NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 98, julio de 2018, páginas 179-202

Estrategia: Organizar la Información con investigación sistemática
(Problemas Comentados XLIX)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Metodología para la resolución de problemas que se basa en la organización de la información, normalmente en cuadros de doble entrada, y en la investigación sistemática y ordenada de los datos buscando patrones que lleven a la solución de las cuestiones planteadas. Además, se proponen generalizaciones de las expresiones obtenidas. Exponemos los enunciados de los problemas que han tenido que resolver los alumnos que se han presentado a los Torneos 2018 de Primaria y Secundaria. Sus soluciones serán comentadas en un próximo artículo.

Palabras clave Metodología resolución de problemas basada en organización, investigación sistemática de datos. Generalización de las soluciones obtenidas. Ejercicios propuestos en los Torneos 2018 de Primaria y Secundaria de la S. C. "Isaac Newton" de P. de M.

Abstract Methodology for the resolution of problems that is based on the organization of the information, normally in double-entry tables, and in the systematic and orderly investigation of the data looking for patterns that lead to the solution of the questions raised. In addition, generalizations of the expressions obtained are proposed. We expose the statements of the problems that have had to solve the students who have been presented to the 2018 Primary and Secondary Tournaments. Your solutions will be discussed in a future article.

Keywords Methodology problem solving based on organization, systematic data research. Generalization of the obtained solutions. Exercises proposed in the 2018 Primary and Secondary Tournaments of the S.C. "Isaac Newton" of P. de M.

Como siempre, un saludo cariñoso a nuestros amables lectores. Vamos primero con las respuestas a los problemas presentados para que nuestros lectores se entretuvieran durante este tiempo entre revistas.

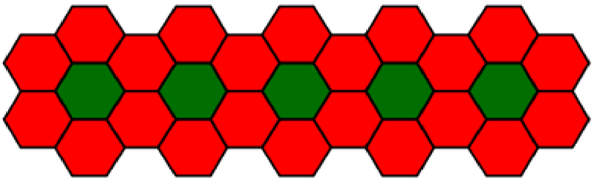
1. Los retos

Utilizando las herramientas y técnicas anteriormente explicadas resuelvan los siguientes problemas. Y, en cada uno de ellos, generalice lo más posible o, al menos, realice los comentarios más oportunos que se les ocurran al respecto.

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

Jardineras

En nuestro Ayuntamiento están estudiando nuevos diseños para adornar con jardineras y baldosas algunas calles peatonales. Para ello cuentan con jardineras hexagonales que colocan rodeadas de baldosas, también de forma hexagonal, formando bonitos mosaicos, similares al de la figura:



Necesitan disponer de una fórmula que les permita calcular el número de baldosas necesarias para rodear un determinado número de jardineras, según el diseño que elijan. ¿Puedes ayudarles a encontrarla?

Proceso de resolución:

Fase I. Comprender

Datos: Jardineras hexagonales y 6 baldosas hexagonales alrededor de cada una.

Objetivo: Averiguar una fórmula que permita calcular el número de baldosas necesarias para rodear un determinado número de jardineras.

Relación: Hay una repetición de las baldosas alrededor de las jardineras.

Diagrama: Tabla de búsqueda de patrones.

Fase II. Pensar

Estrategias

- BUSCAR PATRONES
- ORGANIZAR LA INFORMACIÓN
- GENERALIZAR

Fase III. Ejecutar

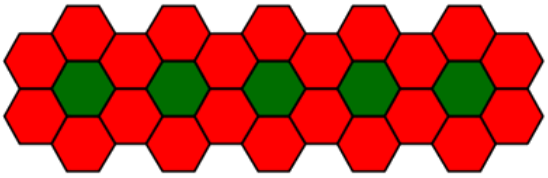
Utilizaremos una tabla.

Jardineras	1	2	3	4	5	…	12	…
Baldosas								
PATRÓN								

La primera jardinera, de manera evidente, lleva alrededor seis baldosas.

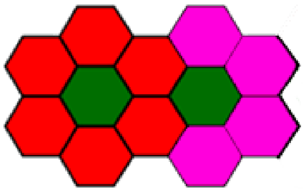
Jardineras	1	2	3	4	5	…	12	…
Baldosas	6							
PATRÓN								

Y contando sobre la ilustración del problema podemos llegar a rellenar la tabla hasta la quinta jardinera.



Jardineras	1	2	3	4	5	…	12	…
Baldosas	6	10	14	18	22			
PATRÓN								

Debemos encontrar el patrón de crecimiento para calcular las baldosas necesarias para cualquier cantidad de jardineras; por ejemplo, para 12.



Observamos que la segunda jardinera necesita 4 baldosas más para ser rodeada completamente. Utiliza en común con la anterior 2 baldosas.

También observamos que la sucesión de números de la fila de las baldosas es: 6, 10, 14, 18, 22. Van de 4 en 4 a partir de la primera.

Jardineras	1	2	3	4	5	…	12	…
Baldosas	6	10	14	18	22			
PATRÓN	6	6 + 4	10 + 4	14 + 4	18 + 4			

Aritméticamente, sólo tendríamos que seguir añadiendo 4 a cada término para llegar a saber la cantidad de baldosas necesarias para rodear las 12 jardineras.

…	6	7	8	9	10	11	12
…	26	30	34	38	42	46	50

Pero esta manera de proceder por recurrencia es engorrosa si el número de jardineras es grande. Por eso interesa encontrar una manera de proceder directamente a partir del número N de jardineras presentes. Se trata de encontrar una generalización que nos dé una fórmula en función de N.

Para ello podemos considerar que al aplicar el patrón a la primera jardinera es necesario contar inicialmente con dos baldosas, las que la primera jardinera no comparte con nadie.

Por tanto, la expresión del número de baldosas B es el siguiente: $B = 2 + 4\,N$.

Comprobamos para $N = 3 \longrightarrow B = 2 + 4 \times 3 = 2 + 12 = 14$

Comprobamos para $N = 12 \longrightarrow B = 2 + 4 \times 12 = 2 + 48 = 50$

Podríamos haber encontrado esta expresión general a partir de las diferencias sucesivas que se obtienen iguales en la primera realización.

Por ello sabemos que la expresión del término general de la sucesión es $y = a\,x + b$.

P R O B L E M A S

Aplicando la expresión a dos casos particulares cualesquiera tenemos:

Para x = 7, y = 30 ⟶ 30 = 7 a + b

Para x = 4, y = 18 ⟶ 18 = 4 a + b

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos:

30 – 18 = 7 a – 4 a ⟶ 12 = 3 a ⟶ a = 12 / 3 = 4

30 = 7 x 4 + b ⟶ 30 = 28 + b ⟶ b = 30 – 28 = 2

De donde obtenemos nuevamente la expresión y = 4 x + 2, donde y es el número de baldosas (B) y x es el número de jardineras (N).

Solución Baldosas = 2 + 4 Jardineras

Fase IV. Responder

Comprobación

Puede verificarse aún un caso más, para 8 jardineras: Baldosas = 2 + 8 x 4 = 2 + 32 = 34

Análisis

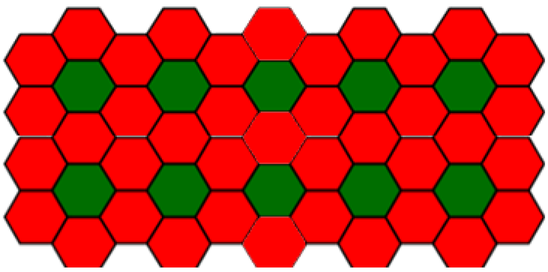
Solución única.

Respuesta:

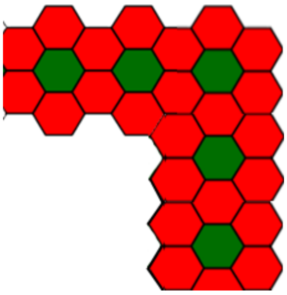
La fórmula que permite calcular el número de baldosas necesarias para rodear un determinado número de jardineras es B = 2 + 4 N, donde B representa el número de baldosas y N el número de jardineras.

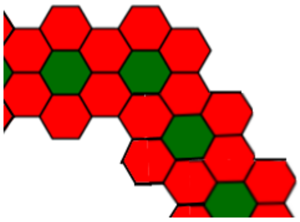
Ampliación del problema:

Podemos intentar generalizarlo para una figura poligonal o cubrir una superficie:



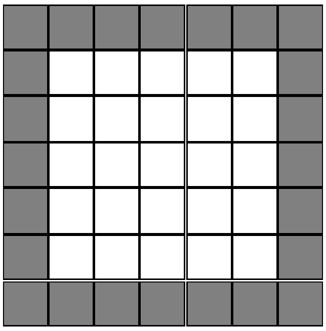
Formando un cuadrado, un hexágono, un rectángulo (con qué razón entre sus lados), etc.





Vemos que cuando el ángulo de la figura a formar es de 90º, se comparte solamente una baldosa, pero que si forma 60º comparten dos baldosas, lo que lleva a un análisis de los ángulos de un hexágono, por ejemplo.

Las alfombras



El señor Tapete comercializa un nuevo modelo de alfombras cuadradas compuestas de pequeños cuadrados idénticos: grises en el borde y blancos en el interior. Aquí está un dibujo de este modelo de alfombra, con siete cuadrados en cada lado.

La alfombra más pequeña tiene tres cuadrados en cada lado. Las alfombras de este modelo están disponibles con un máximo de veinte cuadrados en cada lado.

El Sr. Ronay quiere comprar un modelo que tenga exactamente tantos cuadrados grises como blancos.

La Sra. Gratin quiere comprar una alfombra un poco más clara, con más de dos tercios de ella de cuadrados blancos, pero al mismo tiempo con menos de tres cuartas partes de cuadrados blancos.

¿Se puede complacer a la Sra. Gratin? ¿Y al Sr. Ronay?

Si es así, por favor indique la (o las) alfombras que podrían contentar a cada uno de los dos clientes.

Explique sus respuestas.

Proceso de resolución:

Fase I. Comprender

<u>Datos</u>

- Un modelo de alfombra cuadrada compuesta de pequeños cuadrados idénticos: grises en el borde y blancos en el interior.
- Conocemos un modelo de alfombra, con siete cuadrados en cada lado.
- La alfombra más pequeña tiene tres cuadrados en cada lado.
- La alfombra más grande tiene veinte cuadrados en cada lado.
- El Sr. Ronay y la Sra. Gratin quieren comprar una alfombra cada uno.

<u>Objetivo</u>

- Cómo complacer a la Sra. Gratin, si es posible.

- Cómo complacer al Sr. Ronay, si es posible.
- Indicar la alfombra de cada uno.

Relación

- El Sr. Ronay quiere comprar un modelo que tenga exactamente tantos cuadrados grises como blancos.
- La Sra. Gratin quiere comprar una alfombra un poco más clara, con más de dos tercios de ella de cuadrados blancos, pero al mismo tiempo con menos de tres cuartas partes de cuadrados blancos.

Diagrama

- El que ilustra el problema.
- Una tabla de búsqueda de patrones.

Fase II. Pensar

Estrategia

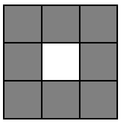
- BUSCAR PATRONES
- GENERALIZAR

Fase III. Ejecutar

Empezaremos diseñando una tabla que recoja la información del problema y nos permita, luego, buscar patrones de la serie de alfombras.

Alfombra	Cuadros grises	Cuadros blancos	Parte gris	Parte blanca

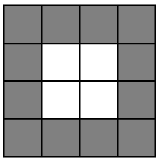
Ahora llenaremos los datos conocidos.



La alfombra más pequeña es de 3 x 3.

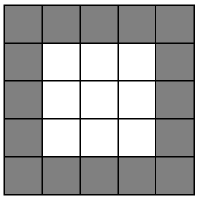
Alfombra	Cuadros grises	Cuadros blancos	Parte gris	Parte blanca
3 x 3	**8**	**1**		
4 x 4				
5 x 5				
6 x 6				
7 x 7				

La siguiente es de 4 x 4.



Alfombra	Cuadros grises	Cuadros blancos	Parte gris	Parte blanca
3 x 3	**8**	**1**		
4 x 4	**12**	**4**		
5 x 5				
6 x 6				
7 x 7				

La siguiente es de 5 x 5.



Alfombra	Cuadros grises	Cuadros blancos	Parte gris	Parte blanca
3 x 3	**8**	**1 x 1 = 1**		
4 x 4	**12**	**2 x 2 = 4**		
5 x 5	**16**	**3 x 3 = 9**		
6 x 6				
7 x 7				

Conocemos la de 7 x 7 ya que viene dibujada en el problema. La de 6 x 6 podemos utilizarla para comprobar el patrón una vez encontrado.

Alfombra	Cuadros grises	Cuadros blancos	Parte gris	Parte blanca
3 x 3	**8**	**1 x 1 = 1**		
4 x 4	**12**	**2 x 2 = 4**		
5 x 5	**16**	**3 x 3 = 9**		
6 x 6				
7 x 7	**24**	**5 x 5 = 25**		

El patrón de los cuadros blancos es sencillo de averiguar, constituyen siempre un cuadrado interior de 2 unidades menos de lado, tomando el cuadrito como unidad.

El patrón de los cuadros grises se puede considerar de dos maneras:

1º) como resta entre el total de cuadros y los cuadros blancos

Para 6 x 6 ⟶ 36 cuadros ⟶ 4 x 4 = 16 blancos ⟶ 36 – 16 = 20 negros

2º) como término de una sucesión aritmética de primer término igual a 8 y diferencia 4

8 ⟶ 12 ⟶ 16 ⟶ ¿? ⟶ 24

Para 6 x 6: 20 cuadros negros

Alfombra	Cuadros grises	Cuadros blancos	Parte gris	Parte blanca
3 x 3	**8**	**1 x 1 = 1**		
4 x 4	**12**	**2 x 2 = 4**		
5 x 5	**16**	**3 x 3 = 9**		
6 x 6	**16 + 4 = 20**	**4 x 4 = 16**		
7 x 7	**24**	**5 x 5 = 25**		

Podemos ahora estudiar y calcular las proporciones de cuadros grises y negros con respecto al total de cuadros de cada figura.

Alfombra	Cuadros grises	Cuadros blancos	Parte gris	Parte blanca
3 x 3	**8**	**1 x 1 = 1**	8 / 9 (88,8%)	1 / 9 (11,1%)
4 x 4	**12**	**2 x 2 = 4**	12 / 16 (75%)	4 / 16 (25%)
5 x 5	**16**	**3 x 3 = 9**	16 / 25 (64%)	9 / 25 (36%)
6 x 6	**16 + 4 = 20**	**4 x 4 = 16**	20 / 36 (55,5%)	16 / 36 (44,4%)
7 x 7	**24**	**5 x 5 = 25**	24 / 49 (48,9%)	25 / 49 (51,1%)

Observamos que la proporción de la parte gris va disminuyendo mientras que la de la parte blanca va aumentando.

Para complacer al Sr. Ronay, la alfombra deberá tener la misma proporción de cuadros grises que de cuadros blancos.

Podemos trabajar de dos maneras.

A) Seguir llenando la tabla (podemos llegar hasta 20 x 20) y verificar si se cumple la condición y con qué alfombra sucede.
B) Establecer las leyes (Generalizar) que rigen los crecimientos de los cuadros grises y blancos y plantear una igualdad entre ellas.

Si continuamos la tabla:

Alfombra	Cuadros grises	Cuadros blancos	Parte gris	Parte blanca
3 x 3	**8**	**1 x 1 = 1**	8 / 9 (88,8%)	1 / 9 (11,1%)
4 x 4	**12**	**2 x 2 = 4**	12 / 16 (75%)	4 / 16 (25%)
5 x 5	**16**	**3 x 3 = 9**	16 / 25 (64%)	9 / 25 (36%)
6 x 6	**16 + 4 = 20**	**4 x 4 = 16**	20 / 36 (55,5%)	16 / 36 (44,4%)
7 x 7	**24**	**5 x 5 = 25**	24 / 49 (48,9%)	25 / 49 (51,1%)
8 x 8	**28**	**6 x 6 = 36**	28 /64 (43,75%)	36 / 64 (56,25%)

Vemos claramente que nunca sucede una igualdad entre cuadros grises y blancos. Entre la alfombra de 6 x 6 y la de 7 x 7 pasamos de una situación (más cuadros grises) a la contraria (más cuadros blancos) sin que haya igualdad en ningún momento.

Por tanto, no se podrá vender una alfombra al Sr. Ronay a su gusto.

Si hubiésemos buscado los términos generales de las dos sucesiones, tendríamos:

Para los cuadros blancos $(n - 2)^2$

Para los cuadros negros $8 + 4\,(n - 3)$

Igualando: $(n - 2)^2 = 8 + 4\,(n - 3)$

Que resuelta: $n^2 - 4n + 4 = 8 + 4n - 12 \longrightarrow n^2 - 8n + 8 = 0 \longrightarrow n = (8 \pm\sqrt{64 - 32}) / 2$

n no es un número entero $\longrightarrow$ no tiene solución en N

Lo cual nos confirma lo indicado anteriormente.

Para complacer a la Sra. Gratinada debe existir una alfombra un poco más clara, con más de dos tercios de ella de cuadrados blancos, pero al mismo tiempo con menos de tres cuartas partes de cuadrados blancos.

Recordemos que 2 / 3 = 66,6% y que 3 / 4 = 75%.

Eso quiere decir que debemos buscar en la tabla una alfombra cuyo porcentaje de cuadros blancos sea MAYOR de 66,6% y MENOR de 75%. Es decir

66,6% < n x n < 75%

Observamos de nuevo la tabla:

Alfombra	Cuadros grises	Cuadros blancos	Parte gris	Parte blanca
3 x 3	**8**	**1 x 1 = 1**	8 / 9 (88,8%)	1 / 9 (11,1%)
4 x 4	**12**	**2 x 2 = 4**	12 / 16 (75%)	4 / 16 (25%)
5 x 5	**16**	**3 x 3 = 9**	16 / 25 (64%)	9 / 25 (36%)
6 x 6	**16 + 4 = 20**	**4 x 4 = 16**	20 / 36 (55,5%)	16 / 36 (44,4%)
7 x 7	**24**	**5 x 5 = 25**	24 / 49 (48,9%)	25 / 49 (51,1%)
8 x 8	**28**	**6 x 6 = 36**	28 /64 (43,75%)	36 / 64 (56,25%)

Y vemos que tenemos que seguir llenándola hasta alcanzar los porcentajes exigidos.

Alfombra	Cuadros grises	Cuadros blancos	Parte gris	Parte blanca
3 x 3	8	1 x 1 = 1	8 / 9 (88,8%)	1 / 9 (11,1%)
4 x 4	12	2 x 2 = 4	12 / 16 (75%)	4 / 16 (25%)
5 x 5	16	3 x 3 = 9	16 / 25 (64%)	9 / 25 (36%)
6 x 6	16 + 4 = 20	4 x 4 = 16	20 / 36 (55,5%)	16 / 36 (44,4%)
7 x 7	24	5 x 5 = 25	24 / 49 (48,9%)	25 / 49 (51,1%)
8 x 8	28	6 x 6 = 36	28 /64 (43,75%)	36 / 64 (56,25%)
9 x 9	32	7 x 7 = 49	32 / 81 (39,5%)	49 / 81 (60,5%)
10 x 10	36	8 x 8 = 64	36 / 100 (36%)	64 / 100 (64%)
11 x 11	40	9 x 9 = 81	40 / 121 (33%)	81 / 121 (66,9%)
12 x 12	44	10 x 10 = 100	44 / 144 (30,5%)	100 / 144 (69,5%)
13 x 13	48	11 x 11 = 121	48 / 169 (28,4%)	121 / 169 (71,6%)
14 x 14	52	12 x 12 = 144	52 / 196 (26,5%)	144 / 196 (73,4%)
15 x 15	56	13 x 13 = 169	56 / 225 (24,9%)	169 / 225 (75,1%)

En este momento podemos parar ya que hemos superado el porcentaje del 75% para los cuadros blancos.

Encontramos cuatro alfombras que satisfacen los deseos de la Sra. Gratin. Será ella quien deberá decidir entre ellas para su compra.

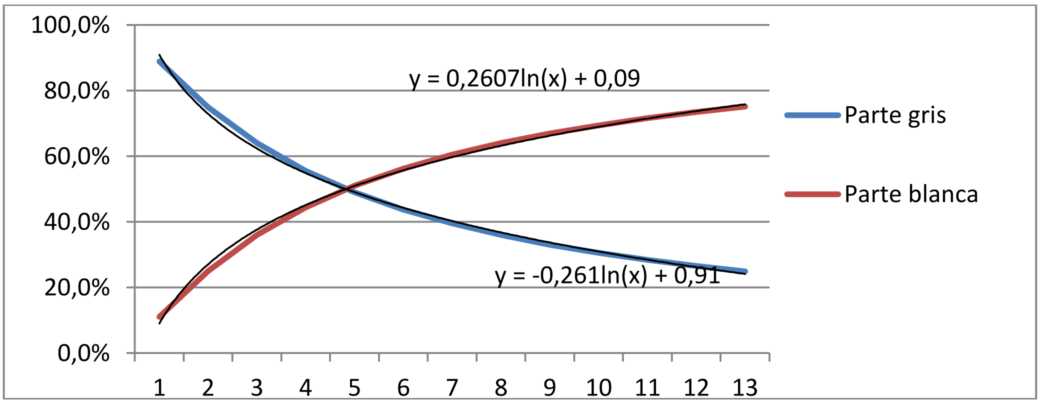
Podríamos llegar a esta conclusión, también, mediante una inecuación.

$2 / 3 < (n - 2)^2 / n^2 < 3 / 4$

Tal vez un poco fuera del alcance de los alumnos de los niveles con los que trabajamos, pero que si pueden con ello sería conveniente que se trabajara.

Es posible trabajar esta inecuación y la ecuación anterior mediante Geogebra, con lo cual la búsqueda de la solución es más sencilla al ser gráfica y, también, más didáctica.

Para niveles superiores: con Excel es posible representar los valores y hallar las líneas de tendencia, siendo la logarítmica la que presenta mejor correlación, como podemos apreciar en la siguiente figura



Solución

- A la Sra. Gratin, sí. Dispone de cuatro modelos posibles.
- Al Sr. Ronay, no. No hay alfombra a su gusto.

Fase IV. Responder

Comprobación

La tabla se puede revisar de nuevo. O bien construir algún modelo de los últimos y hacer el conteo.

Análisis

Varias soluciones en un caso. Ninguna en el otro.

Respuesta

La Sra. Gratin será satisfecha en sus deseos, ya que podrá elegir entre cuatro modelos de alfombra para elegir su compra: la de 11 x 11, la de 12 x 12, la de 13 x 13 y la de 14 x 14.

Al Sr. Ronay no se le puede complacer ya que no existe modelo de alfombra a su gusto. No se fabrica ninguna que tenga la misma cantidad de cuadros grises que de cuadros blancos.

Hemos empleado en muchos de nuestros artículos esta técnica de resolución de problemas, en NÚMEROS, por ejemplo, los enumerados a continuación, publicados en los volúmenes anteriores al 70 y cuyos enunciados comienzan así:

6.- Durante sus horas matinales de playa, cuatro amigos …
9.- De entre los nombres de los primeros números hay dos que contienen …
11.- Tenemos una balanza y cinco pesas, respectivamente de 3, 6, 8, 12 y 16 gramos …
12.- En un número de siete cifras (formado con el 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) …
13.- Un supersticioso tiene 159 monedas …
16.- El Matemago pide al espectador que, con la ayuda de una calculadora …
29.- Tres amigos, de madrugada y en condiciones no muy apropiadas …
31.- Mi madre dice que comiendo rabillos de pasas se aumenta la memoria …
43.- Un vehículo especial se va a adentrar en un tramo desértico …
44.- Dice el profesor: "Os propongo un juego …
53.- Una empresa de venta de coches dispone de siete locales …
59.- Sobre este cubo hay seis números enteros diferentes …
61.- En un edificio de X pisos (2 apartamentos por piso), …
63.- En la viña del señor Negramol, en un día de vendimia …

Con el buscador de la página de números,

http://www.sinewton.org/numeros/index.php?option=com_search&view=search&Itemid=59

es posible que encuentren los problemas; si no, pueden intentarlo con el buscador de Google.

El juego de las torres de Hanoi

Trasladar la torre de la izquierda a la derecha, de pieza en pieza, eso sí, no podrás colocar una pieza grande sobre una menor.
En el juego de las torres de Hanoi se cumple un patrón numérico en relación al menor número de movimientos que se deben realizar para mover la torre, de disco en disco, conforme a las reglas del juego.
Descubre el patrón y determina ¿cuál es el menor número de movimientos que se deben realizar en una torre de Hanoi de 10 discos?

Proceso de resolución

Fase I. Comprender

Datos

- Juego de las torres de Hanoi.
- Tres pivotes y cinco discos de diámetro diferente.

Objetivo

Descubrir el patrón y determinar cuál es el menor número de movimientos que se deben realizar en una torre de Hanoi de 10 discos.

Relación

- Trasladar la torre de la derecha a la izquierda de pieza en pieza.
- No se puede colocar una pieza grande sobre una menor.

Diagrama

- Una tabla de búsqueda de patrones.
- Una tabla para la representación de los movimientos.

Fase II. Pensar

Estrategias

- BUSCAR UN PATRÓN
- MODELIZAR
- ENSAYO Y ERROR
- ORGANIZAR LA INFORMACIÓN
- GENERALIZAR

Fase III. Ejecutar

En el juego de las torres de Hanoi se cumple un patrón numérico en relación al menor número de movimientos que se deben realizar para mover la torre, de disco en disco, conforme a las reglas del juego.

Usaremos una tabla de búsqueda de patrones como ésta:

Nº discos	1	2	3	4	5	…	10	...
Movimientos								
PATRÓN								

Y una tabla secuencial para los movimientos de los discos en los tres pivotes en cada caso:

Mov	Pivote 1	Pivote 2	Pivote 3
1			
2			
3			
4			
5			

Mediante modelización y el ensayo y error podemos trabajar para determinar el número de movimientos necesario para mover la torre de discos en los casos más sencillos.

Cuando tenemos un solo disco, no se necesita más que un movimiento. Para dos discos, tres movimientos.

El juego empieza a ser interesante para tres discos:

Mov	Pivote 1	Pivote 2	Pivote 3
	1 2 3		
1	2 3	1	
2	3	1	2
3	3		1 2
4		3	1 2
5	1	3	2
6	1	2 3	
7		1 2 3	

En siete movimientos se consigue trasladar la torre desde el pivote 1 al pivote 2.

Sentamos todas estas conclusiones en la tabla de búsqueda de patrones:

Nº discos	1	2	3	4	5	…	10	...
Movimientos	1	3	7					
PATRÓN								

Necesitamos, al menos, trabajar con cuatro discos para intentar tener un patrón y verificarlo con cinco discos.

Mov	Pivote 1	Pivote 2	Pivote 3
	1 2 3 4		
1	2 3 4	1	
2	3 4	1	2
3	3 4		1 2
4	4	3	1 2
5	1 4	3	2
6	1 4	2 3	
7	4	1 2 3	
8		1 2 3	4
9		2 3	1 4

10	2	3	1 4
11	1 2	3	4
12	1 2		3 4
13	2	1	3 4
14		1	2 3 4
15			1 2 3 4

En quince movimientos se consigue trasladar la torre desde el pivote 1 al pivote 3.

Nº discos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	**10**	**...**
Movimientos	1	3	7	15				
PATRÓN								

Si observamos con atención esos números podemos ver el patrón de inmediato. Hay que acostumbrar a los chicos a comparar la secuencia que tenemos con otras sucesiones conocidas (los enteros, los pares, los primos, las potencias, etc.)

Nº discos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	**10**	**...**
Movimientos	1	3	7	15				
PATRÓN	1	4 – 1	8 – 1	16 – 1				

Son las potencias de 2 a la que se resta una unidad ($4 = 2^2$; $8 = 2^3$; $16 = 2^4$). Podemos hacer un intento de elaborar el patrón y aplicarlo para cinco discos. Primero buscamos el número de movimientos y luego lo comprobamos por modelización y ensayo y error.

Para cinco discos $2^5 – 1 = 32 – 1 = 31$ movimientos

Mov	**Pivote 1**	**Pivote 2**	**Pivote 3**
	1 2 3 4 5		
1	2 3 4 5	1	
2	3 4 5	1	2
3	3 4 5		1 2
4	4 5	3	1 2
5	1 4 5	3	2
6	1 4 5	2 3	
7	4 5	1 2 3	
8	5	1 2 3	4
9	5	2 3	1 4
10	2 5	3	1 4
11	1 2 5	3	4
12	1 2 5		3 4
13	2 5	1	3 4
14	5	1	2 3 4
15	5		1 2 3 4
16		5	1 2 3 4
17	1	5	2 3 4
18	1	2 5	3 4
19		1 2 5	3 4

20	3	1 2 5	4
21	3	2 5	1 4
22	2 3	5	1 4
23	1 2 3	5	4
24	1 2 3	4 5	
25	2 3	1 4 5	
26	3	1 4 5	2
27	3	4 5	1 2
28		3 4 5	1 2
29	1	3 4 5	2
30	1	2 3 4 5	
31		1 2 3 4 5	

Comprobado el número de movimientos podemos generalizar y encontrar la solución pedida.

Para diez discos $2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$ movimientos

Podríamos, incluso, generalizar el patrón y obtener una fórmula para su aplicación para cualquier número de discos: $\mathbf{2^n-1}$

Solución

1023 movimientos

Fase IV. Responder

Comprobación

La bondad del patrón nos evita tener que comprobar un número tan elevado de movimientos.

Análisis

Solución única.

Respuesta:

El patrón es una potencia de dos de exponente el número de discos, a la que se le resta 1. El menor número de movimientos que se deben realizar en una torre de Hanoi de 10 discos es de 1023.

Siete números

Encontrar siete números que sumados dos a dos den los números del 1 al 16.

Solución.

Esta solución emplea los números naturales 0, 1, 2, 3, 5, 7 y 8 (en el cuadro hemos suprimido las sumas repetidas, para una mejor lectura). Hay cifras que tienen que estar para garantizar algunas de las sumas. Este es el caso del cero y el uno para conseguir el resultado 0 + 1 = **1** y el 1 + 1 da el 2. A partir de ellos necesitamos el **2** para lograr los resultados 3 y 4. Para el 5 podíamos incluir el **3**, (2 + 3) = 5 o el 4, (1 + 4) = 5, pero probando con cada uno de ellos veríamos que con el 4 luego necesitamos ocho números para lograr las dieciséis sumas. Por tanto, añadimos el **5**. Con ello tenemos el 5 = 0 + 5, el 6 **=** 1 + 5, el 7 = 2 + 5 y el 8 = 3 + 5, pero no tenemos un par de cifras que sumadas nos conduzcan al 9 o al 10.

Se hace necesaria una nueva cifra. Probamos con el 6 y llegaríamos hasta el 12, pero sin conseguir el 10: 3 + 6 = 9; 5 + 6 = 11; 6 + 6 =12. Así que mejor intentarlo con el 7: 1 + 7 = 8; 2 + 7 = 9; 3 + 7 = 10 y 5 + 7 = 12, pero nos falla la suma 11. Y faltan 13, 14, 15 y 16.

Al introducir el último de los siete que nos condiciona el enunciado del problema, tendremos que lograr esas sumas que faltan. Probamos con el 8 y obtenemos los resultados que quedaban pendientes:

	1	**2**	**5**	**7**	**8**
0	1	2	5	7	8
1		3	6		9
2		4			10
3					11
7			12	14	15
8			13		16

Pero, tal y como está enunciado el problema, al no limitar las soluciones a los números naturales, ¿es posible encontrar otras soluciones? Lo dejamos a la curiosidad de nuestros lectores y sus alumnos. Pueden explorarse también sumas con tres números, conectarlo con sumas posibles en el lanzamiento de dados, …

Una nueva estrategia: organizar la información mediante una técnica sistemática

Siguiendo la línea comenzada en el número anterior de la revista vamos ahora a introducir una nueva estrategia. Se trata de ORGANIZAR LA INFORMACIÓN mediante la técnica de INVESTIGACIÓN SISTEMÁTICA.

La estrategia de Organizar la Información es muy amplia y, por supuesto, la más importante de las estrategias básicas. Cuando el problema contiene mucha información y está desorganizada es necesario establecer una manera de organizarla mediante una distribución espacial adecuada que indique la estructura de la misma y una técnica de tratamiento de datos basada en los conocimientos matemáticos de los alumnos. Normalmente utilizaremos como diagrama una TABLA que permita disponer los datos de manera sistemática y exhaustiva.

Resolveremos, como es nuestra costumbre, un problema de ejemplo y luego propondremos algunos más para que nuestros lectores apliquen lo explicado.

La estrategia de organizar la información

Organizar la información mediante una representación gráfica o simbólica adecuada.

- HACER UNA FIGURA O UN DIAGRAMA.
- CONSTRUIR TABLAS:
  - Hacer una lista + proceso de eliminación
  - Hacer una tabla: doble entrada, integrama, etc.
- HACER GRÁFICAS.
- CODIFICAR ALGEBRAICAMENTE (ECUACIONES) O NUMÉRICAMENTE LOS DATOS O SITUACIONES DEL PROBLEMA

Pueden utilizarse diferentes diagramas, según el contenido matemático del problema y la cantidad de información disponible.

- **Tabla simple**
- **Tabla de doble entrada**
- **Partes/Todo**

Cada tipo de tabla puede llevar aparejadas una o más técnicas de trabajo matemático.

Esas técnicas son, principalmente:

- Conteo inteligente
- Partes/Todo
- Razonamiento aritmético
- Razonamiento algebraico
- Investigación sistemática
- Razonamiento de proporcionalidad
- Razonamiento geométrico
- Razonamiento estadístico y probabilístico
- Interpretación de gráficas
- Uso de tecnologías (calculadora, hoja de cálculo, Geogebra, …)

Ya hemos hablado anteriormente de esta estrategia, cuando hemos hablado de los problemas cuya estructura aritmética está constituida por varias colecciones que al unirse forman un todo o viceversa, una colección amplia que vamos a dividir en varias partes; en cualquier caso, era condición indispensable para aplicar la técnica partes/todo que fuesen conocidas todas las etiquetas menos una.

Ahora vamos a hablar de la misma estrategia, pero con otra técnica, la del cálculo sistemático y exhaustivo.

La relación existente es ambigua y no nos permite establecer la relación partes/todo, bien porque no hay todo, no hay partes o se desconoce más de una etiqueta.

El trabajo se parece bastante al ensayo y error, pero no se trata de realizar algunas conjeturas para comprobarlas después, sino que el trabajo consiste en probar TODAS las posibilidades y analizar después cuántas y cuáles de ellas satisfacen al problema.

Nos ayudará mucho la elaboración de una tabla dividida en columnas (datos y relación) y una cantidad indeterminada de filas, cada una de las cuales constituye una prueba. Esas pruebas deberán hacerse de manera ordenada, creciente o decreciente, y sin saltarse ninguna. La última columna deberá ser normalmente la que presente los resultados. Cada uno de ellos deberá ser verificado con arreglo a la relación para averiguar cuáles son válidos. Los que lo sean constituyen la solución del problema, por lo general múltiple.

El ejemplo

Cumpleaños

Sonia y su prima cumplen los años el mismo día. Durante cuatro años seguidos la edad de Sonia es divisor de la de su prima.
¿Qué edad tenía la prima cuando nació Sonia?
Razona tu respuesta.

Proceso de resolución

Fase I. Comprender

Datos: Sonia y su prima cumplen los años el mismo día.

Objetivo: Qué edad tenía la prima cuando nació Sonia.

Relación: Durante cuatro años seguidos la edad de Sonia es divisor de la de su prima.

Diagrama:

Modelo.

Tabla para investigación operativa.

Fase II. Pensar

Estrategias

- ENSAYO Y ERROR
- ORGANIZAR LA INFORMACIÓN

Fase III. Ejecutar

Por **Ensayo y Error**:

Podríamos utilizar una cuadrícula de cuatro posiciones y una cinta con los números del 1 al 100. La cuadrícula inferior es fija, mientras que la cinta superior es movible.

En la cuadrícula se colocan sucesivamente las cuaternas posibles para las edades de Sonia.

Cuando se desplaza la cinta sobre la cuadrícula podremos encontrar las cuaternas posibles para la prima de Sonia.

..	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	.
					1	2	3	4								

..	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26		.
					1	2	3	4								

Esta forma de trabajar no garantiza encontrar todas las soluciones posibles. O al menos supone un enorme trabajo.

<u>Mediante **Organizar la Información**:</u>

Se trata de buscar dos cuaternas de números consecutivos que sean divisores los unos de los otros de manera ordenada. Se trata de una pequeña investigación operativa sobre múltiplos y divisores.

Sabemos que han de ser números naturales consecutivos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, … distanciados entre sí una cierta cantidad.

En el primer caso habrá que buscar una correlación con la cuaterna inferior que permita la consecutividad de la superior.

La situación de los números primos en esta sucesión nos indica ya que en la misma cuaterna superior no puede haber dos de ellos puesto que sería imposible la relación múltiplo/divisor en ambos a la vez. Por lo tanto, la cuaterna mayor ha de tener los cuatro números consecutivos compuestos o sólo un número primo. Empecemos estudiando las cuaternas de números compuestos.

De la lista de los números del 1 al 100 eliminamos los grupos que tienen dos primos a una distancia igual o menor de cuatro números, por ejemplo, entre los primeros treinta números (no ponemos los seis primeros, donde tres son primos), al marcar los primos encontramos lo siguiente:

7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

La primera cuaterna que cumple con lo dicho es la del 24 al 27, luego la del 25 al 28.

Examinando el resto de los números:

31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52

Encontramos cuatro cuaternas entre el 31 y el 52: 32-33-34-35; 33-34-35-36; 48-49-50-51 y 49-50-51-52.

53	54	55	56	57	58	59	60	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75

Seis entre el 53 y el 79

76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Y seis más entre el 80 y el 99.

Las cuaternas superiores posibles serían: 24-25-26-27, 25-26-27-28, 32-33-34-35, 33-34-35-36, 48-49-50-51, 49-50-51-52, 54-55-56-57, 55-56-57-58, 62-63-64-65, 63-64-65-66, 74-75-76-77, 75-76-77-78, 84-85-86-87, 85-86-87-88, 93-94-95-96, dentro de edades posibles.

Habrá que analizar cada una:

Orden	Cuaternas	Factores	Consecuencias	Resultado
1	24-25-26-27	25 es múltiplo de 5	26 no es múltiplo de 6	No vale
2	25-26-27-28	25 es múltiplo de 5	26 no es múltiplo de 6	No vale
3	32-33-34-35	35 es múltiplo de 5 y 7	34 no es múltiplo de 4 ni de 7	No vale
4	33-34-35-36	35 es múltiplo de 5 y 7	34 no es múltiplo de 4 ni de 7	No vale
5	48-49-50-51	49 es múltiplo de 7	50 no es múltiplo de 8	No vale
6	49-50-51-52	49 es múltiplo de 7	50 no es múltiplo de 8	No vale
7	54-55-56-57	55 es múltiplo de 5 y 11	56 no es múltiplo de 6 ni de 12	No vale
8	55-56-57-58	55 es múltiplo de 5 y 11	56 no es múltiplo de 6 ni de 12	No vale
9	62-63-64-65	62 es múltiplo de 2 y 31	63 es múltiplo de 3 64 es múltiplo de 4 65 es múltiplo de 5	Sí vale
10	63-64-65-66	66 es múltiplo de 6 y 11	63 es múltiplo de 3 64 es múltiplo de 4 65 es múltiplo de 5	Sí vale
11	74-75-76-77	77 es múltiplo de 7 y 11	76 no es múltiplo de 6 ni de 10	No vale
12	75-76-77-78	77 es múltiplo de 7 y 11	76 no es múltiplo de 6 ni de 10	No vale
13	84-85-86-87	85 es múltiplo de 5 y 17	86 no es múltiplo de 6 ni de 18	No vale
14	85-86-87-88	85 es múltiplo de 5 y 17	86 no es múltiplo de 6 ni de 18	No vale
15	90-91-92-93	91 es múltiplo de 7 y 13	92 no es múltiplo de 8 ni 14	No vale
16	91-92-93-94	91 es múltiplo de 7 y 13	92 no es múltiplo de 8 ni 14	No vale
17	92-93-94-95	94 es múltiplo de 2 y 47	95 no es múltiplo de 3 ni de 48	No vale
18	93-94-95-96	95 es múltiplo de 5 y 19	94 no es múltiplo de 4 ni de 18	No vale

Encontramos dos soluciones posibles.

Veamos ahora las cuaternas que contengan un primo. En este caso, el primo ha de estar en primera posición y la cuaterna inferior habrá de ser forzosamente 1-2-3-4.

La primera cuaterna superior que encontramos de este tipo es 7-8-9-10, que falla al no ser 10 divisible entre 4. Sin embargo, la siguiente: 13-14-15-16, sí cumple pues 13 es múltiplo de 1, 14 es múltiplo de 2, 15 es múltiplo de 3 y 16 es múltiplo de 4.

Las otras cuaternas a estudiar serían: 19-20-21-22, 23-24-25-26, 31-32-33-34, 37-38-39-40, 43-44-45-46, 47-48-49-50, 53-54-55-56, 61-62-63-64, 67-68-69-70, 73-74-75-76, 83-84-85-86, 89-90-91-92. Haremos un análisis para cada una:

13-14-15-16		13 es múltiplo de 1 14 es múltiplo de 2 15 es múltiplo de 3 16 es múltiplo de 4.	**Sí vale**
19-20-21-22	22 no es múltiplo de 4		No vale
23-24-25-26	25 no es múltiplo de 3		No vale
31-32-33-34	34 no es múltiplo de 4		No vale
37-38-39-40		37 es múltiplo de 1 38 es múltiplo de 2 39 es múltiplo de 3 40 es múltiplo de 4	**Sí vale**
43-44-45-46	46 no es múltiplo de 4		No vale
47-48-49-50	49 no es múltiplo de 3		No vale
53-54-55-56	55 no es múltiplo de 3		No vale
61-62-63-64		61 es múltiplo de 1 62 es múltiplo de 2 63 es múltiplo de 3 64 es múltiplo de 4	**Sí vale**
67-68-69-70	70 no es múltiplo de 4		No vale
73-74-75-76		73 es múltiplo de 1 74 es múltiplo de 2 75 es múltiplo de 3 76 es múltiplo de 4	**Sí vale**
83-84-85-86	85 no es múltiplo de 3		No vale
89-90-91-92	91 no es múltiplo de 3		No vale

Encontramos cuatro soluciones posibles más.

Estudiemos ahora cómo se correlacionan entre sí para determinar la solución o soluciones del problema.

Edad de Sonia	Edad de su prima	Diferencia de edad
2	62	60
3	63	60
1	13	**12**
1	37	**36**
1	61	60
1	73	72

Vemos que en tres de los casos la prima de Sonia tendría 60 años cuando ésta nació. En los otros tres casos tendría 12, 36 o 72.

Como nos falta información acerca de ambas primas no podemos descartar ninguna de las soluciones a priori, aunque pudiera parecer más sensata la de los 12 años (desde el punto de vista de la relación de primas, hijas de hermanos).

Solución

Hay cuatro soluciones: 60, 12, 36 o 72.

Fase IV. Responder

Comprobación

La exhaustividad de las tablas nos da todas las verificaciones posibles de las soluciones encontradas.

Análisis

Varias soluciones posibles, aunque no todas igualmente probables.

Respuesta:

Cuando nació Sonia, su prima podía tener 12, 36, 60 o 72 años. Los dos últimos casos parecen imposibles, pero… "las ciencias adelantan que es una barbaridad" y puede que en un futuro haya hermanos que se lleven seis o más décadas de diferencia.

2. Los nuevos retos

Fechas mágicas

El 11 de septiembre de 1999 fue una fecha mágica ya que al escribirlo en la forma "11.9.99", el producto de los dos primeros números es igual al tercer número:
11 x 9 = 99.
Indicad qué otras fechas mágicas han ocurrido desde 1978, año de la fundación de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, hasta el año 2000.
¿Y desde el año 2000 hasta hoy?
Explicad cómo habéis hecho para encontrar todas estas fechas.

Tiempo de vendimia

En los viñedos del señor Brunello, un día de vendimia, con los racimos cosechados se llenan 18 cestas grandes y 13 medianas. Para el transporte a la bodega, el señor Brunello tiene tres tractores:
- El tractor A puede llevar cargas completas de tres cestas grandes y dos medianas;
- El tractor B puede llevar, a plena carga, dos cestas grandes y una mediana;
- El tractor C puede llevar, a plena carga, una cesta grande y una mediana.

Ese día, el señor Brunello utilizó al menos una vez, todos sus tractores y con la carga completa.
¿Cuántos viajes habría podido hacer el señor Brunello para llevar con cada uno de sus tractores todas las cestas a la bodega?
Describa todos los viajes posibles y explique cómo los encontró.

Los torneos 2018

Fieles a nuestra cita anual, volvemos a mencionar la celebración de los Torneos de Resolución de Problemas de la Sociedad "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas para Primaria y Secundaria. Cuando este artículo vea la luz ya se habrá celebrado la Segunda Fase del de Secundaria, se conocerán sus ganadores y se habrán entregado los premios de ambos Torneos y de los distintos concursos que acompañan al evento. Todo ello en una gran fiesta anual de las matemáticas con presencia de alumnos, padres y profesores y en el acogedor seno de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna. Se celebra así el Día Escolar de las Matemáticas del 12 de mayo.

De momento les incluimos aquí

http://www.sinewton.org/web/images/torneo/torneo34/torneo34problemas.pdf

los problemas que tuvieron que resolver los alumnos de la Primera Fase del Torneo de Secundaria. Los propuestos en la Segunda Fase, los encontrarán en esta dirección:

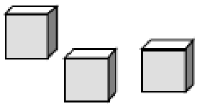
http://www.sinewton.org/web/images/torneo/torneo34/torneo34problemas2.pdf

Será un buen reto para ustedes abordarlos y, sobre todo, proponerlos a sus propios alumnos como tarea de clase.

Y he aquí los del Torneo de Primaria:

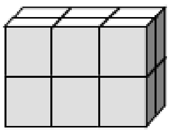
1.- Construcción de ladrillos

Dispones de 150 cubos, todos de este tipo:

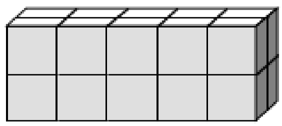


Con la ayuda de estos cubos, debes construir ladrillos de uno u otro de estos dos modelos:

Modelo MINI



Modelo MAXI



Hay que probar a utilizar el mayor número posible de tus 150 cubos.
¿Cuántos ladrillos completos de cada modelo deberías construir para que te sobren los menos cubos posibles sin utilizar?
Explica tus respuestas e indica cuántos cubos te quedan sin utilizar.

2.- La partida de cartas

Cinco personas juegan a las cartas, en una mesa redonda.
La señora Díaz está sentada entre el señor Núñez y la señora Pérez.
Francisco está sentado entre Juan y la señora López.
El señor Núñez está entre Francisco y María.
Alicia tiene al señor Ramos a su izquierda y la señora Pérez a su derecha.
Le toca jugar a Luisa.
Colocar las cinco personas alrededor de la mesa y anotad para cada uno su nombre y su apellido.

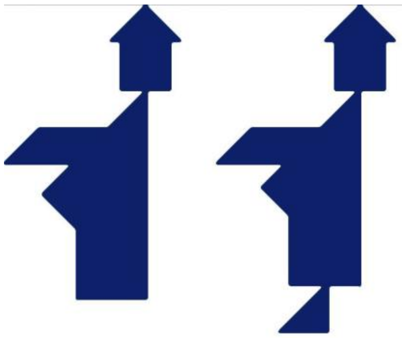
3.- Números consecutivos

34 es la suma de cuatro números naturales consecutivos: 34 = 7 + 8 + 9 + 10.
Encuentra otros dos números, entre 40 y 50, que sean también la suma de cuatro números naturales consecutivos.
Explica tu respuesta.

4.- Compra

Si a la cantidad de dinero que tengo le añadiese su cuarta parte más los 5 € que tú me has prestado, podría comprarme la tablet que quiero y que cuesta 255 €. Entonces, **¿cuánto dinero tengo?**
Explica cómo lo has razonado.

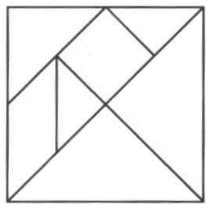
5.- Tangram



Aquí tienes dos figuras construidas con el tangram chino. Cada figura se construye con un tangram completo. No sobran piezas.

Recorta las piezas del tangram que te damos en la hoja anexa, forma estas figuras y pega la solución en la página siguiente.

Anexo



Y hasta aquí llegamos. Terminamos con nuestro mantra particular: resuelvan los problemas, singulares y alejados de los cotidianos; utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Nos repetimos: vamos, anímense… ¡Si es **divertido**!

Y de nuevo hemos deslizado dos errores (al menos) para que aquellos avispados lectores que los encuentres y nos lo hagan sabe, puedan participar en el sorteo de un pequeño obsequio que le haremos llegar al domicilio que nos indiquen.

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista.

NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**