NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas

http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 99, noviembre de 2018, páginas 51-69

# Diseño de una propuesta didáctica para el fortalecimiento del pensamiento espacial en estudiantes del grado octavo

**Rónal Darío Villamizar Ángel** (Institución Educativa Gustavo Cote Uribe. Colombia)

*Fecha de recepción: 29 de agosto de 2017*
*Fecha de aceptación: 3 de septiembre de 2018*

**Resumen**

En este trabajo se diseñó una secuencia didáctica para el estudio de las líneas y puntos notables del triángulo en el grado octavo (alumnos entre los 13 y 17 años de edad), siguiendo el Modelo de Van Hiele para caracterizar el nivel de razonamiento de los estudiantes y estructurar las actividades para el fortalecimiento de su pensamiento espacial, además se propició la exploración activa usando material reciclable como las tapas plásticas de gaseosa y el cartón para el descubrimiento guiado de los conceptos y propiedades. En el marco de una metodología cualitativa, se reflexionó en cada una de las fases en las que está inmerso el investigador docente para obtener mejores resultados en el desempeño de los estudiantes, se precisaron, además, qué materiales son pertinentes para la exploración de los objetos de estudio.

**Palabras clave**

Secuencia didáctica, líneas y puntos notables del triángulo, Modelo de Van Hiele, Pensamiento espacial, exploración activa, material reciclable, metodología cualitativa.

**Title**

**Design of a didactic proposal to strengthen the spatial thinking of eighth grade students.**

**Abstract**

This project presents the design of a didactic sequence aimed at studying the notable lines and points of triangles. It was implemented with a group of eighth graders, age 13 to 17. The Van Hiele Model was followed to characterize the students' reasoning level as well as to structure activities to strengthen their spatial thinking since it had been previously observed some weaknesses on these aspects. Additionally, guided discovering of the concepts and properties was fostered trough active exploration and the use of recyclable materials such cardboard and plastic bottle caps. Based on the qualitative research methodology, the teacher-researcher reflected on each of the stages to identify students' needs, to choose the most suitable materials for the exploration and to improve their overall performance.

**Keywords**

Didactic sequence, notable lines and points of triangles, Van Hiele Model, space thinking, active exploration, recyclable material, qualitative research methodology.

## 1. Introducción

La presente investigación a través del diseño de una secuencia didáctica para abordar el tema de los puntos y líneas notables del triángulo en el grado octavo de la Institución Educativa Gustavo Cote Uribe de la ciudad de Bucaramanga, que busca fortalecer el pensamiento espacial de los estudiantes, se hace como punto de partida para realizar una reflexión de la forma en que se asume el proceso de enseñanza aprendizaje en el aula y reorientarla a la manera en que evoluciona el pensamiento de los estudiantes, en especial el de geometría.

Se seleccionó la asignatura de geometría por varios aspectos que se evidenciaron durante las observaciones previas al planteamiento del problema, como el gusto de los estudiantes por el dibujo y las manualidades, el énfasis ambiental de la institución que promueve el reciclaje y la revisión bibliográfica donde se resalta el potencial de la geometría para desarrollar habilidades en los estudiantes, por otra parte, tiene muchos elementos que son prácticos para muchas ocupaciones y profesiones.

## 2. Justificación

Una habilidad espacial es primordial en muchas actividades y un valor agregado a muchas ocupaciones y más aún si en ella se necesita visualizar, medir, construir y crear; se puede decir entonces que la geometría por sus elementos prácticos y la posibilidad de usar un número considerable de materiales, muchos de ellos reciclables, puede ser usada para la exploración y el descubrimiento de propiedades, lo cual, indudablemente propicia el desarrollo del pensamiento espacial, que está ligado a otras habilidades tales como lo sugiere Howard Gardner en su teoría de las múltiples inteligencias:

> El pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios, es peculiar a esas personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física y matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial (MEN, 1998, p. 37).

Así pues, los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998a, pp. 37-38) señalan entre otras, algunas consideraciones importantes que se deben tener presente en el momento de enseñar geometría:

- Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento.
- El modelo de Van Hiele es la propuesta que parece describir con bastante exactitud el proceso de construcción del pensamiento espacial.

## 3. Marco Teórico

En este apartado se hace una revisión de los fundamentos curriculares, las temáticas, los modelos pedagógicos y las estrategias didácticas que sirven de sustento de la propuesta didáctica.

### 3.1. Fundamentos de la didáctica de las Matemáticas y Teoría sobre el abordaje de la geometría

El artículo ***La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*** (Chavellard, 1997)**,** define la transposición didáctica como "un contenido del saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza" (p.16). En otras palabras, para enseñar algo, se aísla ese algo de alguna de sus propiedades y se adapta al contenido escolar.

Las consideraciones anteriores al sugerir la importancia de realizar la transposición didáctica, llevan al surgimiento de algunos nuevos interrogantes para el quehacer docente: ¿Qué rol debe asumir el profesor y el estudiante en la transposición didáctica?, ¿qué se debe evitar en la transposición didáctica?, y ¿qué situaciones se deben plantear en el aula de clase para que sea didáctica? Estas preguntas encuentran su respuesta en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, en su libro Fundamentos y Métodos de la didáctica de las Matemáticas, (Brousseau, 1986) que tiene como propósito considerar los elementos básicos que debe reunir una propuesta didáctica para que sea útil, completa y coherente.

Dadas las anteriores consideraciones, surgen otros cuestionamientos, ¿cómo adaptar un contenido tal como es concebido en geometría a un contenido acorde a las habilidades de los estudiantes?, ¿cómo determinar el grado de habilidad del estudiante?, y finalmente ¿qué etapas seguir en el desarrollo de una temática que ha sido adaptada a la necesidad de los estudiantes?

En razón a esto, el modelo de Van Hiele, explica el porqué de los anteriores problemas, así como su posible salida se puede resumir de la siguiente manera según Jaime & Gutiérrez (1990, p. 305):

- Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
- Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
- Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela
- No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma, pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

A continuación, se describirán las características de cada uno de los niveles de razonamiento de Van Hiele, que se reflejan en las actividades de los estudiantes (Jaime, A. y Gutiérrez, A., 1990).

| Niveles de razonamiento | Descripción | Características |
|---|---|---|
| Nivel 1.<br><br>De reconocimiento | Asocian los nombres a determinados tipos de figuras. | • La descripción de las figuras se basa en su aspecto físico (forma, tamaño, color, grosor, …).<br>• Las descripciones de las figuras están basadas en su semejanza con otros objetos (con frases como "se parece a…", "tiene forma de…", etc.).<br>• No reconoce las partes ni propiedades de las figuras. |
| Nivel 2.<br><br>De Análisis | Los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar propiedades a través de la observación y la experimentación. | • Los estudiantes reconocen las partes y ciertas propiedades de las figuras.<br>• Pueden deducir propiedades a partir de la experimentación.<br>• No son capaces de relacionar unas propiedades con otras. |
| Nivel 3.<br><br>De clasificación | Establece relaciones entre las diferentes propiedades de las figuras. | • Reconocen las implicaciones entre algunas propiedades.<br>• Pueden describir una figura de manera formal.<br>• Clasifica figuras de acuerdo a sus propiedades. |

| Niveles de razonamiento | Descripción | Características |
|---|---|---|
| | | • Comprenden los pasos de una demostración, pero no son capaces de construirlas por sí mismos. |
| Nivel 4.<br><br>De deducción formal | Es capaz de realizar las demostraciones de lo que ya habían demostrado informalmente con anterioridad. | • Entienden y realizan razonamientos lógicos formales.<br>• Comprenden la estructura axiomática de las matemáticas.<br>• Son capaces de partir de distintas premisas para llegar a los mismos resultados. |

**Tabla 1.** Niveles de razonamiento de Van Hiele. Adaptado de Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990)

Los métodos que se usan para determinar el nivel de razonamiento son, según Jaime y Gutiérrez (1990) los siguientes:

- Realización de entrevistas individuales entre el profesor y el estudiante, durante las cuales el docente plantea diversas actividades y dialoga con el estudiante sobre su solución.
- Cuestionarios con las siguientes características:
  - Preguntas cuyas respuestas sean largas para determinar su forma de razonar.
  - Incitar a los estudiantes a explicar sus respuestas con frases como: Por qué…, explica cómo encontró la solución…
  - Lo más importante no es determinar si contestan bien o mal, sino saber cómo contestan.
  - Las actividades deben cubrir los 4 niveles, en el caso de los primeros niveles de secundaria los tres primeros.
  - A las preguntas no se les debe asignar un nivel, puesto que una misma pregunta puede ser resuelta correctamente de diferente forma por estudiantes que están en diferentes niveles de razonamiento.

En este sentido, es importante reconocer entonces quela tarea de los docentes para ayudar a sus estudiantes a subir al siguiente nivel de razonamiento se basa en planear las actividades de acuerdo a cinco fases que hemos interpretado de Jaime y Gutiérrez (1990).

| Fase | Rol del alumno | Rol del docente |
|---|---|---|
| **Toma de Contacto** | Aprender a utilizar materiales y algunos conocimientos básicos necesarios para el trabajo de clase. | Identificar los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema a abordar y su nivel de razonamiento. |
| **Orientación Dirigida** | Explorar usando el material proporcionado para descubrir nuevas figuras, conceptos y propiedades. | Encaminar las actividades de tal manera que los conceptos y propiedades se den en forma progresiva. |
| **Explicitación** | Intercambiar sus experiencias referidas a lo que observaron, las estrategias o formas de solución. | Mediar en la transición entre el vocabulario que los estudiantes usan para describir los elementos de geometría al usual. |
| **Orientación libre** | Aplicar los conocimientos y lenguajes adquiridos a otras situaciones de las presentadas inicialmente. | Plantear variedad de problemas, algunas deben ser situaciones nuevas y más complejas. |
| **Integración** | Comparar, acumular y combinar lo que ya se sabe. | Propiciar que se integren los conocimientos nuevos con otros adquiridos anteriormente. |

**Tabla 2.**Fases para la planeación de las actividades

### 3.2. Conceptos relacionados con las temáticas de la propuesta didáctica

Las definiciones y propiedades corresponden a los puntos y líneas notables del triángulo y son traducidos del libro en inglés ***Geometry Revisited*** (Coxeter & Grietzer, 1967). El punto del centro del círculo circunscrito[1] alrededor de un triángulo hemos acordado llamarlo el ***circuncentro*** del triángulo, y llamamos el círculo, el **circuncírculo** del triángulo. El **circuncentro O** es la intersección de las tres perpendiculares que bisecan[2] los lados del triángulo. El radio del circuncírculo ha sido denotado por la letra R.

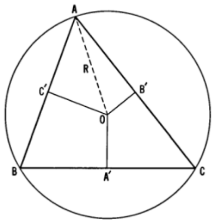



**Figura 1.** El circuncentro O (Coxeter & Greitzer, 1967, p.7)

Los segmentos que unen los vértices de un triángulo a los puntos medios de los lados opuestos son llamados **medianas**. En la figura inferior, las líneas $AA'$, $BB'$ y $CC'$ son medianas, de modo que $BA' = A'C$, $CB' = B'A$ y $AC' = C'B$. Las tres medianas son concurrentes.[3] Su punto común, G, es llamado el centroide[4] del triángulo. Si un triángulo fuera cortado con material de densidad uniforme, se equilibraría si se suspendiera en este punto, común a las medianas. En otras palabras, el centroide es el "centro de gravedad" del triángulo.[5]

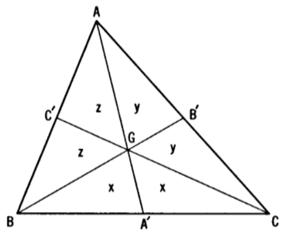



**Figura 2.** Las medianas del triángulo (Coxeter & Greitzer, 1967, p.8)

[1] "Círculo circunscrito a un polígono es el que tiene por puntos de su circunferencia todos los vértices de este polígono; de suerte que polígono inscrito en un círculo y círculo circunscrito a un polígono, expresan una misma cosa". (Oriol, 1847)

[2] Entendemos por bisecar, dividir en dos partes iguales (RAE, 2017)

[3] Entendemos que las líneas o segmentos son concurrentes cuando pasan a través de un mismo punto (Coxeter & Greitzer, 1967, p.16)

[4] En muchos textos escolares se usa la palabra baricentro en lugar de centroide. "El término baricentro proviene del griego βάρος ("peso", "carga") y κέντρον ("aguijón", "centro")". (Oxford, 2000, p101)

[5] Arquímedes (hacia 287-212 aC) obtuvo el centroide como el centro de gravedad de una placa triangular de densidad uniforme. (Coxeter & Greitzer, 1967)

Los segmentos[6] AD, BE, CF, perpendiculares a $BC, CA, AB$, respectivamente, son llamados las ***alturas*** del $\Delta \boldsymbol{ABC}$**.** Su punto común ***H*** es llamado el **ortocentro.** Los puntos ***D, E, F*** se llaman naturalmente los pies de las alturas. Uniendo los pies en pares obtenemos $\Delta \boldsymbol{DEF}$**,** el triángulo ***órtico***

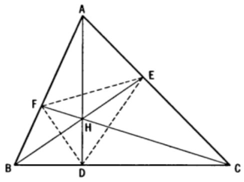



**Figura 3.**Las alturas del triángulo (Geometry revisited, P.8)

Otro importante conjunto de segmentos[7] son las tres bisectrices de ángulos internos. Las bisectrices internas de los tres ángulos de un triángulo son concurrentes.

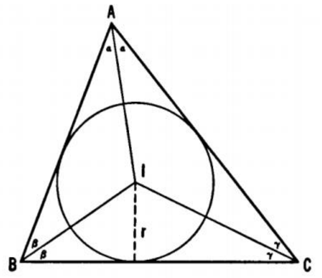



**Figura 4.** Las bisectrices del triángulo ABC

El círculo con centro I y radio R tiene los tres lados por tangentes y es así el círculo inscrito o in-círculo. Llamamos ***I*** el ***incentro*** y ***r*** el ***inradio.***

## 4. Diseño Metodológico

### 4.1. Tipo de investigación

Para el desarrollo de este proyecto se va a realizar una investigación cualitativa; según Gibbs (2012, p.12), "la investigación cualitativa pretende acercarse al mundo… y entender, describir y algunas veces explicar fenómenos sociales…Las maneras que usa para tal fin se basan en el análisis de las experiencias, interacciones y comunicaciones de los individuos o grupos las cuales se ven reflejadas en los registros de las prácticas, informes, videos, fotos, …"

Además, se usará como enfoque la Investigación Acción que se define según Elliot (1993, p.88) como "el estudio de una situación social para tratar de mejorar la calidad de la acción dentro en la misma". Para los docentes, la situación social que se plantea es cómo mejorar la práctica educativa.

---

[6] En el texto "Geometry revisited" aparece la expresión "***cevian"*** en lugar de segmento que fue lo usado en nuestra traducción, ***the cevian*** se refiere a los segmentos de línea que unen un vértice del triángulo a algún punto sobre el lado opuesto. (Coxeter & Greitzer, 1967, p4)

[7]***The cevians*** lo hemos llamado segmento y debe tener el sentido de tener un extremo en el vértice del triángulo y su otro extremo en algún punto del lado opuesto.

## 4.2. Proceso de investigación

Llinares (1991), citado en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN 1998b, p.22) se refiere a la indagación que el docente debe hacer antes, durante y después del proceso de enseñanza, proceso que denomina por fases, llamándolas fases pre-activa, interactiva y pos-activa, que junto a la investigación en el aula llevan al desarrollo profesional del docente. En la siguiente tabla se detalla dicho proceso.

| Fase | Tarea del docente investigador |
|---|---|
| Pre-activa | Se realizó una revisión bibliográfica sobre la temática de interés y las recomendaciones didácticas, se realizó una revisión curricular, teórica, y didáctica de la enseñanza de la geometría. |
| Interactiva | Para minimizar los errores en el momento de la aplicación de la propuesta, se realizó una prueba piloto en el año 2016, donde se afinaron las actividades de la secuencia didáctica, para su posterior aplicación en el año 2017, se hizo también una prueba diagnóstica para detectar el nivel de razonamiento espacial desde el modelo de Van Hiele de los estudiantes. |
| Pos-activa | Se confrontaron los resultados y lo que se esperaba, para ello, se realizó una triangulación teniendo en cuenta la teoría, la práctica y la reflexión a lo largo de todo el proceso de investigación. |

**Tabla 3.**Fases del proceso de investigación

## 4.3. Población y muestra

La población objeto de estudio está compuesta por 72 estudiantes del grado 8-1 y 8-2 de la jornada de la mañana de la IE Gustavo Cote Uribe de la ciudad de Bucaramanga (Colombia), algunos de los estudiantes viven en asentamientos, presentan en sus comunidades problemas de intolerancia e inseguridad, además existen familias desplazadas por el conflicto armado, desempleados, familias disfuncionales y sin formación profesional. La muestra corresponde a 36 estudiantes (15 chicas y 21chicos) del grado 8-2 de edades que oscilan entre los 14 y 17 años.

## 4.4. Técnica e instrumentos de la recolección de la información

Para diagnosticar, diseñar, implementar y evaluar la efectividad de la propuesta didáctica de geometría en los estudiantes, se utilizaron técnicas para la supervisión de las actividades, registro de las observaciones, lo que sucedía durante la aplicación de los instrumentos y reflexión sobre sus alcances, limitaciones y dificultades. Para ello se utilizaron las siguientes técnicas: Diario de campo, prueba diagnóstica, prueba final, guías de trabajo y registro fotográfico

## 4.5. Validación de los instrumentos

Para la validación de los instrumentos se realizó una prueba piloto con el grupo 8-1 en el año 2016. Además, los instrumentos recibieron la aprobación por parte de la directora del proyecto la Dra. María Eugenia Serrano, quien tiene experiencia en el modelo de Van Hiele, puesto que este fue parte de su proyecto de pregrado y de maestría.

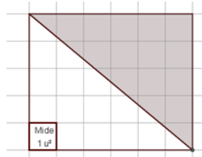
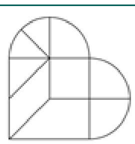
## 4.6. Resultado y discusión

Las respuestas de la prueba diagnóstica y prueba final, evidenciaban algún nivel de razonamiento que puede tener un estudiante según el Modelo de Van Hiele.

### *4.6.1. Evaluación Diagnóstica*

**Figura 5.** Aplicación prueba diagnóstica en 8-2

Para dar más claridad, a continuación, se incluye una tabla con las preguntas y previamente se estableció lo que se esperaba como respuesta de los estudiantes para clasificarla dentro de un nivel.

| Preguntas | Respuesta que se espera según nivel de razonamiento | |
|---|---|---|
| | **Nivel 1. Reconocimiento** | **Nivel 2. Análisis** |
| 1. ¿Un triángulo rectángulo puede ser isósceles? Explique su respuesta. | Construye un triángulo cualquiera o expresa que todos los triángulos son iguales o diferentes. | Construye el ejemplo de un triángulo rectángulo que tiene sus dos catetos iguales o expresa esto en palabras. |
| 2. Si el área del cuadrado pequeño mide 1 u$^2$. a) ¿Cuánto mide el área de todo el rectángulo? (Explique cómo halló el resultado).   | Halla el área contando el número de cuadrados en el rectángulo. | Halla el área multiplicando la base por la altura. |
| 3. ¿Cuánto mide el área del anterior triángulo sombreado? (Explique cómo halló el resultado). | Halla el área triángulo recubriendo con cuadrados de 1u$^2$. | Halla el área dividiendo el área del rectángulo entre dos. |
| 4. Coloree el triángulo[8] o los triángulos que observa en el siguiente corazón. ¿Por qué las demás figuras no son triángulos?  | Reconoce que el triángulo tiene tres lados. | Reconoce que el triángulo tiene tres lados rectos. |
| 5. ¿Los ángulos de un triángulo suman 180°? Explique su respuesta. | No hay distinción entre ángulos y lados del triángulo. | Muestra un ejemplo donde la suma es de 180$^o$ |

[8] Se acordó con los estudiantes que se trataba de colorear la superficie triangular.

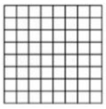
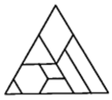
| | | |
|---|---|---|
| 6. Dibuje un triángulo rectángulo en la siguiente cuadrícula. ¿Por qué a ese triángulo se le llama triángulo rectángulo?  | Dibuja la figura un triángulo que tiene un ángulo recto. | Explica que se llama triángulo rectángulo porque tiene un ángulo recto. |
| 7. ¿La siguiente figura corresponde a un triángulo? ¿Por qué?  | Se parece a un triángulo | No puede corresponder a un triángulo porque tiene cuatro lados. |
| 8. Coloree las figuras quecorresponden a paralelogramos y escriba todas sus características relacionadas con sus lados, ángulos y diagonales.  | | Identifica el rombo y romboide como paralelogramos. |

**Tabla 4** Prueba Diagnóstica

Los resultados de la prueba diagnóstica permitieron identificar 9 estudiantes que no muestran algún nivel de razonamiento, es decir, la mayoría de preguntas las dejaron en blanco o respondieron cosas que nada tienen que ver con la temática, aunque presentan algunos elementos del siguiente nivel; por su parte, 21 estudiantes se encuentran en el *nivel 1 de reconocimiento*, 9 de los cuales presentan elementos del siguiente nivel, en todo caso estos 21 estudiantes son capaces de asignar nombres a algunas figuras geométricas y sus descripciones se basan en el aspecto físico o parecido a alguna figura geométrica, y solo un estudiante está en el *nivel 2 Análisis*, es decir, es capaz de reconocer propiedades de la figuras geométricas.

### *4.6.2. Propuesta didáctica*

Acorde al objetivo específico de diseñar una secuencia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento espacial, se creó la siguiente secuencia didáctica para abordar temas relacionados con los puntos y líneas notables del triángulo. Algunos de los ejes temáticos y problemas de la secuencia didáctica se muestran en la tabla y sigue las etapas de planteamiento del problema, exploración y aplicación.

| Tema | Reto o actividad que da inicio a cada temática de la secuencia didáctica | |
|---|---|---|
| La mediatriz | **# 1**. En una granja hay dos corrales y se desea instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales. Determina al menos 10 posibles ubicaciones del grifo.[9] | **# 2**. En una granja se amplió el número de corrales de dos a tres y se desea instalar un grifo que esté a igual distancia a cada uno de los corrales. Determina la ubicación del grifo.[10] |

[9] En García & López (2008, p.40) el problema aparece "Carlos vive a la misma distancia de la casa de Ara (punto A) que de la de Bety (punto B). Marca con puntos cinco lugares diferentes donde puede estar la casa de Carlos".
[10] En García & López (2008, p.68) el problema aparece como "se va a construir un centro comercial y se desea que esté a la misma distancia de las tres unidades. Identifique con un punto el lugar donde se tendría que construir el centro comercial. Haga la construcción en su cuaderno".

| | |
|---|---|
| La mediana | **# 3.** Dado un triángulo[11] hecho en cartulina tratar de equilibrarlo con la punta de un lápiz. |
| La altura | **#4** Construir un triángulo con palillos y medir las alturas. |
| La bisectriz | **# 3.** Un agrónomo se dirige desde su casa hasta la ciudad acaballo, pero debe pasar por el río para que el animalito tome agua.  Su casa y la ciudad quedan del mismo lado del rio. Ayúdale a encontrar el camino más corto para ir de su casa a la ciudad pasando por el rio. |

**Tabla 5** Actividades iniciales de la secuencia didáctica

### *4.6.2.1. La mediatriz*

Para la mediatriz de un triángulo, que consta de 6 guías, y va desde un reto inicial para identificar la mediatriz como un conjunto de puntos con ciertas características hasta el circuncentro como un punto que resulta de la intersección de tres mediatrices, los retos propician la exploración con materiales concretos, tales como las tapas plásticas de la gaseosa. De esta manera podríamos describir que pretendía cada guía alrededor de la mediatriz.

| Guía | Retos o actividades | Objetivo |
|---|---|---|
| **1** | En una granja hay dos corrales y se necesita instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales. | Identificar la mediatriz como un conjunto de puntos con ciertas características.<br>• Puntos con igual distancia a dos puntos fijos<br>• Puntos en línea recta.<br>• Puntos infinitos. |
| **2** | Dado un conjunto de puntos identificar cuáles están a igual distancia de los extremos de un segmento. | Identificar la mediatriz como un conjunto infinito de puntos que se encuentran a igual distancia de los extremos un segmento. |
| **3** | Usando acetatos que tienen la forma de la letra L, verificar si la recta es la mediatriz del segmento AB y corregir aquellas que estén mal. | Identificar la mediatriz como una recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento. |
| **4** | En una granja se amplió el número de corrales de dos a tres y se desea instalar un grifo quee sté a igual distancia a cada uno de los corrales. | Identificar el circuncentro como el punto a igual distancia de otros tres puntos fijos. |
| **5** | Ubicar el circuncentro de los triángulos. | Identificar el circuncentro como la intersección de las mediatrices del triángulo. |
| **6** | Aplicaciones del circuncentro en la construcción. | Resolver situaciones problemáticas relacionadas con el circuncentro.<br>Reconocer que el circuncentro es el centro del círculo cuya circunferencia toca todos los vértices del triángulo |

**Tabla 6**Actividades y objetivos de la mediatriz y el circuncentro

[11] Se acordó con los estudiantes que nos referíamos a la superficie triangular

Una de las tareas de la **guía No 1** pedía ubicar 10 puntos que estuvieran a igual distancia de dos puntos fijos, en una situación problema "En una granja hay dos corrales y se necesita instalar un grifo que esté a igual distancia de los corrales".

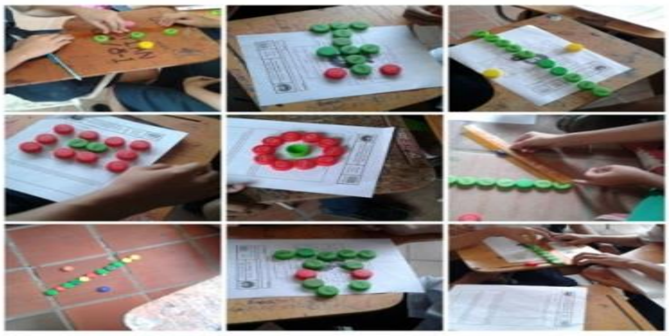


**Figura 8** Proceso de solución del primer reto usando tapas

Además, los estudiantes tuvieron que identificar el punto más cercano que cumple las ya mencionadas características, todos los equipos de trabajo lograron resolver correctamente el reto.

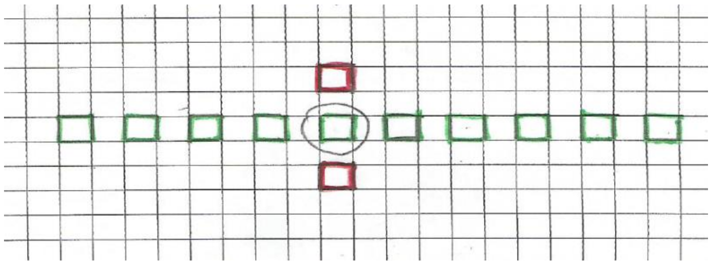


**Figura 9** Grifos a igual distancia de dos corrales (solución de un estudiante de 8-2)

Los cuadrados verdes representan los grifos y los rojos los corrales, el cuadrado en un círculo representa el grifo a menor distancia, esta solución es la representación de lo que cada grupo construyó con las tapas, además se observa que identificó el punto de menor distancia a los dos corrales, sin embargo, la mayoría no lograron identificar la de menor distancia.

Para la ***guía No. 2***, previamente se les dio nombre a algunos elementos como al punto de menor distancia (**punto medio**) y al conjunto de puntos a igual distancia (**la mediatriz**), explicando detalladamente sus características y acorde al *nivel 1 de visualización en la fase de información*.

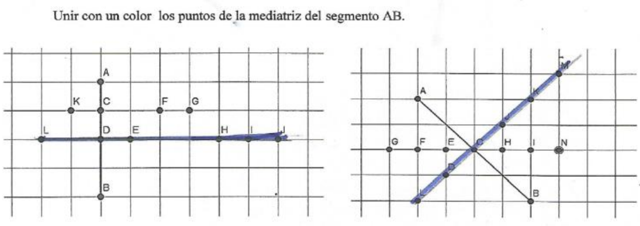



**Figura 10** Los puntos de la mediatriz (solución de estudiante un de 8-2)

En una de las tareas, dar dos instrucciones en un mismo punto generó algo de confusión, por una parte, se pedía trazar la mediatriz (si existe) y por otra, unir con segmentos de colores los pares de puntos con igual distancia.

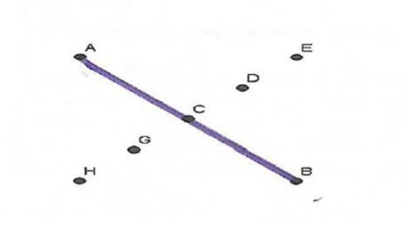



**Figura 11** Los puntos que pertenecen a la mediatriz (solución de un estudiante de 8-2)

En otra tarea, donde se pedía dibujar la mediatriz y no se daba ninguna instrucción de cómo, 19 de los 27 estudiantes la resolvieron satisfactoriamente.

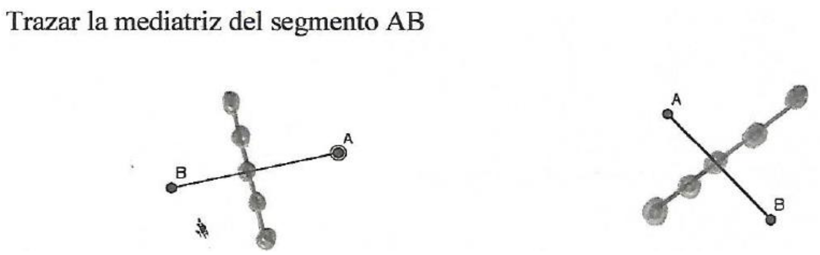



**Figura 12** Construcción de la mediatriz usando puntos (solución de un estudiante de 8-2)

Para el desarrollo de estas actividades el estudiante debía ya estar familiarizado con lo que ya ha visualizado, pero para esta tarea debía empezar a hacer acciones concretas como verificar distancias y que estas distancias fueran iguales.

***La guía 3***, buscaba explorar la definición[12] de la mediatriz, fíjese que primero se exploró una propiedad y luego la definición, esto se hizo puesto que en la prueba piloto se observó que, para los estudiantes, visualizar una recta perpendicular era difícil y se buscó asociar la perpendicular con algo y se pensó en la letra **L,** y para facilitar la exploración en un acetato con la forma de la letra **L**.

**Figura 13** Estudiantes de 8-2 usando los acetatos en forma de L

[12] Definición: “Si una recta es perpendicular a un segmento y pasa por su punto medio, entonces en mediatriz del segmento” (Berrío, 2016, p50)

La tarea correspondiente a identificar las mediatrices de los segmentos fue hecha correctamente por 16 de los 28 estudiantes.

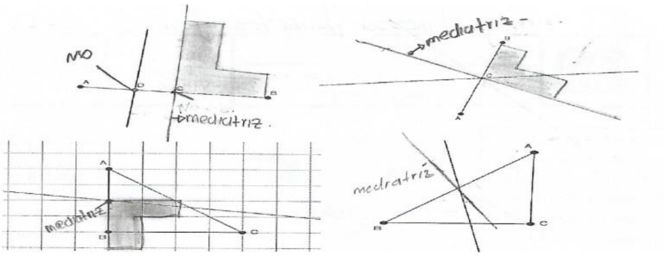


**Figura 14** Asociando la recta perpendicular con la letra L (actividad realizada por un estudiante de 8-2)

Para la pregunta ¿La mediatriz de un segmento debe pasar por cualquier punto del segmento? ¿Por qué?, este aspecto que ya se había explorado en las anteriores guías, menos de la mitad de los estudiantes asistentes respondieron correctamente y de muy pocos, argumentan convincentemente, para superar esta dificultad se debió incluir una guía sobre punto medio, algo que no fue previsto en la prueba piloto.

**La guía 4**, planteaba como un nuevo reto, similar al primero, pero en este caso tenían que ubicar un grifo a igual distancia de tres corrales, se les indicó a los educandos, usar la misma estrategia para determinar los grifos que están a igual distancia de dos corrales y para ello cada grupo disponía de 33 tapas plásticas de gaseosa.

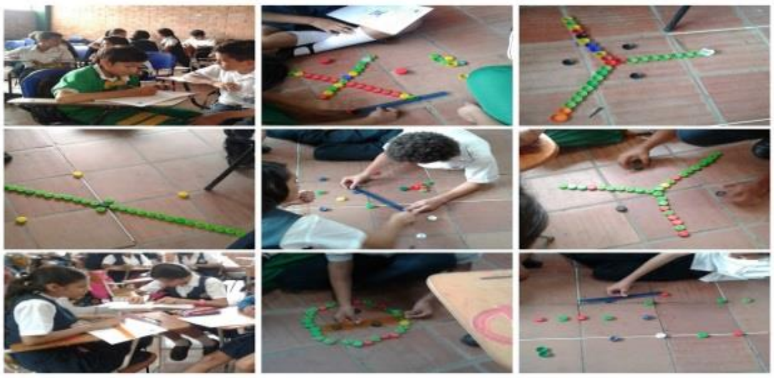


**Figura 15** Proceso de construcción del circuncentro

Todos los grupos lograron resolver el reto y a la pregunta ¿cuántos grifos están a igual distancia de los tres corrales?, la mayoría afirmaron que evidentemente había un punto a igual distancia de los tres puntos fijos (corrales).

En la ***guía No. 5***, la mayoría de los estudiantes construyeron con éxito el circuncentro de los triángulos dados. Cuando se añade a un procedimiento una situación problemática, 18 de los 29 estudiantes lo resolvieron apropiadamente y cuando se le pide que expliquen el procedimiento, la mayoría obvia pasos o no utilizan un lenguaje apropiado, solo 5 de los 29 estudiantes describieron el procedimiento adecuadamente.

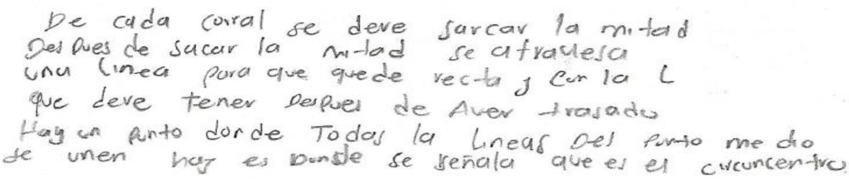

De cada corral se deve sarcar la mitad
Des pues de sacar la mitad se atraviesa
una linea para que quede recta y con la L
que deve tener despues de Aver trasado
Hay un punto donde Todas la Lineas Del punto medio
de unen hay es Donde se señala que es el circuncentro

**Figura 16**Procedimiento para hallar el circuncentro (solución de estudiante de 8-2)

En la ***guía No. 6***, los estudiantes resolvieron diversas situaciones donde integraba todo el tema alrededor de la mediatriz y el circuncentro, se les preguntó ¿para qué servía la mediatriz y el circuncentro?, la mayoría asociaban su utilidad a un tema netamente para la asignatura, respuestas como: "la mediatriz sirve para ubicar puntos a igual distancia de otros dos", "el circuncentro sirve para trazar un circulo que pase por los vértices del triángulo"; muy pocas evocaron los ejemplo de los retos precedentes, y señalaron que servían "para ubicar grifos en una granja y para instalar una fuente en el centro".

#### *4.6.2.2. La mediana*

El eje temático de la mediana, que consta de 3 guías, y va desde un reto inicial para identificar el punto de equilibrio de un triángulo, hasta una guía donde se trabajan dos aplicaciones tales como suspender un triángulo de un hilo y que se mantenga totalmente horizontal hasta la construcción de pirámides de base triangular con la condición de establecer su altura en el punto donde se intersecan las medianas de la base. Los materiales que se usaron fueron triángulo de cartón, palillos y plastilina.

| Guía | Retos o actividades | Objetivo |
|---|---|---|
| **7** | Mantener un triángulo en equilibrio sobre la punta de un lápiz. | Identificar el baricentro[13] como el punto de equilibrio en un triángulo. |
| **8** | Ubicar el punto de equilibrio de los triángulos. | Identificar el baricentro como el punto de intersección de las medianas. |
| **9** | • Colgar triángulos del baricentro y que se mantenga totalmente horizontal.<br>• Construir pirámides de base triangular cuya altura se ubica sobre el baricentro. | Identificar el baricentro como el punto de equilibrio que se puede aplicar en situaciones cotidianas y de la construcción. |

**Tabla 7** Actividades y objetivos de la mediana y el baricentro

Los estudiantes se dispusieron a realizar las actividades colmados de muchas expectativas, al escucharse expresiones de admiración ante los descubrimientos, ellos mostraban con orgullos las soluciones, tal como lo hizo hace siglos Arquímedes, quien descubrió este punto equilibrando una superficie triangular de densidad uniformemente distribuida.

La ***guía No 7*** buscaba que ellos por sí mismos descubrieran la forma de ubicar el baricentro del triángulo en una hoja de papel, la mayoría logró describir por cuál parte del lado del triángulo para la línea que viene desde el vértice opuesto y pasa por el punto de equilibrio, a lo que se refirieron con expresiones como "línea que pasa por el punto medio", pero en el momento de describir el

[13]Hemos acordado que cuando nos refiramos al baricentro del triángulo, nos referimos al baricentro de la superficie triangular.

procedimiento, la mayoría no logró describir detalladamente el procedimiento, solo dos de los estudiantes dieron una descripción detallada del procedimiento para hallar el baricentro.

**Figura 17** Estudiantes buscando el baricentro (centroide), tal como lo hizo Arquímedes

La ***guía No. 8***, tenía como finalidad que los estudiantes lograran ejercitar el procedimiento, lo cual casi todos lograron realizar la construcción de las medianas, además, al preguntárseles ¿es posible que el baricentro se ubique afuera del triángulo?, todos los educandos asistentes respondieron acertadamente y sus argumentos se basaron en las exploraciones previas.

La ***guía No. 9***, buscaba que los estudiantes se familiarizaran con otras aplicaciones del baricentro, y para ello se pensó, suspender una superficie triangular con un hilo y que este quedará totalmente horizontal y la construcción de pirámides con bases triangulares y que la altura de ella quedará exactamente sobre el baricentro, fue un tiempo de exploración y diversión, donde los estudiantes usaron variados elementos como cartón, palillos, y plastilina, identificar el baricentro no fue problema, el trabajo colaborativo permitió que algunos estudiantes superan sus dificultades y entre todos los integrantes del grupo lograrán realizar sus construcciones.

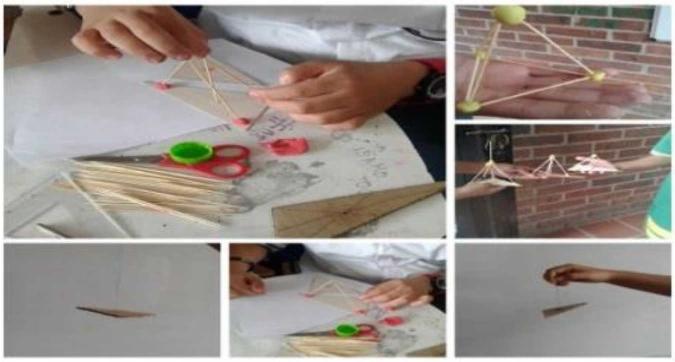


**Figura 18** Aplicaciones del baricentro

#### *4.6.2.3. La altura y la bisectriz*

Para la altura de un triángulo se trabajaron 2 guías, y van desde el reto inicial de medir la altura de un triángulo hecho con palillos, hasta el establecimiento de procedimientos, en estas actividades a los estudiantes se les dificultó identificar la altura de los triángulos cuando estos se ubicaban fuera del triángulo, pese a que la actividad inicial se realizó midiendo las alturas de triángulo de cartón apoyándolos sobre cada lado.

| Guía | Retos o situaciones | Objetivo |
|---|---|---|
| **10** | Medir la altura de tres triángulos de cartón. | Reconocer que un triángulo tiene tres alturas. |
| **11** | • Halla la altura de diferentes objetos,<br>• Hallar la altura de diversos triángulos en la hoja de papel. | Identificar las alturas de un triángulo y realizar correctamente su construcción. |

**Tabla 8** Actividades y objetivos de la altura y el ortocentro

La ***guía No. 10***, permitió aclarar por qué se habla de las tres alturas del triángulo, para ello se realizó una exploración, donde se construyeron las superficies triangulares y al apoyar cada triángulo sobre cada uno de sus lados se logró identificar las alturas.

La ***guía No. 11***, permitió que los estudiantes ejercitaran un procedimiento para hallar cada una de las alturas, que básicamente era seguir ejercitándose en la construcción de rectas perpendiculares.

| Guía | Retos o situaciones | Objetivo |
|---|---|---|
| **12** | Un agrónomo se dirige desde su casa hasta la ciudad acaballo, pero debe pasar por el río para que el animalito tome agua. Su casa y la ciudad quedan del mismo lado del rio. Ayúdale a encontrar el camino más corto para ir de su casa a la ciudad pasando por el rio. | Visualizar unabisectriz del ángulo de un triángulo en la solución de una situación real. |
| **13** | Hallar la bisectriz doblando los triángulos de tal manera que coincidan dos lados consecutivos. | Identificar una bisectriz de un triángulo como un eje de simetría. |

**Tabla 9** Actividades y objetivos de la bisectriz y el incentro

El eje temático de la bisectriz consta de dos guías, inicialmente se plantea el reto de determinar el camino más corto para ir de un punto a otro tocando previamente un punto sobre una recta; luego se busca identificar un procedimiento para construir la bisectriz, este procedimiento se basa en asignarle a la bisectriz las características del eje de simetría de los lados del triángulo que forman un ángulo.

### *4.6.3. Evaluación Final*

Acordes a los objetivos de la investigación se planteó una prueba final que constaba de 8 preguntas, una de las cuales era similar a una de las preguntas de la prueba diagnóstica, solución que fue socializada y otra de las preguntas requería un nivel de razonamiento superior a los que se trataron de fortalecer en la secuencia didáctica.

| Preguntas | Nivel de razonamiento | |
|---|---|---|
| | **Nivel 1. Visualización** | **Nivel 2. Análisis** |
| **1.** ¿Es posible que el circuncentro de un triángulo se ubique afuera del triángulo? | Es capaz de plasmar o dibujar líneas y puntos en | Construye líneas notables del triángulo como la |

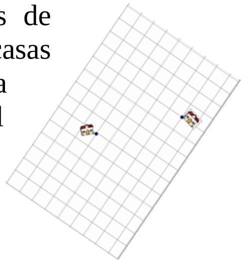
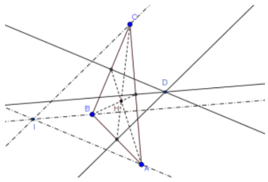
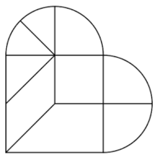
| | | |
|---|---|---|
| Explique | un triángulo sin tener presente aspectos como punto medio y perpendicular a. | mediatriz, la mediana, las alturas y las bisectrices. |
| **2.** Los residentes de cada una de las dos casas quieren construir una cerca que esté a igual distancia de cada una de ellas. Explique donde debe ubicar la cerca.  | Reconoce puntos a igual distancia, visualiza cuáles están más distantes y cuáles más cercanos. | Construye la mediatriz usando puntos a igual distancia de otros dos fijados previamente. |
| **3.** ¿Cuál es el circuncentro del triángulo ABC? Explique  | Considera que en la mayoría de triángulos el circuncentro se ubica dentro del triángulo. | Identifica las características de las mediatrices del triángulo. |
| **4.** En el siguiente corazón, coloree las figuras que no son triángulos. ¿Por qué las demás figuras son triángulos?  | Reconoce que el triángulo tiene tres lados. | Reconoce que el triángulo tiene tres lados rectos. |
| **5.** Se quiere construir una circunferencia que pase por los vértices del siguiente triángulo. Explique el procedimiento. | Realiza la tarea por ensayo y error. | Construye el circuncentro usando las mediatrices del triángulo. |

**Tabla 10** Preguntas de la evaluación final

En la prueba final se identificaron 4 estudiantes que no mostraron un nivel de razonamiento ya fuera porque dejaban preguntas en blanco o sus respuestas eran irrelevantes; 14 estudiantes lograron reconocer elementos de las temáticas, ya usaban un lenguaje más acorde a los objetos de estudio y reconocían algunas propiedades de los puntos y líneas notables del triángulo, y 9 estudiantes reconocieron en la mayoría de situaciones las propiedades objeto de estudio. Estos resultados muestran un avance significativo en el nivel de razonamiento de la mayoría de los estudiantes.

**Las guías con sus respectivas planeaciones, la evaluación diagnóstica y la evaluación final, se pueden descargar en el siguiente enlace:**

http://matematicas27.webnode.com.co/news/secuencia-didactica/?_ga=2.99200024.746483327.1499993189-529812198.1499993189

## 5. Conclusiones y Recomendaciones

Dentro de las conclusiones y recomendaciones se pueden mencionar:

- Se logró evidenciar que las clases tradicionales de geometría producen pobres resultados para el desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes, esto se observa en los 9 estudiantes que no mostraron algún nivel de razonamiento y los 21 estudiantes que solo son capaces de reconocer aspectos globales e irrelevantes de las figuras geométricas.
- Se logró concluir que el uso de material concreto, en el caso de esta propuesta (tapas de gaseosa plástica, cartón, palillos, plastilina,...), favoreció el reconocimiento de los elementos y propiedades inmersas en las temáticas de puntos y líneas notables de triángulo, propició el trabajo colaborativo y despertó la curiosidad de los estudiantes para resolver cada una de las actividades propuestas. Esto reafirma una de las recomendaciones de los lineamientos curriculares de matemáticas de Colombia (MEN, 1998b) al señalar que "los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento" (p37).
- Se experimentó también que no todos los materiales son propicios para determinadas situaciones problemáticas, en el caso de las tapas de gaseosas plásticas, son pertinentes cuando el problema requiere que una misma tapa ocupe diferentes posiciones para determinar la más adecuada; en el caso de la lana, se observó que solo cumplió una función decorativa, mas no funcional; en este sentido, identificar los materiales pertinentes es una tarea del docente investigador.
- Organizar las actividades de acuerdo a la forma en que evoluciona el nivel de razonamiento de los estudiantes, permitió que estos se comprometieran más con su proceso de aprendizaje, eso se evidenció en la disciplina, el dinamismo de clase y el desarrollo de las guías.
- Se creó una secuencia didáctica de una temática que se aborda muy brevemente en los textos del grado octavo y que, sin embargo, gracias a la revisión bibliográfica se descubrieron una serie de aplicaciones muy interesantes que pueden ser elementos valiosos para que, en una futura profesión de diseño y construcción, se desarrolle el proceso con mayor detenimiento y precisión.

## 6. Bibliografía

Algarín, D. L. y Fiallo Leal, J. (2013). Caracterización de los niveles de razonamiento de Van Hiele específicos a los procesos de descripción, definición y demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas. *Revista Científica* (2), 56-60. DOI: 10.14483/23448350.5485

Berrío Valbuena, J. D., Fiallo Leal, J. E., y Acosta Gempeler, M. E. (2016). Estudio de la construcción de pasos de razonamiento en el proceso de justificación teórica en la resolución de problemas de geometría. VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 1611-1615. Montevideo.

Castaño, J., y Meneses, N. (2014). *Desarrollo del pensamiento espacial, un acercamiento desde la enseñanza de los triángulos, a través de un módulo didáctico.* (Tesis de maestría, Universidad de Antioquia). Recuperado de https://bit.ly/2zxPkjN

Chavellard, Y. (1997). *La Transposición didáctica-Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aiqué.

Congreso de Colombia. (8 de febrero de 1994). Ley General de Educación. [Ley 115 de 1994]. DO: 41.214.

Coxeter, H., y Greitzer, S. (1967). *Geometry Revisited*. New York: Random House.

Elliott, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

García, S., y López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría: Materiales para apoyar la práctica educativa*. México, D.F.: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Gibbs, G. (2012). *El análisis de datos cualitativos en Investigación Cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Jaime, A. (1993). *Aportación a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. (Tesis de doctorado, Universidad de Valencia). Recuperado de https://bit.ly/2qmwrfM

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Linares y M. Sánchez. (Eds.) *Teoría y práctica en educación matemática*, (295-384). Sevilla, España: Ediciones Alfar.

Leante, L. (2000). *Diccionario Oxford- Complutense de Ciencia*. Madrid, España: Complutense.

Martínez Hernández, C.R. (2016). *Implementación del enfoque resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas*. (Tesis de Maestría). UNAB, Bucaramanga, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Serie Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Molfino Vigo, V. (2011). *Lugares geométricos: ¿Cuál es su rol en la enseñanza de la Geometría? (*Tesis de maestría, Instituto Politécnico Nacional). Recuperado de https://bit.ly/2QqRiKo

Morales Chávez, C.A., y Majé Floriano, R. (2010). Competencia matemática y desarrollo del pensamiento espacial. Una aproximación desde la enseñanza de los cuadriláteros. *Memoria 11^0 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 472-481. Santa Fe de Bogotá.

Oriol, J. (1846). *Elementos de Geometría y Dibujo Lineal*. Barcelona, España: Imprenta Catalana.

Pérez, M. (2009). Contenidos y competencias matemáticas. En Moral, C., y Pérez, M. (Coords.), *Didáctica-Teoría y práctica de la enseñanza*. (73-92). Madrid: Ediciones Pirámide.

Ramírez, N. (2014). *Estrategia Didáctica para la clasificación de triángulos y cuadriláteros orientado por el Modelo de Van Hiele y GeoGebra.* (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia). Recuperado de https://bit.ly/2qtqrSf

Real Academia Española. (2017). *Diccionario de la Real Academia Española.* (23ª ed.). Consultado en http://www.rae.es/

Rotaeche, R., y Montiel, G. (2009). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. *Educación Matemática, 29(*1*)*, 171-199. DOI:10.24844/EM2901.07

Vílchez Gonzáles, N.M. (2004). *Enseñanza de la Geometría con utilización de recursos multimedia. Aplicación a la primera etapa de educación básica*. (Tesis de doctorado, Universitat Rovira i Virgili). Recuperado de http://hdl.handle.net/10803/8928

**Rónal Darío Villamizar Ángel**. IE Gustavo Cote Uribe, Bucaramanga. Licenciado en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander y Magister en Educación de la Universidad Autónoma de Bucaramanga, con 9 años de experiencia docente. Nombrado desde el 4 de Agosto del 2015 como docente del sector oficial.
Email: ronal_villamizar@hotmail.com