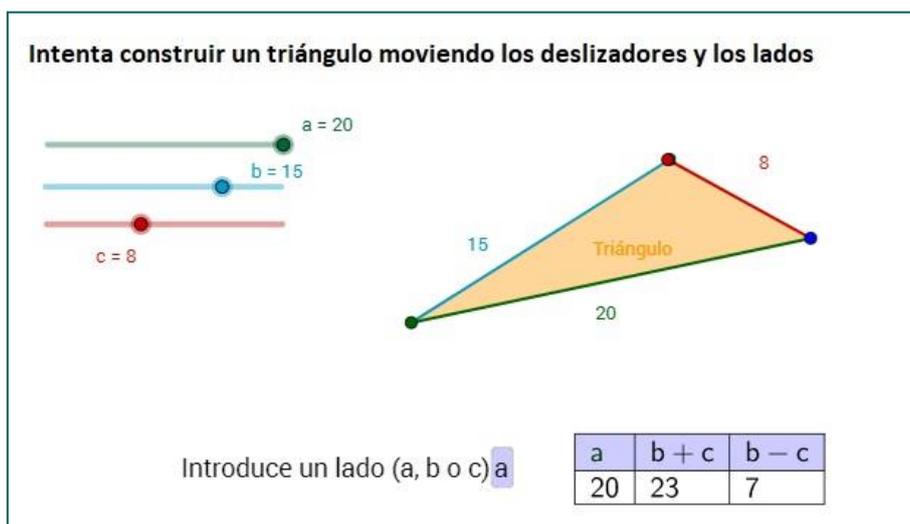


Imagen 2. Triángulo formado con el mecano simulado en función de los lados.



Actividad 2: Mecano simulado en función de los ángulos del triángulo

El objetivo de la segunda actividad es deducir la propiedad que deben cumplir la suma de las amplitudes de los tres ángulos interiores de un triángulo. El estudiante dispone de un mecano simulado que le permite variar la medida de los ángulos interiores del triángulo a partir de los deslizadores. De esta forma, se obtendrán algunas representaciones en las que se puede visualizar que no es posible su construcción cuando la suma de sus ángulos interiores es mayor a 180° (ver Imagen 3).

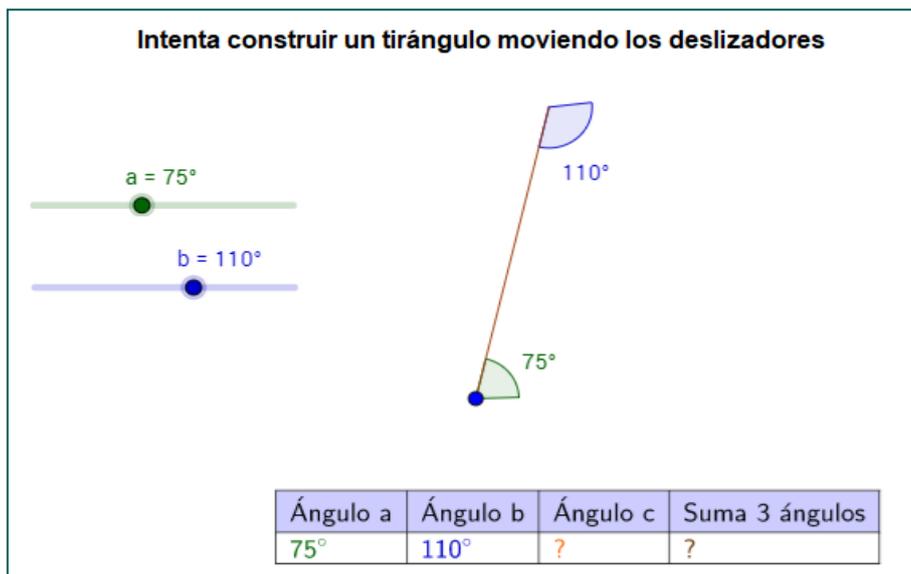


Imagen 3. Imposibilidad de construir un triángulo.

Por lo tanto, tendrán que continuar modificando las medidas de los ángulos hasta que se forme un triángulo e ir anotando los valores de la suma para que puedan observar cómo son estos resultados en todas las representaciones que obtienen (ver Imagen 4).

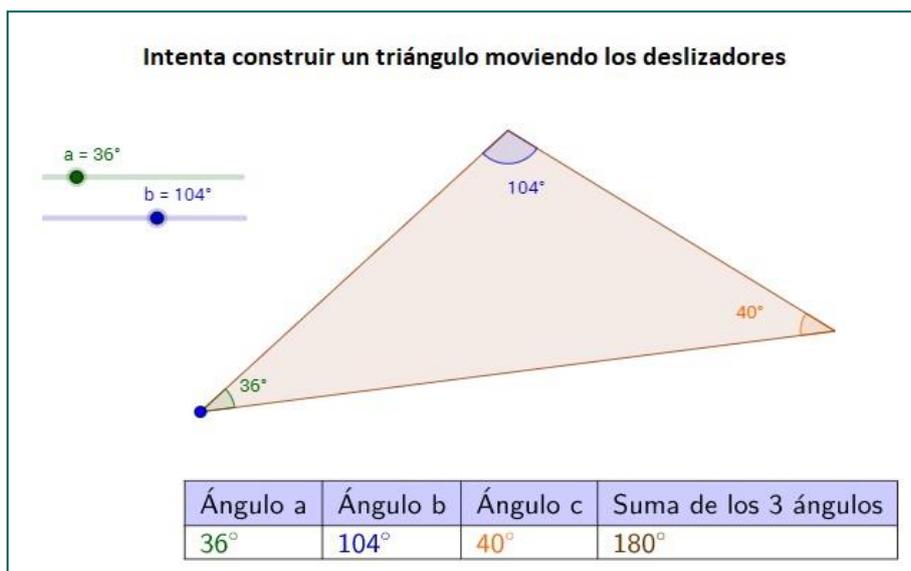


Imagen 4. Triángulo formado con el mecano simulado en función de los ángulos

Actividad 3: Identificación de los elementos de un triángulo.

A continuación, se propone una actividad en la que se tienen que identificar los elementos básicos de un triángulo a partir de su manipulación y transformación (ver Imagen 5). El estudiante tendrá que construir diferentes triángulos deformando el de partida mediante el arrastre de sus vértices. Seguidamente, el docente sugerirá que giren el triángulo para observar la relación entre las bases y los lados, de forma que las distintas representaciones que han obtenido les sirvan de apoyo para responder a las cuestiones planteadas. Por último, se les sugerirá que den una definición de triángulo, para identificar cómo construyen dicha definición. Esta actividad contribuye a detectar algún error de aprendizaje sobre los elementos básicos de un triángulo que se haya adquirido en cursos anteriores, y analizar si con la exploración de las anteriores actividades pueden construir una definición correcta de triángulo.



Imagen 5. Identificación de los elementos básicos de un triángulo.

Actividades 4 y 5: Exploración de triángulos diferentes.

Las siguientes dos actividades están diseñadas para que el estudiante, a través de una exploración guiada e inducida por el docente, pueda intuir las clasificaciones de los triángulos. Inicialmente, el estudiante tiene que intentar construir todos los triángulos posibles a partir de uno dado, moviendo los deslizadores que modifican la longitud de sus lados (ver Imagen 6) y la amplitud de sus ángulos (ver Imagen 7). La gran variedad de triángulos que se generan, cada uno con características diferentes en relación a sus lados y ángulos, han de ser clasificados por el estudiante a partir de las indicaciones dadas por el docente, tales como ¿en qué se diferencian todos los triángulos que puedes construir o en qué se parecen? ¿Son todos sus lados y ángulos iguales? De este modo van descubriendo, mediante la exploración dirigida de los triángulos, aquellas propiedades que definen cada tipo de triángulo.

En concreto, cuando se explora la clasificación según sus lados (ver Imagen 6), el estudiante tendrá que ir comprobando si todos los lados del triángulo pueden ser iguales o desiguales. En el caso en el que obtenga un triángulo en el que dos de los lados sean iguales, habrá que dar respuesta a cómo



son los triángulos que se pueden obtener modificando la longitud del tercer lado. Si por el contrario se tienen tres lados iguales, tendrá que ver qué sucede.

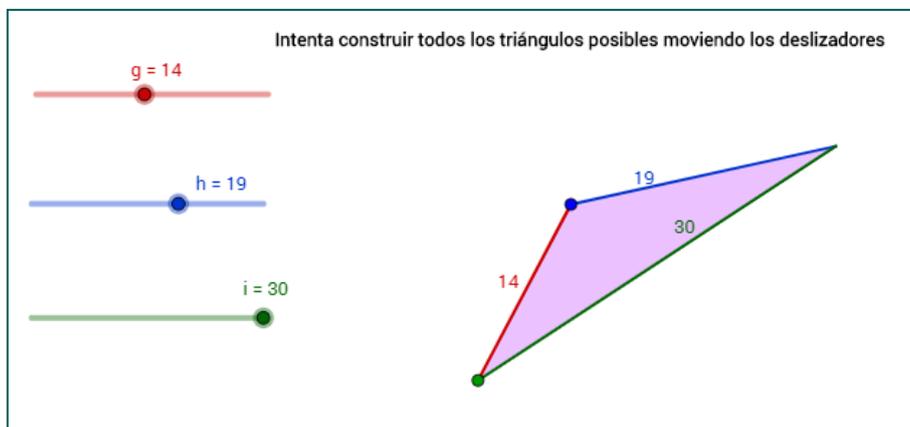


Imagen 6. Clasificación dirigida en función de los lados de un triángulo.

En la clasificación dirigida en función de los ángulos de un triángulo (ver Imagen 7) se procede de forma análoga. Para comenzar, se debe ver cómo son los ángulos de todos los triángulos diferentes que se pueden construir, es decir, observar si todos pueden ser iguales o desiguales y de qué tipo. Se prosigue fijando un ángulo del triángulo y tratando de ver cómo tienen que ser los otros dos. De igual modo, se puede ver qué sucede con el tercer ángulo cuando se tienen dos ángulos iguales. Después, el estudiante tiene que responder si sería posible construir un triángulo con dos ángulos obtusos, o dos rectos, o que todos sean agudos, etc. Con este tipo de preguntas tendrá que comprobar cuántos ángulos agudos tiene como mínimo un triángulo, o cuántos obtusos o rectos, etc.

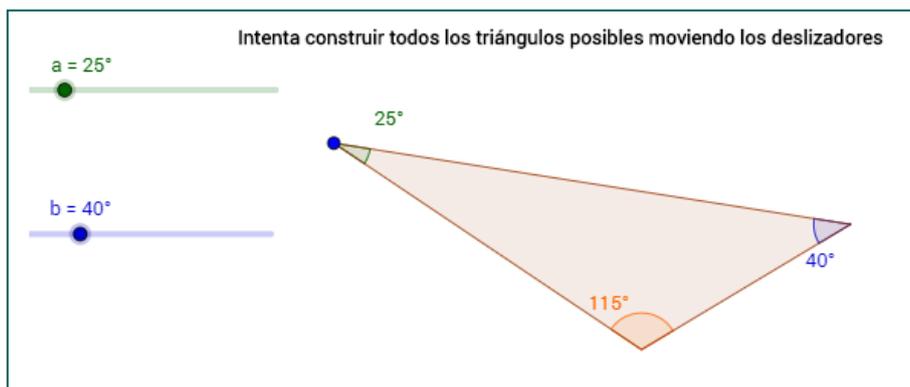


Imagen 7. Clasificación dirigida en función de los ángulos de un triángulo.

Actividad 6: clasificación de triángulos dados

Tras haber trabajado las distintas clasificaciones, en esta última actividad los estudiantes tienen que clasificar las distintas representaciones de triángulos que se les presentan (ver Imagen 8). Para comenzar, se debe escoger el nombre de un tipo de triángulo según una clasificación seleccionada y después indicar la letra que se corresponde con el triángulo que se supone dentro de esa clasificación. Se mostrará en verde cuando sea acertada la clasificación dada y en rojo, en caso contrario. Además, se facilita la utilización de las herramientas de ángulo y distancia del GeoGebra para ayudar a

identificar las características que determinan cada una de las clasificaciones. Finalmente, tras comprobar si la clasificación que se ha asociado a cada triángulo es acertada, habrá que ver si existe alguna más correcta.

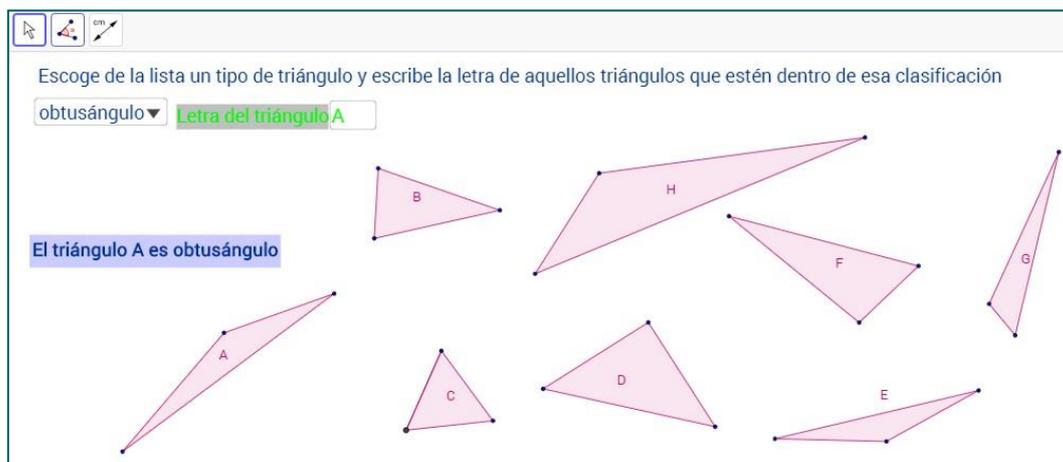


Imagen 8. Clasificación de los triángulos dados.

5. Análisis de la experimentación de la secuencia didáctica en un aula

En este apartado se expone un primer análisis de los resultados obtenidos tras la experimentación de la propuesta en un aula. Para ello, se han descrito, interpretado y analizado las producciones de los estudiantes recogidas mediante varios instrumentos que luego se detallarán y de las intervenciones que se produjeron en el diálogo con el investigador, que fueron grabadas en audio y apoyadas por las anotaciones realizadas por un segundo investigador.

La aplicación de la secuencia de actividades se realizó en un aula de 5º curso de Educación Primaria de un CEIP público de A Coruña. El grupo estaba formado por 23 alumnos y alumnas agrupados en mesas de cuatro donde cada uno tenía un ordenador portátil con conexión wifi a internet. Sin embargo, a pesar de ser un centro en el que disponen de medios tecnológicos en el aula, esta intervención supuso su primer contacto con el software GeoGebra, puesto que el libro de texto tiene un papel fundamental en la metodología seguida por el docente del aula.

Entre las dificultades técnicas que se presentaron, y que en ocasiones hicieron cambiar la dinámica del aula, destacamos los problemas de conexión a la red wifi de algunos ordenadores, que ralentizaban el acceso a las actividades de GeoGebra lo que además producía nerviosismo e inquietud en los estudiantes. Se solucionó esto proyectando las actividades desde el ordenador del docente, mientras se cargaban las actividades nuevamente en los ordenadores del alumnado. Como instrumentos utilizados para la recogida de datos, a cada estudiante se le envió por correo electrónico una ficha con los enunciados de las actividades para que incluyesen sus respuestas y las representaciones construidas en GeoGebra, que al término de la sesión nos reenviaron. También se grabó el audio de la sesión y el segundo investigador tomó nota de las aptitudes y comportamientos del alumnado. La profesora del aula estuvo presente durante toda la sesión y su participación se redujo a dar apoyo sobre cuestiones organizativas del grupo-aula pero sin intervenir en el proceso de puesta en práctica de la secuencia didáctica.

Se observa que antes de realizar la **Actividad 1** los estudiantes consideran que siempre es posible formar un triángulo. Una vez manipulado el mecano de dicha actividad, gracias a ver distintas construcciones imposibles de triángulos y a través del diálogo con el investigador, van verbalizando las ideas matemáticas que tienen. Son capaces de dar una idea intuitiva de la propiedad que se debe cumplir, pues alguna de sus respuestas es: “No siempre se puede construir un triángulo, porque los lados o se salen un poco, o son muy cortos”. En la Imagen 9 se pueden ver algunas de las construcciones que realizaron, donde destaca que todos fijaron un lado como base horizontal y fueron modificando los otros dos lados, reproduciendo de este modo una característica visual de los prototipos que han asimilado.

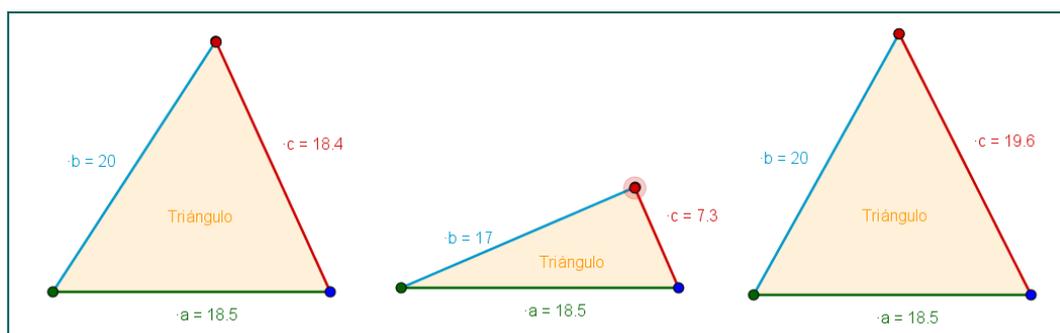


Imagen 9. Ejemplos de triángulos formados con el mecano.

En relación a la **Actividad 2**, se percibe que la mayoría conoce la propiedad que tiene que cumplir la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo. No obstante, es la primera vez que comprueban gráficamente esta condición y justifican la imposibilidad de construcción del triángulo a través de comentarios del tipo: “No hay tres lados y además no suman 180° por eso no puedo dibujarlo”. Conviene recalcar que confunden continuamente los términos lados y ángulos: “Que todos los lados tienen que dar siempre 180 grados”.

En cuanto a la **Actividad 3**, se observa que conocen los elementos básicos de un triángulo, pero surgen dificultades cuando tienen que definirlos. Por ejemplo, afirman que el vértice es “la punta del triángulo” o “la unión entre dos lados” y no son capaces de dar una definición para ángulo. Más dificultades tienen para determinar el número de bases que hay en un triángulo, dado que definen la base como “la parte donde se apoya cualquier figura” y consideran que solo hay una y que es excluyente del lado pues “la parte de debajo de un triángulo no puede ser lado sino base”. No es hasta que manipulan y giran el triángulo, cuando comprueban que existen tres bases y que puede ser cualquier lado. Se percibe también que, a pesar de que se puede deformar el triángulo inicial, la totalidad de estudiantes, representó uno con base horizontal, de tamaño apreciable, simétrico y aparentemente equilátero como se observa en la Imagen 10.

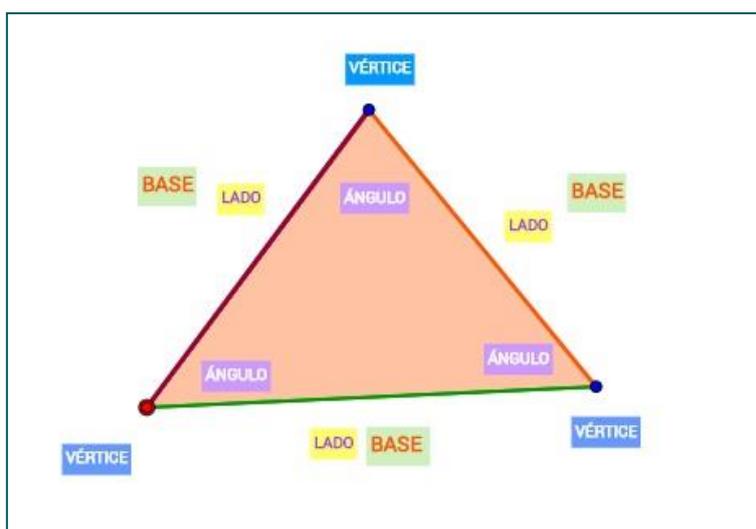


Imagen 10. Ejemplo de identificación de los elementos de un triángulo.

Examinando las definiciones que dieron del triángulo después de haber identificado sus elementos básicos, consideran que con tener tres lados ya es suficiente y no hacen referencia a la propiedad descubierta en la Actividad 1. A esto, tras las cuestiones orientativas que les va sugiriendo el investigador, añaden que “*los ángulos tienen que medir 180°*”. A continuación el investigador, después de dibujar una línea poligonal abierta en GeoGebra, formula la pregunta de si es suficiente para que sea un triángulo. Los estudiantes son capaces de discriminar cuándo se trata de un triángulo o no y sostienen que tiene que ser una línea poligonal cerrada cuyos ángulos sumen 180° . Se observa que siguen haciendo alusión a esta propiedad y que la están considerando como parte de la definición de triángulo. Asimismo, otro estudiante reflexiona en voz alta y sugiere que al tener tres lados tendrá tres vértices, de manera que aportan nuevamente información innecesaria. Finalmente, el investigador sirviéndose de GeoGebra, realiza la construcción de un polígono cerrado de tres lados y es entonces cuando los estudiantes son capaces de dar una definición correcta. Se presenta a continuación parte de la transcripción del diálogo mantenido en el aula:

INVESTIGADOR (I): Sabiendo los elementos del triángulo, ¿podrías definir lo que es un triángulo? ¿Podrías decir cuando una figura es un triángulo y cuando no?

ESTUDIANTE (E): Cuando tiene tres lados.

I: Si una figura tiene tres lados, ¿siempre es un triángulo?

E: No, una figura que tiene tres lados y mida de ángulos 180 grados.

El Investigador dibuja una poligonal abierta en GeoGebra.

I: Entonces para que sea un triángulo, ¿cómo tiene que ser la poligonal?

E: No es un polígono, porque no se cierra. Tiene que ser cerrado, que los ángulos midan 180 grados. Y si tiene tres lados tiene que tener tres vértices.

Durante la realización de las **Actividades 4 y 5** de exploración sobre las distintas clasificaciones de los triángulos, se observa, ante las respuestas a la cuestión que se les formula en la ficha de cómo diferencian los distintos triángulos, que son conscientes de que, a pesar de existir infinidad de construcciones posibles, se distinguen características comunes entre ellas. Más aún, son capaces de enunciar los tipos de triángulos según sus lados aclarando que es “*según el número de lados, no de ángulos*” por lo que no intuyen que a igualdad de lados se tienen ángulos iguales. Entre las



definiciones que dan, destacamos la del acutángulo como aquel que “tiene un ángulo agudo” o la del rectángulo como el triángulo que “tiene por lo menos un ángulo recto”. Estas afirmaciones muestran que no deducen que todo triángulo tiene al menos dos ángulos agudos y en función de cómo sea el tercero, pueden clasificarlo. Otra definición a destacar es la que dan del triángulo isósceles como “el que tiene dos lados iguales y el otro diferente”, y por consiguiente, no estarían considerando el triángulo equilátero como caso particular del triángulo isósceles.

La actividad donde se ha detectado mayor número de dificultades es la **Actividad 6**. Pues si bien conocen las distintas clasificaciones por haberlas trabajado en cursos anteriores, y dado que son capaces de numerarlas, no intuyen la relación existente entre ellas y suelen dar una sola clasificación y no siempre en función de sus lados o ángulos, sino que las intercambian indistintamente. Así, en la respuesta 2 de la Imagen 11, los triángulos E y G se consideran únicamente como obtusángulos mientras que el A y F también como escalenos, siendo todos del mismo tipo. Asimismo, se puede ver en la respuesta 1 que clasifican erróneamente como acutángulos los triángulos A, D, E y G. Otra situación a destacar es la clasificación que dan para los triángulos D, E y G en la respuesta 1, ambas en función de sus ángulos y, por tanto, incoherentes entre sí.

Clasifica los triángulos según sus lados y sus ángulos. Si es necesario, utiliza las herramientas que se indican.

Anota tu respuesta:

Triángulo	Respuesta 1	Respuesta 2
A	Escaleno Acutángulo	Escaleno Obtusángulo
B	Isósceles Acutángulo	Isósceles
C	Equilátero Acutángulo	Equilátero Acutángulo
D	Rectángulo Acutángulo	Rectángulo Isósceles
E	Obtusángulo Acutángulo	Obtusángulo
F	Escaleno Obtusángulo	Obtusángulo Escaleno
G	Obtusángulo Acutángulo	Obtusángulo

Respuesta correcta:

A	B	C	D	E	F	G
Escaleno	Isósceles	Equilátero	Isósceles	Escaleno	Escaleno	Escaleno
Obtusángulo	Acutángulo	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo	Obtusángulo	Obtusángulo

Imagen 11. Ejemplos de respuestas sobre la actividad 6.

6. Conclusiones

En relación al objetivo principal del trabajo “diseñar una propuesta didáctica para mejorar la imagen conceptual de triángulo en el alumnado de Educación Primaria”, se puede afirmar, que en general, ha ayudado a detectar dificultades en el aprendizaje de este concepto geométrico y a conocer el prototipo de triángulo que tienen asimilado desde los cursos iniciales de su etapa escolar. En este sentido, cabe destacar que en el momento en que realizamos la aplicación de la propuesta en el aula ya se habían trabajado los polígonos y sus áreas. Precisamente, teniendo en cuenta los análisis efectuados en cada actividad, se puede observar que construyen y reproducen las representaciones estereotipadas que aparecen frecuentemente en los libros de texto y que la imagen conceptual del triángulo que mayoritariamente han asimilado es la de acutángulo, apoyado sobre una base horizontal, con eje de simetría vertical y de tamaño apreciable.

También se ha podido percibir que tienen muy interiorizada la propiedad que deben cumplir los ángulos de un triángulo y que saben identificar los distintos elementos de un triángulo, pero no conocen bien la definición de cada uno de ellos. Asimismo, se ha podido comprobar que, aunque inicialmente tenían la idea de que la base no era un lado del triángulo y que sólo había una base en cada triángulo, la exploración con las actividades les ofreció la oportunidad de comprobar su error y corregirlo.

En referencia a las clasificaciones de los triángulos, no intuyen la relación existente entre ellas y suelen dar una sola clasificación, bien en función de los lados o de los ángulos, aunque los resultados son mejores en la clasificación según los lados. Además, no son capaces de asimilar que a igualdad de lados también se da la igualdad de ángulos y que no es suficiente con tener un ángulo agudo para que un triángulo sea acutángulo. Se detectó que, en muchas actividades en las que querían obtener un triángulo equilátero o isósceles, aun teniendo que modificar la longitud de más lados que cuando querían conseguir otro tipo de triángulo, no fueron conscientes de que este tipo de ejemplos tan particulares de construir (dado que presentan una mayor dificultad en su construcción) son los más escasos, es decir, en el conjunto de triángulos posibles que se puedan obtener, hay un menor número de posibilidades de construir triángulos equiláteros o isósceles que escalenos.

Estos resultados concuerdan con lo recogido por Scaglia y Moriena (2005), Arnal-Bailera y Guerrero (2016) y Bernabeu y Llinares (2017) sobre el prototipo de triángulo que tienen los estudiantes en los primeros años escolares, que puede ser debido al tipo de dibujo que el docente realiza en la pizarra (dado que es más sencillo dibujar un triángulo con base horizontal) o de las representaciones gráficas estereotipadas que suelen aparecer en los libros de texto (triángulos equiláteros o isósceles). En relación a cómo realizan la clasificación de triángulos, se obtienen resultados similares a los expresados por Bernabeu y Llinares (2017), pero a través de los triángulos que pudieron manipular en las actividades descritas tuvieron la oportunidad de discutir sobre ellos y confirmar que un mismo triángulo puede clasificarse de dos formas distintas.

Se comprobó también que, aun pudiendo realizar las numerosas construcciones de triángulos que posibilita GeoGebra, recurren a los escasos ejemplos que tienen profundamente interiorizados y que, casi en su totalidad, se trata de ejemplos estereotipados. Pero al menos han experimentado a través de las actividades que muchos de los atributos que estereotipan el concepto de triángulo y que aparecen en la literatura, no son determinantes para construir la figura, pues han visto, entre otras cuestiones, que la base de un triángulo no tiene que ser un lado horizontal, es decir que la posición particular de la figura es irrelevante desde el punto de vista geométrico.

Según lo expuesto, se puede afirmar que la propuesta mejora la imagen conceptual de triángulo en el alumnado de Educación Primaria, así como también ayuda a detectar las dificultades sobre el concepto de triángulo que tienen los estudiantes y a superar obstáculos de aprendizaje como la interiorización de ciertas características estereotipadas ocasionadas por la escasa variedad en la presentación de ejemplos. Posiblemente habría que trabajar todo esto desde los cursos iniciales, para favorecer la correcta adquisición de este concepto dado que la secuencia didáctica facilita el estudio de los triángulos de una forma dinámica e intuitiva, permitiendo la visualización de una gran variedad de triángulos en todas sus formas posibles.

En particular, valoramos positivamente el uso de GeoGebra para enriquecer la imagen conceptual del triángulo al suponer un entorno en el que es posible la exploración de las propiedades geométricas y las relaciones entre las distintas figuras, así como también la generalización y comprobación de propiedades. Condiciones todas ellas que el uso de algún software geométrico dinámico posibilita y que son esenciales para la elaboración de prototipos basados en características conceptuales relevantes, como ya destacaban Scaglia y Moriena (2005). Sin embargo, aunque se



favorece una mejora en la imagen conceptual, es evidente lo interiorizadas y arraigadas que tienen las características estereotipadas de los triángulos y que reproducen en la mayoría de las representaciones que realizan con GeoGebra. Teniendo esto presente, sería necesario implementar la secuencia didáctica en el momento de introducción del concepto geométrico, para favorecer una presentación mayor de ejemplos que permitan discriminar aquellas propiedades que sean relevantes para la figura y de esta manera, crear una imagen conceptual completa. Por ello, se considera necesario el uso del software de geometría dinámica de una forma continuada y no como algo puntual, como fue la experimentación aquí recogida y también la correspondiente formación del profesorado en estos recursos como señalaban también Ruíz (2012), Mariotti (2013), Pereira da Costa y Câmara dos Santos (2016).

Finalmente, dado que no se necesita ningún conocimiento técnico específico para el manejo de estas actividades y una vez analizada y compartida esta propuesta con docentes en ejercicio en distintos foros, jornadas, etc. y habiendo sido experimentada en un aula, se ha percibido la falta de recursos disponibles con este tipo de software para la etapa educativa de Educación Primaria. Además, como en cada una de las actividades se sugieren ciertas preguntas guiadas que intentan alcanzar el objetivo propuesto en cada una de ellas, se facilitan así recursos para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría al profesorado de Educación Primaria en ejercicio y al mismo tiempo se fomenta el uso de GeoGebra en esta etapa educativa.

Bibliografía

- Arnal-Bailera, A., Guerrero (2016). Construyendo una idea no estereotipada de triángulo con GeoGebra en Primero de Primaria. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 5 (1), 39-51.
- Arnal-Bailera, A., Guerrero, B. (2015). Construyendo la idea de cuadrado: Un ejemplo de la integración de GeoGebra en el currículo de 1º de primaria. *Revista electrónica de investigación y Docencia Creativa, ReiDoCrea*, 4, 129-135.
- Arnal-Bailera, A., Lancis, A. (2016). Análisis de progresos y dificultades en tareas de identificación del rombo en Educación primaria con GeoGebra. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas* 92, 105-116.
- Barbosa, S.M. (2013). O software Geogebra e as possibilidades do trabalho com animação. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 2(1), 22-32.
- Barrantes, M., Zapata, M.A. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto*, 27 (1), 55-71.
- Bernabeu, M., Llinares, S. (2017). Comprensión de las figuras geométricas en niños de 6-9 años. *Educación Matemática*, 29 (2), 9-35.
- Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Montes, M.A., Escudero, D.I., Flores, E.(coords.) (2016). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros de Educación Primaria*. Madrid: Ediciones Paraninfo, S.A.
- Cataneo, V.I. (2012). O uso do software GeoGebra como ferramenta de ensino e aprendizagem da matemática. *Revista Electrónica de Investigación y Docencia (REID)*, 7, 57-71.
- Contreras, L.C., Blanco, L.J. (2001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. *En-Clave Pedagógica*, 3, 211-220. Recuperado el 18 de octubre de 2017, de <http://www.uhu.es/publicaciones/ojs/index.php/xxi/article/view/599>
- Gutiérrez, A., Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En Giménez, J., Llinares, S., Sánchez, M.V. (eds) *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, 143-170. Comares: Granada.
- Gutiérrez, A., Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 32, 55-70.

- Lopes de Araújo, L.C., Costa, J.C. (2010). *Aprendendo Matemática com o GeoGebra*. Brasil: Editora Exato.
- Miguel, N. (2016). Los primeros pasos en geometría dinámica. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 71, 33-38.
- NCTM (2003). Principios y Estándares para la educación matemática. Sevilla: S.A.E.M-Thales.
- Ortega, T., Pecharomán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7 95-117.
- Pereira da Costa, A., Câmara dos Santos, M. (2016). Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do ensino fundamental. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 5 (2) 3-17.
- Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado. Madrid. 1 de marzo de 2014, núm. 52, pp. 19349-19420.
- Ruiz, N. (2012). Resolución de problemas geométricos con GeoGebra en la formación de profesorado de educación primaria: un estudio de casos. 1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra, ISSN 2237-9657, pp. 51-64.
- Scaglia, S., Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, 17 (3), 105-120.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Londres: Academic Press.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. En Tall, D. (ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81. Klumer Academic Publisher: Londres.
- Vinner, S., Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 83 (1), 20-25.

M^a Elena Segade Pampín. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidade da Coruña.
Email: elena.segade.pampin@udc.es

M^a Cristina Naya Riveiro. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidade da Coruña.
Email: cristina.naya@udc.es

