NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 99, noviembre de 2018, páginas 105-126

La enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en el paso de la Educación Primaria a la Secundaria: el caso de Ainoa

Eugenia Torres Martín, (Instituto Serra de Miramar-Valls. España)
Jordi Deulofeu Piquet, (Universitat Autònoma de Barcelona. España)

Fecha de recepción: 24 de mayo de 2018
Fecha de aceptación: 9 de octubre de 2018

Resumen

Una determinada manera de explicar la proporcionalidad puede influir en el modo cómo los alumnos la aprenden; por ello nos planteamos explicar las consecuencias que la construcción del concepto de proporcionalidad, según la manera de enseñar de uno u otro profesor, tiene en el aprendizaje de una alumna concreta. Para esto realizamos un estudio de caso centrado en una alumna, Ainoa, a partir de sus intervenciones en ciertos episodios de clase de Sexto curso de Primaria y Primer curso de Secundaria. El análisis de la práctica realizado nos muestra la importancia de la elección por parte del profesorado de los ejemplos concretos para la comprensión tanto del concepto de proporcionalidad como de la técnica de reducción a la unidad.

Palabras clave

Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, proporcionalidad, función lineal, transición Primaria-Secundaria, conocimiento del profesor.

Title

The teaching and learning of proportionality in the transition from Primary to Secondary School: the case of Ainoa

Abstract

The way students learn in the classrooms may be influenced by every particular way proportionality is taught. Thus, the consequences that the construction of the concept of proportionality, linked with the way of one or another teacher teaches, have in the learning process of a particular student are the object of this paper. We carried out a case study focusedon a particular student, Ainoa, whose inputs are gathered from different lessons throughout Primary Sixth grade and Secondary First grade. The analysis conducted shows us the importance of the choice of particular examples, so as to understand both the concept of proportionality and the reduction technique unit.

Keywords

Mathematics teaching and learning, proportionality, linear function, transition from Elementary to Secondary School, knowledge of the teacher.

1. Introducción

La proporcionalidad es un tema complejo matemáticamente hablando y de los más difíciles de enseñar de la enseñanza obligatoria. La proporcionalidad es una relación de doble sentido: entre pares de valores de las dos variables, la dependiente y la independiente; y entre dos valores de la misma variable. De aquí que hablemos de la razón de proporcionalidad $k=y/x$ cuando se relacionan las dos magnitudes, o de la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ cuando se relacionan dos valores de la misma magnitud.

Adquirir el razonamiento proporcional supone comprender esta relación especial entre dos magnitudes relacionadas y que cambian a la vez, así como reconocer la función lineal $y=kx$.

En los primeros años de Secundaria, los estudiantes presentan dificultades y errores en el aprendizaje de la proporcionalidad, aunque su estudio se ha iniciado ya en la Educación Primaria. El papel del profesor como gestor del proceso de construcción del razonamiento proporcional tiene una especial relevancia, por lo que una cuestión importante es estudiar cómo sus actuaciones pueden influir en el aprendizaje del alumno. En este artículo presentamos un estudio de caso centrado en una alumna que hemos podido seguir, a partir de sus intervenciones en clase, en Sexto de Primaria y en Primer curso de Secundaria. El hecho de haber podido obtener datos de los mismos alumnos con un año de diferencia y en el mismo tema de proporcionalidad, nos ha permitido hacer este tipo de seguimiento a largo plazo. Ainoa nos muestra cómo la imagen que ofrece en Sexto de Primaria (6.ºP), con dificultades para entender tanto el concepto de proporcionalidad como la técnica de reducción a la unidad, cambia en el Primer curso de Secundaria (1.ºESO). Constatamos que un mismo alumno ha generado dos imágenes distintas con dos profesores diferentes, en dos cursos consecutivos, sin que de ello pueda deducirse una relación directa de causa efecto.

2. Objetivos y marco teórico

Este artículo forma parte de una investigación más extensa (Torres, 2015), contextualizada en la práctica matemática del docente, así como su influencia en el aprendizaje del alumno durante la transición de Primaria a Secundaria. El objetivo general de esta investigación es el análisis de la actividad docente en lo que concierne a la temática específica de proporcionalidad en 6.ºP y 1.ºESO, siguiendo el modelo de las cuatro categorías de Rowland (2008). Se trata de caracterizar cómo un profesor enseña dichos contenidos para explicar cuáles son los objetivos que se plantea y cómo promueve la construcción de los conceptos.

A partir del objetivo general, se plantean cuatro objetivos específicos de investigación. El primero consiste en elaborar un instrumento para realizar el análisis de la actividad docente en el aula. El segundo, analizar desde la práctica docente cuáles son los objetivos del profesor al enseñar el tema de proporcionalidad. El tercero, analizar desde la práctica docente cómo el profesor construye el concepto de proporcionalidad. Y el cuarto objetivo, explicar las consecuencias que una determinada construcción del concepto de proporcionalidad tiene en el aprendizaje de una alumna concreta. En este artículo nos centramos en los objetivos primero y cuarto. El primer objetivo, de tipo instrumental, se aborda en el tercer apartado, mientras que del cuarto nos ocupamos en el cuarto apartado.

Los ejes fundamentales en los que se apoya el marco teórico principal de esta investigación, centrada en la construcción del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad, son: el *Knowlegde Quartet* (KQ) y los factores que intervienen en el razonamiento multiplicativo y en la proporcionalidad.

El *Knowledge Quartet* es un constructo desarrollado por Tim Rowland (2008) para describir y analizar las observaciones hechas en el aula. El KQ es un marco conceptual adecuado para revisar y analizar episodios de clase, centrándose sobre todo en el contenido matemático del episodio y en el papel que desempeñan el *Subject Matter Knowledge* (SMK) y el *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) del profesor en prácticas de Primaria (Rowland, Huckstep, y Thwaites, 2005). Para Rowland era necesario que dicho marco fuese capaz de “recoger” las ideas y factores importantes sobre el conocimiento del contenido matemático a partir del análisis de las interacciones de los profesores con dicho contenido matemático y concretarlas en un número reducido de categorías conceptuales. Rowland distingue cuatro categorías de conocimiento de los profesores:

- *Fundamento* o conocimiento teórico de las Matemáticas *per se*. En esta categoría se recogen los conceptos principales sobre el contenido matemático y las relaciones entre los mismos. Comprende además el conocimiento de lo más significativo de la literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, las creencias concernientes a la naturaleza del conocimiento matemático, los objetivos de la educación matemática y las condiciones en las que los alumnos pueden aprender mejor Matemáticas. Se trata de los conocimientos que el profesor ha adquirido en su formación académica y en su práctica para prepararse como profesor.
- *Transformación* de los conocimientos del contenido por parte del profesor para que los alumnos sean capaces de aprenderlos. Esta categoría se relaciona con el conocimiento en acción, mostrado tanto en la planificación de lo que se va a enseñar como en el mismo acto de enseñar. El profesor transforma y presenta los conocimientos de distintas maneras para ayudar a los alumnos a aprenderlos, lo que conlleva la representación de los mismos en forma de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y pruebas. Es particularmente importante la elección que hace el profesor de los ejemplos con el fin de ayudar a los alumnos a entender un concepto y también a profundizar en el mismo, a adquirir el lenguaje adecuado y para mostrar la validez de procedimientos.
- *Conexión* o conocimiento en acción manifestado en la coherencia y planificación de los contenidos a enseñar. Esta categoría combina ciertas elecciones y decisiones que se hacen en partes concretas del contenido matemático, por lo que respecta a la coherencia de la planificación o de la enseñanza a lo largo de uno o varios episodios. Establecer conexiones se refiere a las acciones del profesor para relacionar conceptos, o procedimientos, o bien para relacionar conceptos y procedimientos. Por ello esta categoría se podría subdividir en: “establecer conexiones entre conceptos”, “establecer conexiones entre procedimientos”, “establecer conexiones entre procedimientos y conceptos” y también “entre representaciones de un mismo concepto” (De la Fuente, Deulofeu y Rowland, 2016).
- *Contingencia* o conocimiento en interacción en el aula, es decir, la capacidad del profesor para pensar sobre la marcha y responder a las intervenciones de los alumnos durante un episodio de clase. Esta categoría se manifiesta en los acontecimientos de la clase que no han sido planificados previamente por el profesor o que se desvían de la planificación hecha por el profesor para la clase. Las posibles actuaciones del profesor cuando se presenta una situación contingente van desde desviarse de lo que tenía programado cuando la contribución inesperada de un alumno pueda resultar particularmente beneficiosa a dicho alumno y a la mayoría de la clase, o pueda implicar una vía de investigación productiva, hasta la no consideración de la intervención, pasando por diversos caminos intermedios.

Estas categorías serán concretadas sobre la temática de proporcionalidad en el apartado 3 al describir la elaboración del instrumento para analizar la práctica en el aula.

Caracterizar lo que se le pide saber al profesor de Matemáticas de Primaria y de Secundaria sobre proporcionalidad supone analizar los factores que intervienen en el razonamiento multiplicativo y en la proporcionalidad: concepto, situaciones en las que puede aplicarse, modelos tanto informales como formales de razonamiento proporcional (incremento gradual aditivo, reducción a la unidad o regla de tres) y dificultades en el aprendizaje de la proporcionalidad. Para ello hemos utilizado como referencia fundamental a Susan Lamon (2007), que realizó un estudio longitudinal con alumnos de 8 a 12 años, partiendo del concepto de fracción y de las diferentes interpretaciones del número racional –parte-de-un-todo, cociente, medida, razón y operador- para abordar después las cuestiones de proporcionalidad: entender la proporcionalidad como una relación de doble sentido, situaciones en las que puede aplicarse, la excesiva dependencia de la regla de tres, la técnica de reducción a la unidad, la proporcionalidad como función lineal y la confusión entre función lineal y función afín.

Entre las múltiples dificultades que pueden presentar los problemas de proporción, se encuentran: el contexto en el que se presentan las proporciones (Tourniaire, 1983, 1986); lo familiarizados o no que estén los alumnos con el uso de las proporciones en un contexto dado (Tourniaire, 1983); saber encontrar el valor-incógnita que falta en una proporción en relación a otras 3 cantidades y el uso excesivo de la proporcionalidad para resolver los problemas de valor incógnita (Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009); el contexto en el que se presenta un problema (Lamon 2006); saber si un determinado problema tiene que ver con cantidades discretas o continuas (Behr y otros, 1983; Pulos, Karplus y Stage, 1981); la presencia de razones internas/externas enteras o no (Van Dooren y otros, 2009) y la presencia de razones de la unidad, concretamente 1:2 (Hart, 1984, 1988; Karplus y otros, 1983; Noelting, 1980a, 1980b).

También hemos considerado referencias sobre investigaciones centradas en alumnos o futuros profesores. Varios estudios sobre el desarrollo del razonamiento proporcional (Singer, Kohn y Resnick, 1997) avalan que los niños son capaces de hacer juicios sobre relaciones proporcionales antes de ir a la escuela. Estos juicios se relacionan con un razonamiento intuitivo que es producto de su experiencia personal. Un estudio (Van Dooren, De Bock, y Verschaffel, 2010) con alumnos de 8 a 11 años muestra cómo se produce una evolución desde la aplicación de estrategias aditivas en los primeros años de la Educación Primaria, a la utilización de estrategias de proporcionalidad en los últimos años, pasando por un estadio intermedio en el que se aplican métodos aditivos a problemas de proporcionalidad y estrategias de proporcionalidad a problemas aditivos, dependiendo de si las razones que aparecen en los problemas son enteras o no. Otro estudio (Fernández, y Llinares, 2012) con alumnos de Educación Primaria y Secundaria identifica cinco perfiles de comportamiento de los estudiantes cuando estos resuelven problemas aditivos y proporcionales y cómo varían estos perfiles desde la Educación Primaria a la Secundaria. Se muestra que un mayor nivel de éxito en los problemas proporcionales no evidencia el desarrollo del razonamiento proporcional al incrementarse también las respuestas proporcionales en los problemas aditivos. Por otra parte, otras investigaciones indican que los estudiantes para maestro tienen dificultades para interpretar las respuestas de los alumnos de Primaria cuando resuelven tareas relacionadas con el razonamiento proporcional (Balderas, Block, y Guerra, 2014).

Finalmente, a partir del KQ y de los factores que intervienen en la proporcionalidad construimos un instrumento para poder realizar el análisis de la actividad docente en el aula.

3. Metodología

La metodología utilizada es de tipo cualitativo y se centra en el estudio de casos. Entendemos que la práctica docente debe estudiarse analizando la realidad del aula y los estudios relevantes de los que disponemos sobre esta temática son asimismo cualitativos, como los que ha realizado Rowland (2005 y 2008). La investigación se ha contextualizado en alumnos que fueron observados y grabados en 6.ºP y en el 1.ºESO en dos centros educativos públicos distintos (uno de Primaria y uno de Secundaria), obteniendo los datos para nuestra investigación a partir de la videograbación en el aula de todas las clases (8 de 6.ºP y 8 del 1.ºESO) que se ocuparon de la temática de la proporcionalidad en dos cursos sucesivos, 2010-11 y 2011-12. La realización de las grabaciones de aula fue posible gracias al proyecto de investigación *Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre Primaria y Secundaria* (EDU 2009-07298) y a un convenio con el *Consorci d'Educació* de la ciudad de Barcelona. Este ha sido un contexto adecuado para estudiar satisfactoriamente la práctica docente -tanto del profesor de Primaria, de formación generalista, como del profesor de Secundaria, de formación especialista-, además de estudiar la transición de etapa de Primaria a Secundaria.

Una vez recogidos los datos, se transcribieron todas las clases de proporcionalidad subdividiéndolas en episodios según el contenido desarrollado. De los 48 episodios identificados, 15 son de 6.ºP y 33 del 1.ºESO. Esta desproporción en el número de episodios se debe a que el número de horas de clase en Secundaria dedicadas a la proporcionalidad fue considerablemente mayor al número de horas en Primaria. El criterio para delimitar un episodio ha sido el contenido desarrollado en el mismo, es decir, si hay un cambio de contenido de proporcionalidad, si se trabaja un contenido o un concepto, si se trabajan ejemplos sobre un concepto, si se explica una técnica, si se ponen ejemplos de una técnica o si se relaciona una técnica con un concepto.

Para hacer un análisis de la práctica docente vimos que no era necesario considerar todos los episodios, sino aquellos que además de referirse tanto a conceptos como a técnicas, ofrecían enfoques diferentes, en algún sentido, por parte del profesor. Elegimos los tres pares de episodios que se revelaban más ricos para hacer un análisis de la práctica docente, a saber, aquellos que abordaban la introducción de la técnica de reducción a la unidad y en los que se introducía el concepto de proporcionalidad, pues en dichos episodios se construía de manera más evidente el concepto, se explicaba una técnica como la de reducción a la unidad y se relacionaba la técnica con el concepto.

Una vez centramos el análisis de la actividad docente en el aula en estos episodios, elaboramos un instrumento para realizar dicho análisis. Para ello, construimos una lista de indicadores a partir del marco teórico de referencia y de acuerdo con el modelo de las categorías de Rowland (2008). Elegimos este modelo porque es especialmente adecuado para el análisis de la práctica docente en el aula. Esta lista de indicadores ha sido el instrumento que hemos utilizado para hacer el análisis de dicha práctica.

3.1. Construcción de la lista de indicadores

Para construir una lista de indicadores que nos sirvieran para analizar cualquier episodio de clase sobre proporcionalidad, en primer lugar, elaboramos, a partir del marco teórico de referencia, una lista de contenidos (tabla 1) relacionados con el conocimiento del profesorado que concretasen los factores que intervienen en el contenido matemático de proporcionalidad y que nos sirvieran para analizar los episodios de clase referentes a la reducción de la unidad.

Nº	CONCEPTOS y/o PROCEDIMIENTOS
a	**Proporcionalidad**
a.1	Proporcionalidad directa
a.2	Proporcionalidad inversa
b	**Relaciones afines**
c	**Representaciones de situaciones de proporcionalidad**
c.1	Tabular
c.2	Gráfica
c.3	Algebraica
c.4	Homotética
d	**Procedimientos**
d.1	Informal
d.2	Reducción a la unidad
d.3	Regla de 3
d.4	Incremento gradual aditivo [$f(x+y)=f(x)+f(y)$]
d.5	Incremento gradual multiplicativo [$f(\lambda x)= \lambda f(x)$]
e	**Razón de proporcionalidad $k=y/x$**

e.1	Razón de proporcionalidad mayor que la unidad
e.1.1	Razón de proporcionalidad entera
e.1.2	Razón de proporcionalidad no entera
e.2	Razón de proporcionalidad menor que la unidad
f	**Razón escalar** $x_2/x_1=y_2/y_1$
f.1	Razón escalar mayor que la unidad
f.1.1	Razón escalar entera
f.1.2	Razón escalar no entera
f.2	Razón escalar menor que la unidad
REPRESENTACIONES y/o CONTEXTOS	
g	**Representaciones de números racionales: fracción, decimal y porcentaje**
g.1	Fracción como parte de un todo [3/4 es tomar 3 de las 4 partes en que puede dividirse la unidad]
g.2	Fracción como medida [3/4 es medir 3 unidades de ¼]
g.3	Fracción como operador [3/4 es multiplicar por 3 y dividir el resultado por 4]
g.4	Fracción como cociente [3/4 es lo que recibe cada uno cuando 4 personas se reparten 3 unidades]
g.5	Fracción como razón [3/4 como relación que compara “3 de A con 4 de B”]
h	**Ejemplos**
h.1	Ejemplo que introduce un concepto
h.2	Ejemplo que muestra la aplicación de un procedimiento o una técnica
h.3	Ejemplo que muestra distintos procedimientos pero poniendo énfasis en uno de ellos
h.4	Ejemplo que repite un procedimiento o técnica
h.5	Ejemplo que muestra los detalles o peculiaridades
h.6	Ejemplo que muestra un concepto más a fondo
h.7	Contraejemplo

Tabla 1: Contenidos

Este listado de contenidos nos permitió clasificar los episodios desde el punto de vista del contenido matemático de proporcionalidad, relacionando los contenidos que aparecían en cada episodio y viceversa, y así detectar los episodios más ricos y complejos con respecto al concepto, procedimiento, representación o ejemplo sobre proporcionalidad que se trabajase y que pudiesen resultar más interesantes para el análisis de la práctica docente. Elegimos tres pares de episodios para el análisis.

A partir del análisis de las acciones que hace la profesora del 1.ºESO en un episodio sobre introducción a la técnica de reducción a la unidad, viendo por ejemplo lo que sorprende, en positivo, lo que validan las respuestas de los alumnos, construimos una lista de indicadores para la práctica del profesorado a partir del modelo de las cuatro categorías de Rowland (*Fundamento-Transformación-Conexión-Contingencia*), considerándolas desde el punto de vista del contenido matemático de proporcionalidad. Añadimos una quinta categoría, que titulamos *General*, donde listamos una serie de indicadores no dependientes del contenido y que pueden aparecer en cualquier episodio de una clase de Matemáticas, independientemente de la temática, pero que no se pueden catalogar dentro de las cuatro categorías especificadas. Entendemos que esta categoría recoge una serie de indicadores que no están relacionados directamente con el contenido de proporcionalidad, ni con los procedimientos, ni con las situaciones de contingencia.

Como resultado obtuvimos una lista final de 39 indicadores (11 para la categoría de Fundamento, 11 para la de Transformación, 7 para la de Conexión, 4 para la de Contingencia y 6 para la de General). A continuación explicitamos las características más relevantes de cada categoría, el contenido de cada indicador y la inclusión de cada uno de ellos en una u otra categoría, teniendo en cuenta que dichos indicadores corresponden a la temática de proporcionalidad.

3.1.1. Fundamento

De acuerdo con la definición de esta categoría (apartado 2), al concretarla en el tema de proporcionalidad, los 11 indicadores que consideramos son:

1.1. Identificación de las magnitudes
1.2. Asignación de una medida a una magnitud
1.3. Características de las magnitudes (discreta, continua)
1.4. Utilización del incremento gradual aditivo [$f(x+y)=f(x)+f(y)$]
1.5. Utilización del incremento gradual multiplicativo [$f(kx)=kf(x)$]
1.6. Explicitación del procedimiento de reducción a la unidad
1.7. Trabajo de la relación de proporcionalidad entre pares de valores de las dos magnitudes y la relación entre pares de valores de la misma magnitud: la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$.
1.8. Tipo de razón de proporcionalidad $k=y/x$ (entera o no, mayor o menor que la unidad).
1.9. Tipo de razón escalar $x_2/x_1= y_2/y_1$ (entera o no, mayor o menor que la unidad)
1.10. Explicitación de la razón dada por el problema ($k=y/x$ o $x_2/x_1=y_2/y_1$).
1.11. Explicitación de la constante de proporcionalidad obtenida al hacer la reducción a la unidad para obtener la función de proporcionalidad.

3.1.2. Transformación

De acuerdo con la definición de esta categoría, al concretarla en el tema de proporcionalidad, los 11 indicadores que consideramos son:

2.1. Explicitación de que se va a enseñar una técnica para aquellos casos en que la razón de proporcionalidad $k=y/x$ no sea entera
2.2. Explicitación que permite diferenciar una técnica de un concepto
2.3. Uso de una representación de la situación del problema mediante dibujos o esquemas
2.4. Uso de un dibujo o esquema para construir un modelo
2.5. Asignación de un valor concreto a la representación en tabla de valores
2.6. Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de visualización gráfica
2.7. Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad a nivel de razón de proporcionalidad $k=y/x$
2.8. Elección de ejemplo introductorio a la reducción a la unidad utilizando un contexto adecuado
2.9. Uso que se hace de los ejemplos para conducir al alumno a descubrir la razón de proporcionalidad $k=y/x$
2.10. Uso que se hace de los ejemplos para conducir al alumno a aplicar la técnica de la reducción a la unidad
2.11. Uso que se hace de los ejemplos para conducir al alumno a descubrir la función lineal $y=kx$

3.1.3. Conexión

De acuerdo con la definición de esta categoría, al concretarla en el tema de proporcionalidad, los 7 indicadores que consideramos son:

3.1. Relación y comparación de la técnica de reducción a la unidad con otras técnicas como la regla de 3 y la técnica basada en la propiedad fundamental de las proporciones.
3.2. Énfasis en el descubrimiento de un modelo dentro del problema y búsqueda por parte de los alumnos de dicho modelo dentro del problema
3.3. Énfasis en la relación entre la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la técnica de reducción a la unidad
3.4. Énfasis en la relación entre la razón de proporcionalidad $k=y/x$ y la función lineal $y=kx$
3.5. Énfasis en la relación entre la técnica de reducción a la unidad y la función lineal $y=kx$
3.6. Visión del horizonte matemático hacia adelante: la proporcionalidad como modelo de función
3.7. Visión del horizonte matemático hacia atrás: modelos aditivos y multiplicativos

3.1.4. Contingencia

De acuerdo con la definición de esta categoría, al concretarla en el tema de proporcionalidad, los 4 indicadores que consideramos son:

4.1. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza métodos aritméticos informales
4.2. Gestión de intervenciones en las que el alumno generaliza la razón de proporcionalidad $k=y/x$ a partir de un caso concreto
4.3. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza la razón de proporcionalidad inversa $k'=x/y$
4.4. Gestión de intervenciones en las que el alumno utiliza la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ entre pares de valores de la misma magnitud

3.1.5. General

De acuerdo con la definición de esta categoría, al concretarla en el tema de proporcionalidad, los 6 indicadores que consideramos son:

Explicitación de los objetivos marcados para la clase

5.1. Claridad en el camino a seguir para llegar al objetivo
5.2. Generación por parte del profesor de una situación de aula interactiva
5.3. Explicitación reiterada de lo que se hace
5.4. Discusión activa del problema en la pizarra, escribiendo explícita y continuamente
5.5. Recapitulación del trabajo de los alumnos en relación con los objetivos de la clase

4. Análisis de los datos y resultados

Con esta lista de indicadores hemos analizado y comparado, desde el punto de vista del profesor, tres pares de episodios de clase de 6.ºP y del 1.ºESO extraídos de las dos primeras clases de proporcionalidad. Dicho análisis y comparación corresponde a una investigación más extensa (Torres, 2015) en la que se enmarca el estudio presentado en este artículo, tal como dijimos al comienzo del apartado 2. La selección de los episodios para analizar y comparar se ha realizado en función de cómo el profesor construye el concepto de proporcionalidad, de cómo explica una técnica como la de reducción a la unidad y de cómo relaciona la técnica con el concepto de proporcionalidad.

En dicho estudio (Torres, 2015) empezamos con los episodios sobre la introducción de la técnica de reducción de la unidad ya que son más ricos y complejos para analizar la práctica docente en el aula. En ellos se explica una técnica y se relaciona la técnica con el concepto de proporcionalidad. Asimismo entendemos que estos episodios son claves para detectar posibles diferencias en los objetivos de la enseñanza de la proporcionalidad, puesto que marcan la diferencia entre una enseñanza centrada en las técnicas para resolver ejercicios y problemas (como la regla de tres), y una enseñanza basada en la construcción de modelos (como el de la función de proporcionalidad $y=kx$). Después comparamos los dos pares de episodios que se refieren a la introducción del concepto de proporcionalidad.

Para contextualizar nuestra elección en el orden de comparación de los episodios, conviene destacar que en cuanto a la introducción del concepto de proporcionalidad, la manera de proceder de uno y otro profesor son bien diferentes. En primer lugar, difieren en las definiciones de proporcionalidad que ofrecen a los alumnos; en segundo lugar, se diferencian también en el momento en que dan la definición; y en tercer lugar, observamos secuenciaciones de las dos primeras clases de proporcionalidad, las que corresponden a la introducción del concepto de proporcionalidad y de la técnica de reducción a la unidad, bien diferentes. En el caso del profesor de Primaria, quiere desarrollar una técnica, por lo que su secuencia de clase es partir de la definición de proporcionalidad para desarrollar posteriormente la técnica de reducción a la unidad. En el caso de la profesora de Secundaria, quiere "modelizar" la proporcionalidad y de ahí que su secuencia de clase sea partir de un ejemplo y llegar a la definición de proporcionalidad. Después introduce la reducción a la unidad con el objetivo de llegar a la función de proporcionalidad. El hecho de programar secuenciaciones bien distintas puede deberse a que uno u otro profesor tenga en mente modelos de enseñanza bien diferentes.

Nos planteamos explicar en este trabajo las consecuencias que la construcción del concepto de proporcionalidad, según la manera de enseñar de uno u otro profesor, tiene en el aprendizaje de una alumna concreta. Por lo que vamos a realizar un estudio de caso centrado en una alumna, Ainoa, a partir de sus intervenciones en 5 de los 6 episodios de clase correspondientes a la introducción del concepto de proporcionalidad y a la técnica de reducción a la unidad, tanto en 6.ºP como en el 1.ºESO (se omite el episodio donde no interviene la alumna). Este seguimiento particular nos permite contextualizar la transición de Primaria a Secundaria, en primer lugar, en una temática concreta como la de proporcionalidad, concepto fundamental para la transición de etapa; y en segundo lugar, en dos profesores concretos y bien diferentes, con interacciones distintas en el aula, que pueden provocar diferencias notables en el aprendizaje de una alumna como Ainoa.

Creemos que es importante seguir a un estudiante particular para mostrar que el aprendizaje por parte del alumno no se produce en un día. Y hemos elegido a esta alumna, Ainoa, porque es un ejemplo de trayectoria de aprendizaje mediada por los dos profesores que tuvo, de modo que la imagen inicial que ofrece dicha alumna en 6.ºP, con dificultades para entender el concepto de proporcionalidad y la técnica de reducción a la unidad, cambia en el 1.ºESO al tener un profesor distinto al que había tenido en 6.ºP.

4.1. Intervenciones de Ainoa en Sexto de Primaria

Nos proponemos remarcar en cada intervención de Ainoa, cuál es el indicador involucrado de nuestra lista y cuál es la respuesta del profesor a la intervención de la alumna. Para ello, recogeremos en un cuadro cada intervención de Ainoa de un episodio concreto así como las respuestas del profesor a la misma. A veces hemos intercalado intervenciones de otros alumnos si nos han parecido pertinentes para contextualizar mejor la intervención de la alumna.

Señalaremos, siempre que sea posible, el número del indicador (entre corchetes) con el que se relaciona la intervención. Recordemos que los indicadores están pensados para analizar las acciones del profesor. En las intervenciones que reflejan errores de la alumna, señalaremos asimismo el indicador con el que tendría relación la intervención. Finalmente añadiremos una explicación después de cada intervención.

Conviene aclarar que los indicadores correspondientes a la categoría General no se señalan en las intervenciones puesto que haría falta transcribir el episodio completo para poder valorar la existencia o no de esos indicadores. Se hará un comentario al respecto, sobre cada profesor, al final del análisis.

Contextualización episodio 1. *El profesor introduce el concepto de proporcionalidad con la definición: "la proporcionalidad es una relación entre magnitudes mesurables", para a continuación proponer a los alumnos resolver el siguiente problema: "si 2 barras de pan cuestan 1,80€, ¿cuánto costarán 4 barras de pan?"*[1.7; 1.8; 1.9; 2.7 y 2.8]. *Después de resolver este problema, ofrece una segunda definición de proporcionalidad: "dos magnitudes son proporcionales si aumentan o disminuyen de la misma forma".*

Intervención 1	
Interviniente	**Diálogo**
Ainoa	Vicenç, yo haría 1,80 por 2
Profesor	1,80 por 2 ¿Por qué?
Ainoa	Cómo 2 barras valen 1,80 y son 2 barras más
Profesor	Lo que haría Ainoa: 1,80 por 2 [1.5]. Muy bien. ¿Se podría hacer otra cosa?
Alumno 1	El doble
Alumno 2	Se podría sumar 1,80 y 1,80.
Profesor	Se podrían sumar [1.4].
Ainoa	Que son 3,60.
Profesor	Que son 3,60. ¿Y se podría hacer otra cosa? ¿Qué?
Alumno 2	180 dividido entre 2 que da el precio de una, por 4.
Profesor	Muy bien también. 1,80 dividido entre 2 y el resultado multiplicado por 4, has dicho. ¿Veis? Cada uno lo haría de diferentes formas [1,80x2; 1,80+1,80; (1,80:2)x4] [1.5; 1.4 y 3.2].

Ainoa responde "yo haría 1,80 por 2" utilizando el incremento gradual multiplicativo. El profesor refuerza la intervención al concordar con el objetivo marcado para la clase: dos magnitudes son proporcionales si la razón escalar $x_2/x_1=y_2/y_1$ se mantiene. Si la razón x_2/x_1es 2, para encontrar el valor de y_2 en la tabla de proporcionalidad hay que multiplicar y_1 por 2.

Intervención 2	
Interviniente	**Diálogo**
Ainoa	¡Vicenç!, una barra vale 90 céntimos. [1.6]
Profesor	Por tanto, si ya sabemos lo que valen 4 barras, ¿cuánto costarían?

Ainoa reduce a la unidad al afirmar que “una barra vale 90 céntimos”. El profesor no recoge esta información aunque podría haberla aprovechado para guiar a los alumnos a encontrar que 4 barras costarán 0,90x4=3,60, introduciendo la reducción a la unidad. Esto puede deberse a que al profesor no le interese introducirla ahora para resolver el problema, ya que es la primera clase de proporcionalidad, y su objetivo es que los alumnos tengan un criterio para saber si dos magnitudes son proporcionales utilizando la razón escalar.

Intervención 3	
Interviniente	**Diálogo**
Profesor	A ver, me tenéis qué decir por qué son proporcionales estas dos magnitudes, ¿por qué son proporcionales?
Ainoa	Porque son dobles
Profesor	Porque son dobles. Este concepto lo habéis visto muy bien [4.4]. Hacemos otra para que lo veáis. Tengo más convidados… Pues ponemos 6. Venga va: 6. ¿Sabemos también el…? [señala el lugar de la tabla donde toca el precio de 6 barras]
Ainoa	Sí. 3,60 por 2
Profesor	¿Y qué daría?

A la pregunta del profesor de por qué las dos magnitudes son proporcionales, Ainoa contesta porque son dobles. El profesor refuerza esta intervención: cuando doblas el valor de una de las magnitudes, se dobla el valor correspondiente de la otra magnitud en la tabla. Entonces pregunta cuánto costarán 6 barras de pan y Ainoa, que ha visto que son 2 más (6=4+2), comete el error de “doblar” el valor correspondiente a 4 barras de pan y contesta 3,60 por 2. El profesor no la saca del error y atiende otras intervenciones que van en la línea de ver que ahora la razón escalares 3.

Intervención 4	
Interviniente	**Diálogo**
Ainoa	Pues yo tengo otro.
Profesor	Se pueden hacer muchas cosas.
Ainoa	1,80 por 6, no por 4
Profesor	¿Por qué? No… Por 6 no, porque aquí son 2 [4.4] [señala casilla 21 de la tabla, donde está el 2]

Para encontrar cuánto costarán 6 barras, Ainoa propone multiplicar 1,80 (lo que cuestan 2 barras) por 6. Inmediatamente rectifica y dice que por 4, pensando en el doble del doble, como si siempre hubiera que utilizar dobles. La alumna utiliza erróneamente la razón escalar. En este caso, el profesor la saca de su error haciéndole ver que $x_2/x_1=3$ y no 2.

Intervención 5	
Interviniente	**Diálogo**
Profesor	Por tanto, hemos visto que, incluso Ainoa ha pensado que 1 barra de pan… ¿cuánto vale 1 barra de pan? Aquí no está la unidad. ¿Cómo lo sabemos? [1.6 y 2.9] Habéis dicho que 2 valen 1,80, que valen 3,60 [señala las 4 barras] porque alguien ha dicho que es el doble, el doble será 3,60 [1.8 y 1.9]; después habéis dicho que es el triple, si ponemos 6 ¿sí o no? y ella ha dicho que de 1, ¿cuánto has dicho que vale 1 barra de pan?... 90 céntimos. Pero ¿cómo lo sabemos esto? [1.6 y 1.10]
Ainoa	180 entre 2
Profesor	90 entre 2 ¿Qué quiere decir esto? ¿Qué concepto es este?
Ainoa	Pues la división
Profesor	Pero ¿qué sería? Si esto es el doble [señala las casillas donde están el 2 y el 4], después tengo el triple [señala las casillas 2 y 6]… ¿Qué sería?
Ainoa	El 1
Profesor	Si tú divides 1,80 entre 2, te dará la unidad que tú has dicho ¿no? 90. ¿Esto qué es? [1.6 y 3.2]
Ainoa	Una unidad. La unidad.
Profesor	Sí, esto es lo que vale una barra de pan. Pero ¿qué es siempre que dividimos entre 2? ¿Qué hacemos?

El profesor destaca que Ainoa ha visto que 1 barra de pan vale 90 céntimos y pregunta a la clase cómo se ha llegado a este resultado si en la tabla no sale esta relación. Para ello recapitula todas las razones escalares que han aparecido porque quiere que los alumnos vean que la razón escalar ahora es ½. Ainoa responde que se llega a que 1 barra de pan vale 90 céntimos dividiendo 1,80 entre 2. El profesor pregunta qué concepto es este (por la intervención 4 sabemos que tiene en mente el concepto de la mitad, después de trabajar el doble y el triple) y Ainoa le responde “la división”, “el 1”, “una unidad”, “la unidad”. El profesor no aprovecha estas intervenciones para introducir la reducción a la unidad, como ya sucedió en la intervención 2. Su objetivo sigue siendo que los alumnos tengan un criterio para encontrar un valor en una tabla de proporcionalidad cuando la razón escalar sea 2, 3 ó ½.

Contextualización episodio 2. *A partir de la definición de la proporcionalidad como una relación entre magnitudes mesurables, los alumnos tienen que inventar dos problemas. El primero en el que las dos magnitudes sean proporcionales y el segundo en el que las dos magnitudes no sean proporcionales. Tienen que justificar en cada caso por qué las magnitudes son o no proporcionales. El profesor propone en la pizarra pares de magnitudes -peso y precio, tiempo y volumen, edad y peso, tiempo y número de espectadores-, para que los alumnos escojan las que quieran.*

Intervención 6	
Interviniente	**Diálogo**
Profesor	Veamos el de Ainoa, ¿cuál vas a hacer? ¿El de magnitudes proporcionales o no?
Ainoa	Tiempo y volumen
Profesor	Tiempo y volumen [1.1]. Venga lo haremos muy bien. Ella ha cogido las magnitudes el tiempo y el volumen. El volumen ¿en qué? [1.2] [Mientras la alumna, Ainoa, escribe en la pizarra en forma de tabla su problema].
Ainoa	En litros
Profesor	En litros, muy bien. ¿Y el tiempo?

Ainoa	Horas
Profesor	En horas [1.2], muy bien A ver. Venga, pero lee el problema, sino no sabemos de qué va. [La alumna está escribiendo en la pizarra la tabla, con las magnitudes y las unidades] [2.5]
Ainoa	Tengo una piscina y la quiero llenar y abro un grifo...
Profesor	¿Y qué pasa? Pero ¿cuánto tiempo?
Ainoa	Pues eso es lo que voy a ver. [La alumna escribe 1h y 100l.]
Profesor	Lleno la piscina durante 1h y en 1h la piscina llena 100l ¿no? Ella dice que en esta piscina, ella tiene el grifo funcionando durante 1h y en 1h deja 100l, está bien el problema.
Alumno 1	[Pero cuántos litros] caben en la piscina
Alumno 2	No se sabe
Ainoa	[Escribe 2h y 200l, 3h y 300l, mientras el profesor habla]
Profesor	En 2h, te llena 200l y en 3h, 300l [4.4]
Ainoa	Es proporcional.
Profesor	¿Es proporcional el tiempo y el volumen? ... el resultado es directo... venga, ¿cómo sabes que son 200l?
Ainoa	Porque esto es el doble [escribe al lado de 2h, doble] y esto es el triple [escribe al lado de 3h, triple]
Profesor	Muy bien. Ya vemos que aquí tenemos el concepto de doble y de ...
Alumno	Triple
Profesor	Triple... siempre y cuando lo que decís vosotros, caiga la misma cantidad de agua, porque si no, estas magnitudes difícilmente pueden ser proporcionales, el tiempo y el volumen ¿eh?

Ainoa utiliza las magnitudes de "tiempo y volumen" para poner su ejemplo de magnitudes proporcionales: "tengo una piscina, la quiero llenar y abro un grifo". Identifica bien las unidades de medida de las magnitudes: horas y litros. Utiliza la tabla de valores para poner los datos de su ejemplo: en una piscina en 1 hora entran 100 litros; en 2 horas, 200; y en 3 horas 300 litros. Y cuando el profesor le pregunta cómo sabe que son 200 litros, responde que como 2 es el doble de 1, pues a la derecha de la tabla "toca" poner un 200. Es decir, como la razón x_2/x_1 es 2, la razón y_2/y_1 también tiene que ser 2. Ainoa utiliza en su problema una razón de proporcionalidad $k=y/x$=100, mayor que la unidad y "fácil". Además, el primer dato que ofrece la alumna, a partir del cual escribe los restantes, es el que corresponde a la unidad: en 1h, 100 litros. El profesor señala que las dos magnitudes tiempo y volumen son proporcionales, siempre y cuando, "caiga la misma cantidad de agua", esto es, suponiendo que el caudal de agua del grifo, la razón volumen/unidad de tiempo, es constante.

Intervención 7	
Interviniente	**Diálogo**
	[Ahora se pasa al 2.º problema propuesto por Ainoa]
Ainoa	Tiempo y nº de espectadores [1.1]
Profesor	A ver cómo lo haces. Tiempo y ...
Alumno	Cantidad
Profesor	Y cantidad…

	Nº de espectadores, ¿vale? Tú pon tu problema y lee el problema porque si no, no sabemos de qué va. [Discusión entre profesor y alumnos porque Ainoa ha hecho el problema con otra alumna pero usando magnitudes diferentes en el mismo problema].
Ainoa	En un cine entran en 1h, 100… en 2h, 200 y en 3h, 300 [Lo escribe en la tabla de la pizarra] [2.5]
Profesor	Pero si... No, a ver Ainoa, era un problema proporcional y otro no proporcional.
Ainoa	Este no es proporcional
Profesor	¿Por qué?
Ainoa	Porque…
Profesor	Es proporcional ¿no? Yo veo aquí...
Ainoa	Pero si no me dejáis hablar pues no sabéis por qué no es proporcional.
Profesor	Venga, a ver, por qué no.
Ainoa	Porque en 1h entran 100 personas pero a lo mejor en 2h salen unas personas y no entran 200.
Alumno	¡Pero eso no lo explicas! No sabe la gente a qué hora tiene que entrar para…4h, 200.
Profesor	... que tu pongas aquí el dato de 200... y poner otro dato. ¿Vale? Con estos datos de aquí [los que Ainoa ha escrito en la pizarra] son proporcionales.
Ainoa	No.
Profesor	Sí. ¿Quién te ha dicho que no?... Conforme ella ha hecho aquí el problema, este par de magnitudes sí son proporcionales.
Ainoa	Pero Vicenç…
Profesor	A ver, ¿son proporcionales estas 2 magnitudes?, ¿son proporcionales? [Lo pregunta a la alumna con la que Ainoa ha pensado el problema]… Porque tal como lo ha planteado Ainoa es...
Alumno	Sí son proporcionales.
Ainoa	¡Qué va!... Que no… Pero eso es imposible, esto es no proporcional. [Sale la alumna que ha hecho el problema con Ainoa a explicar por qué no son proporcionales estas 2 magnitudes]
Profesor	Escuchemos venga... a ver lo que aporta.
Alumna	Yo creo que lo que le ha pasado a Ainoa es que... quito este trozo [borra la parte de la tabla de 3h] en 2h pues es [200 personas] aproximadamente [lo escribe al lado del 200]
Profesor	¿Tú lo has hecho así?
Alumna	Sí, claro. Porque... y la solución, es que aproximadamente entran 200, porque puede ser que haya de menos o de más.
Ainoa	Pues eso es lo que explicaba yo.
Alumna	Tú lo has puesto como si fijaras aquí operaciones y eso [señala a la parte de la tabla donde está el 200 escrito].
Ainoa	Que no.
Profesor	Vale. Entonces... Escucha [a Ainoa] que lo ha explicado muy bien. En 1h entran 100 personas. En 2h, ¿cuántas entrarían? ¡Ah! Por tanto, ¿se puede predecir?

Alumna	Pues 200 aproximadamente si va al mismo ritmo, porque si va diferente...
Profesor	No, no se puede predecir... ¿Alguien ha hecho algún ejemplo más claro de magnitudes que no sean proporcionales?
Alumna	Para mí sí.

Ainoa elige las magnitudes de “tiempo y número de espectadores” para poner su ejemplo de magnitudes no proporcionales. Utiliza la tabla de valores para poner los datos: en un cine entran en 1 hora, 100 personas; en 2 horas, 200 personas; y en 3 horas, 300 personas. El profesor le dice que con esos datos las magnitudes son proporcionales. Ainoa insiste en que no lo son y para argumentarlo dice que “en 1h entran 100 personas pero a lo mejor en 2h salen unas personas y no entran 200”. Es significativo como la alumna ha puesto exactamente los mismos valores para las magnitudes que en el problema de magnitudes proporcionales de tiempo y litros pero con la particularidad que cuando ha escrito 200, ha dicho “aproximadamente” 200.

Contextualización episodio 3. *Se propone a los alumnos resolver el siguiente problema: “para hacer un sorbete de limón se tienen que mezclar 3 limones y 6 cucharadas de azúcar. ¿Cuántas cucharadas de azúcar se tienen que mezclar con 5 limones?”* [1.7; 1.8; 1.9; 2.7 y 2.8].

Intervención 8	
Interviniente	**Diálogo**
Profesor	Siempre que tengamos dos números [señala el 3 y el 5] que no tengan relación, ni el doble ni la mitad ni el triple, reducimos a la unidad [1.6]. Imagínate que te preguntan aquí el 7, y el 3 y el 7 tampoco tienen relación, reducimos a la unidad. Reducimos a la unidad y sabemos que si de 3 es 6, de 1 es el 2 ¿no? ¿Qué pasa? Ya tenemos el 2 [1.8 y 1.9]. Ya sabemos que con 1 limón son 2 cucharadas de azúcar…
Ainoa	No lo entiendo
Profesor	Este concepto, ¿lo tenéis claro? de reducir a la unidad [1.6]. Es muy fácil ¿no? Siempre que tengamos un problema de estos, y dicen que no tienen relación, no es el doble, ni la mitad, ni el triple [1.9], voy a reducir a la unidad. Imaginad que aquí… ahora haré 2 problemas de reducir a la unidad.
Ainoa	No lo entiendo aún
Profesor	(…) Ahora veremos otro ejemplo ¿vale?
Ainoa	No entiendo este
Profesor	Este no lo entiendes, ¿qué no entiendes?
Ainoa	No. ¿Por qué ponemos un 2?
Profesor	Mira Ainoa, entre el 3 y el 6 ¿hay relación? [1.8].
Ainoa	Sí
Profesor	Entre el 3 y el 6 ¿qué es?
Ainoa	El doble
Profesor	El doble. Pues si para 3 necesitamos 6 cucharadas, para 1, ¿no necesitaremos también el doble?… Sí ¿no? Para 1… si para 3 necesitas el doble de cucharadas que son 6, para 1 limón ¿cuántas cucharadas necesitarás? El doble, el doble de 1 ¿cuál es?
Ainoa	2
Profesor	2, ¿sí o no?, ¿no lo entiendes? Pero ¿qué no entiendes? Si no me dices qué no entiendes… no decir no lo entiendo y ya está…
Ainoa	¿Por qué ponemos un 2?

Profesor	Se puede explicar de muchas formas. A ver Ainoa, escucha, aquí tú tienes el problema, el problema no te lo inventas tú, esto no lo tienes que saber porque el problema te da los datos ¿sí o no? Te dice que para hacer un sorbete de limón necesitas 3 limones y 6 cucharadas de azúcar ¿sí o no? Si tú lo quieres hacer con 1 limón, ¿cuántas cucharadas de azúcar necesitarás?, ¿6 también? No porque tienes menos limones ¿no? ¿Aquí no es el doble?, ¿no necesitas para 3 limones el doble de cucharadas?, pues para 1 limón necesitarás también el doble de cucharadas, ¿cuántas?
Ainoa	2
Profesor	2. El doble de cucharadas.
Ainoa	¡Ah! Vale
Profesor	Y para 5 limones necesitarás el doble de cucharadas, ¿son?
Ainoa	10
Profesor	Aquí sí.
Alumno	Siempre necesitas el doble del número que tienes.
Ainoa	A mí eso de dividir no…
Profesor	Lo de dividir y multiplicar viene de la regla de 3. Este problema se puede solucionar de esta forma, reduciendo a la unidad o con un regla de 3, que es lo que vamos a ver ahora.

Ainoa no entiende que para 1 limón hagan falta dos cucharadas de azúcar. No entiende de dónde sale el 2. Sin embargo, en el episodio 1 Ainoa había reducido a la unidad viendo que 1 barra de pan costaba 90 céntimos y en cambio, aquí no lo hace. El profesor intenta resolver la dificultad de la alumna hasta que al final entiende de dónde sale el 2, aunque no muy convencida pues dice "a mí eso de dividir no". Este problema del sorbete de limón presenta una dificultad y es que la razón de proporcionalidad es 2 y esto puede generar cierta confusión con la razón escalar que también puede ser 2, como en el ejemplo de las barras de pan. La insistencia del profesoren los conceptos de doble, triple o mitad para explicar cuando dos magnitudes son proporcionales, ha provocado cierta confusión en Ainoa.

4.2. Intervenciones de Ainoa en Primer curso de Secundaria

Seguimos la misma estructura utilizada en el análisis de los episodios de Sexto de Primaria.

Contextualización del episodio 4. *La profesora plantea a los alumnos el siguiente problema: "Si un coche hace con 10 litros de gasolina 1,2 vueltas al circuito de Montmeló ¿cuántas vueltas puede dar al circuito con 120 litros?"* [1.7; 1.8; 1.9; 2.7 y 2.8]. A partir de este ejemplo introduce la proporcionalidad como la relación que se conserva a ambos lados: "el factor de cambio en un lado [nº de vueltas] se respeta en el otro [nº de litros]".

Intervención 9	
Interviniente	**Diálogo**
Profesora	Y ¿si pongo 120l?... ¿Cuál ha sido el factor de paso de aquí [señala 10l]...? Este es el enunciado. Es que esta es la clave, por eso la he marcado. ¿Cuál ha sido el factor de paso de aquí [señala 10l] hasta aquí abajo [señala los 120l], Farfán? ¿Por

	cuánto he multiplicado el 10? [1.7 y 1.8] Venga Ainoa.
Ainoa	¿14,4?
Profesora	Sí, sí. Genial, si está superbien. Tomás explícanos porque Ainoa ha dicho el último resultado. Tú explícanos el proceso.
Alumno	1,2 por 120.
Tomás	Pues haces, multiplicas por 1, por 12...
Profesora	Genial, 10 por 12, que es lo que preguntaba Farfán. Perfecto, hemos hecho 10 multiplicado por 12 y entonces... [señala la derecha de la tabla].
Tomás	El 1,2 por 12.
Profesora	El 1,2 por 12 que son 14,4.
Ainoa	Yo lo he hecho de otra forma.
Profesora	Venga Ainoa. ¡Explícanoslo!
Ainoa	He hecho 50 que son 6 ¿no? Y como 120 es como 50 y 50, que son 100, entonces son 12 vueltas y sólo tengo que sumar 2 veces el 1,2.
Profesora	A ver, vuélvemelo a explicar
Ainoa	O sea, que 50 son 6 vueltas ¿no? Y como es 120, yo he cogido el 100 y he hecho 50 y 50, 12...
Profesora	Muy bien.
Ainoa	14,4
Profesora	Genial. Pinta bien. Ainoa lo que ha hecho, ha partido los 120, lo ha partido en trocitos con los cuales ella se encontraba cómoda [4.1]. Lo voy a explicar un momento en la pizarra. Al final no utilizaremos esta técnica pero me parece superingeniosa.

Ainoa encuentra el número de vueltas que corresponden a 120 litros de gasolina utilizando métodos aritméticos informales: "he hecho 50 que son 6 ¿no? Y como 120 es como 50 y 50, que son 100, entonces son 12 vueltas y sólo tengo que sumar 2 veces el 1,2". La profesora recoge la intervención de Ainoa y la explica para el resto de la clase: "Ainoa lo que ha hecho, ha partido los 120, lo ha partido en trocitos con los cuales ella se encontraba cómoda. Lo voy a explicar en la pizarra". Aunque la profesora tiene como objetivo el modelo de la función lineal $y=kx$, refuerza la intervención de la alumna.

Contextualización episodio 5. *La profesora plantea a los alumnos el siguiente problema: "Si 4 cajas de caramelos pesan 2 kilogramos, ¿cuántos kilogramos pesarán 1, 3, 5, 6, 10, 15 y 20 cajas de caramelos?"* [1.7; 1.8; 1.9; 2.7 y 2.8].

Intervención 10	
Interviniente	**Diálogo**
Laura	La mitad de 2 y la mitad de 1 [se refiere a los kilogramos].
Profesora	Ok, la mitad de 2 y la mitad de 2 que es ¿Ainoa?
Ainoa	0,5
Profesora	Sí 0,5. Pero aquí vas y haces 4 cajas, perdón 2kg [2.4].
Ainoa	¡Ah! Yo también lo he hecho así.
Profesora	2kg que reparto entre 4 cajas, ¿todos lo vemos? 2kg que reparto entre 4 cajas. Si hago 2 entre 4, el resultado es 0,5 [1.7]. ¿Ok todos? [Escribe a la altura del 0,5 (=2:4)].

	Entonces de esta manera ya hemos rellenado que si tengo 1 caja, 0,5 [1.6 y 1,10]. [Escribe 1 y 0,5]. Y ahora completar la tabla es superfácil. Sigrid, ¡2!...

Ainoa reduce a la unidad encontrando que 1 caja de caramelos pesa medio kilo y la profesora recoge su intervención para hacer ver a los alumnos que con la técnica de reducir a la unidad se puede encontrar de una manera rápida cualquier valor de proporcionalidad de la tabla.

Intervención 11	
Interviniente	**Diálogo**
Profesora	¡20!
Juanjo	10
Tomás	20 entre 2 es 10.
Profesora	Lo que dice Tomás no está mal. Tranquilos... Vamos a hablarlo todo. Lo que dice Tomás no está mal. Hombre si este 10 lo he multiplicado por 2, pues este 5 lo multiplicaré por 2 [1.7 y 1.8]. A mí no me parece mal. Esto es una de las cosas que vimos el otro día. Pero Ainoa tiene otra idea quizás.
Ainoa	Gloria, yo tenía un truco… Pues si tú te das cuenta, todos los números siempre es la mitad del número de cajas. Entonces a 20, si es la mitad, son 10 [1.10].
Profesora	Eso es lo que ha hecho Dani, creo recordar. Está bien, es un buen truco ¿sí? Es un buen truco, está bien pero hay otra cosa más allá ahí escondida [3.2] . Bianca venga.

Ainoa explica que para saber cuánto pesan 20 cajas de caramelos, hay que dividir por dos y son 10 kilos: “si tú te das cuenta, todos los números siempre es la mitad del número de cajas. Entonces a 20, si es la mitad, son 10”. La alumna utiliza que la razón de proporcionalidad es ½. La profesora recoge la intervención, afirma que es un buen método para encontrar la respuesta “pero que hay otra cosa ahí escondida”, refiriéndose al modelo $y=kx$.

Conviene resaltar que todos los indicadores de la categoría General (excepto el 5.4) aparecen tanto en los episodios de clase de 6.ºP como en los de 1.ºESO, puesto que el profesor explicita los objetivos marcados para la clase [5.1], es claro en el camino a seguir para llegar al objetivo [5.2], genera una situación de aula interactiva [5.3], promueve la discusión activa en la pizarra [5.5] y recapitula el trabajo de los alumnos en relación con los objetivos de la clase [5.6].

5. Discusión de resultados y conclusiones

Al caracterizar el aprendizaje de Ainoa en 6.ºP, constatamos que:

- *Entiende erróneamente el concepto de proporcionalidad, al asociar el concepto de proporcionalidad al hecho de doblar o triplicar magnitudes*. A partir del análisis de las intervenciones de Ainoa hemos observado que cuando ella construye el concepto de proporcionalidad a partir de una definición como la dada por el profesor de Primaria que se basa en el concepto de relación (la proporcionalidad es una relación entre magnitudes mesurables), tiene dificultades para entender el concepto. Incluso aunque el profesor haya intentado explicar con ejemplos a qué tipo de relación se está refiriendo (dos magnitudes son proporcionales si aumentan o disminuyen de la misma forma), como los ejemplos que ha puesto son esencialmente prototípicos (razones escalares 2, 3 ó ½), ha provocado que Ainoa identifique la proporcionalidad con doblar y triplicar magnitudes y esto le ha llevado a asociar que si una función es creciente es de proporcionalidad.

- *No entiende la proporcionalidad como una relación de doble sentido*. Por un lado, el profesor de Primaria da a la palabra “relación” el significado de “razón” pero sin concretar más, produciéndose un abuso del lenguaje. Por otro lado, cuanto más prototípico es un ejemplo (como en el caso del sorbete de limón), menos parece ayudar a construir el concepto de proporcionalidad. Ainoa no llega a relacionar la razón de proporcionalidad entre las dos variables y la razón escalar entre dos valores de la misma variable y esto podría deberse a que en este ejemplo la razón de proporcionalidad entre las dos variables es 2, igual que la razón escalar que el profesor utiliza para explicar la proporcionalidad, lo que no le permite a Ainoa completar correctamente los valores en la tabla. El ejemplo elegido para introducir la técnica de reducción a la unidad no ha resultado adecuado para que Ainoa pudiera desarrollar dicha técnica.
- *No establece puentes entre las técnicas de cálculo de que al doble o al triple de una magnitud le corresponde el doble o el triple de la otra, y la técnica de reducción a la unidad*. El profesor de Primaria se plantea como objetivo que los alumnos aprendan dicha técnica cuando tienen que completar una tabla de proporcionalidad que no resulta fácil de completar por “métodos informales”, sobreentendiendo por métodos informales, doblando, triplicando o dividiendo por 2 la variable implicada. Para ello el profesor elige un ejemplo (el del sorbete de limón) que no sirve al objetivo planteado y Ainoa no entiende la técnica porque tampoco ha entendido que la proporcionalidad es una relación de doble sentido. El ejemplo que elige el profesor es prototípico en cuanto a la razón entre las dos variables, que es 2, si bien pide encontrar el valor en una tabla de proporcionalidad donde la razón escalar es mayor que la unidad y no entera, lo que justificaría el uso de la técnica. El profesor de Primaria, en la manera de proceder al introducir la técnica de reducción a la unidad insiste que como entre los dos valores de la misma variable “no hay relación” (pues dicha razón no es ni 2, ni 3 ni ½), es necesaria una técnica. Ainoa no sólo no entiende que a un limón le correspondan 2 cucharadas de azúcar, sino que tampoco ve ninguna relación entre esta técnica y el hecho de que en el problema de las barras de pan ella dedujera sin problemas lo que costaba 1 barra de pan. Entendemos que la manera de proceder del profesor no provoca el establecimiento de este tipo de relaciones, puesto que ni el mismo profesor se hizo eco de la intervención de Ainoa en su momento. El profesor de Primaria podía haberla aprovechado para decir que lo que había hecho Ainoa en el problema de las barras de pan era reducir a la unidad y en que en la siguiente clase utilizarían este método para encontrar valores en una tabla de proporcionalidad; o también podía recuperar la intervención de Ainoa después de introducir la técnica de reducción a la unidad, relacionando los dos ejemplos, el de las barras de pan y el del sorbete de limón.Ainoa no entiende cómo se reduce a la unidad en este ejemplo (del sorbete de limón) y por tanto no es capaz de completar la tabla de proporcionalidad. Ainoa no ha conectado el concepto con la técnica de reducción a la unidad e incluso no sabe aplicar la técnica.
- *No entiende la diferencia entre magnitudes proporcionales y no proporcionales*. En efecto, cuando la alumna al responder a una tarea del profesor de Primaria elige los ejemplos de pares de magnitudes proporcionales y de pares de magnitudes no proporcionales, escoge correctamente las magnitudes, si bien no elige convenientemente los valores numéricos que debe poner en las tablas para mostrar la proporcionalidad en un caso y la no proporcionalidad en el otro. Ainoa ha elegido las magnitudes de “tiempo y volumen” para poner su ejemplo de magnitudes proporcionales y las magnitudes de “tiempo y número de espectadores” para poner su ejemplo de magnitudes no proporcionales. En este último caso, ha elegido bien las magnitudes para poner el ejemplo pero cuando trata de ejemplificarlo numéricamente, utiliza exactamente los mismos valores que ha escogido en el caso de las magnitudes de “tiempo y volumen” y que coinciden a su vez con los valores de los ejemplos

prototípicos del profesor de Primaria: una razón de proporcionalidad entre las dos variables mayor que la unidad y entera, 100, y como razones escalares entre dos valores de la misma variable 2 y 3. En el primer caso hay relación proporcional entre las variables mientras que en el segundo caso no. Para Ainoa "relación" quiere decir relación funcional y puede ser de un tipo (proporcional) o de otro tipo (no proporcional), si bien al poner los mismos datos numéricos en las dos tablas, da a entender que ambas relaciones son de proporcionalidad, por lo que se contradice. Incluso, aunque explica que cuando escribe "200", quiere decir que pueden ser unas pocas personas más o menos, al escribir los mismos datos numéricos está pensando en la función de proporcionalidad y da a entender que ambas relaciones son de proporcionalidad, evidencia de que no ha entendido la diferencia entre magnitudes proporcionales y no proporcionales.

- *No es capaz de conectar lo cualitativo con lo cuantitativo*. En el contexto del cine Ainoa sabe que las magnitudes de "tiempo y número de espectadores" no pueden ser proporcionales pero cuando construye una tabla de valores, repite los mismos valores en el caso de magnitudes proporcionales y en el caso de magnitudes no proporcionales. Podría haber puesto en vez de 200 un valor que se viera claramente que no es el doble de 100 y no lo hace, a pesar de que comenta que el 200 puede ser aproximado. Para ella los datos de la tabla no sirven para determinar el tipo de relación entre las dos magnitudes. Escribe estos datos en la tabla porque está en el tema de proporcionalidad y los únicos ejemplos de tablas que ha visto son los de proporcionalidad. La alumna es consciente que empíricamente, las magnitudes tiempo y número de espectadores no pueden ser proporcionales, pero esto no se traduce en escribir unos datos en la tabla de valores que lo muestren. Parece no saber pasar lo que es su conocimiento de unas magnitudes que no son proporcionales a lenguaje matemático, esto es, a valores en la tabla. Separa completamente una cosa de la otra.

Entendemos que la definición de proporcionalidad ofrecida por el profesor y los ejemplos prototípicos utilizados (razones escalares 2, 3 ó ½) no fueron suficientes para que Ainoa construyera el concepto de proporcionalidad y no evitaron las dificultades en este punto.

Por otra parte, al caracterizar el aprendizaje de Ainoa en el 1.ºESO, constatamos que:

- *Entiende el concepto de proporcionalidad porque es capaz de utilizarlo de manera efectiva*. La profesora de Secundaria se plantea relacionar desde el principio la proporcionalidad con la función de proporcionalidad, y el desarrollo de la técnica de reducción a la unidad no es más que un instrumento para que el alumno vea la función de proporcionalidad y el modelo que se encuentra tras dicha técnica. En el ejemplo que la profesora propone (el de las cajas de caramelos) la razón de proporcionalidad entre las dos variables no es entera (1/2). Ainoa ve claramente esta razón, lo que le permite encontrar rápidamente los valores correspondientes en la tabla de proporcionalidad sin cometer errores e incluso ver el modelo, pues afirma: "si te das cuenta, todos los números siempre es la mitad del número de cajas". Vemos como en este caso el ejemplo que la profesora de Secundaria elige para introducir la técnica de reducción a la unidad parece servir al objetivo planteado de desarrollar la técnica como herramienta para construir la función de proporcionalidad. Ainoa es un ejemplo de lo importante que es que el alumno llegue a una definición siguiendo un proceso de construcción de la misma puesto que le puede capacitar para establecer puentes entre el concepto, la técnica y el modelo de función lineal.
- *Entiende correctamente la técnica de reducción a la unidad*. Las intervenciones de la alumna así lo muestran aun cuando en este caso la razón de proporcionalidad no sea entera, ½, y sea más difícil de deducir que en el caso del problema de Primaria que es 2. Creemos que en el caso del profesor de Primaria, el hecho de que haya insistido en su introducción al concepto de proporcionalidad en buscar valores de una tabla de proporcionalidad donde la

razón entre dos valores de la misma variable es 2 puede haber causado confusión a esta alumna, justamente en un problema como el elegido para introducir la técnica de reducción a la unidad donde la razón de proporcionalidad entre las dos variables también es 2.

En cuanto a los ejemplos utilizados por los profesores y su importancia para el aprendizaje, constatamos que:

- En 6.ºP, el profesor no ha sabido encontrar los ejemplos adecuados para que Ainoa construya el concepto. Son esencialmente prototípicos incluso para explicar el concepto de "relación". El tipo de ejemplo elegido para introducir la técnica de reducción a la unidad (sorbete de limón), al ser prototípico, parece dificultar a Ainoa la comprensión de la técnica.
- En cambio, en el 1.ºESO, los ejemplos elegidos para introducir la técnica de reducción a la unidad (cajas de caramelos), donde la razón de proporcionalidad es simple pero no entera, parecen permitir a Ainoa comprender y utilizar dicha técnica.

Esto nos muestra la importancia de la elección de un ejemplo concreto para la comprensión tanto de un concepto como de una técnica. También nos muestra que las dificultades de la alumna no son sólo de ella sino que forman parte del proceso de enseñanza-aprendizaje que se produce en el aula. En este proceso no se puede separar enseñanza de aprendizaje: a un determinado modelo de enseñanza le corresponde un determinado aprendizaje.

Bibliografía

Balderas, R., Block D. y Guerra, M.T. (2014). Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestro de secundaria. *Educación Matemática*, 26 (2), 7-32.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. R. y Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. En Lesh, R. y Landau, M. (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91-126. Orlando, FL: Academic Press.

De la Fuente, A., Deulofeu, J. y Rowland, T. (2016). Conectar lenguajes para resolver ecuaciones. *UNO*, 74, 68-73.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (1), 129-142.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. London: NFER-Nelson.

Hart, K. M. (1988). Ratio and proportion. En Hiebert, J. y M. Behr, M. (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades*, 198-219. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Erlbaum.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Proportional Reasoning of Early Adolescents. En Lesh, R. y Landau, M. (Eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, 45-90. Orlando, FL: Academic Press.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework. En Lester, F. K. jr. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 629-668. Reston, VA-Charlotte, NC: National Council of Teachers Mathematics-Information Age Publishing.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 1-Differentation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 217-253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part 1-Problem-structure at successive stages; Problem-solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 331-363.

Pulos, S., Karplus, R. y Stage, E. K. (1981). Generality of proportional reasoning in early adolescence: Content effects and individual differences. *Journal of Early Adolescence*, 1, 257-264.

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. En Sullivan, P. y Wood, T. (Eds.) *International handbook of mathematics teacher education: Vol.1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Rowland, T., Huckstep P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8 (3), 255-281.

Singer, J., Kohn, S. y Resnick, L. (1997). Knowing about proportions in different contexts. En Nunes, T. y Bryant, P. (Eds.). *Learning and teaching mathematics: An international perspective*, 115-132. Hove: Psychology Press.

Tourniaire, F. (1983). Some aspects of proportional reasoning in young children. En Bergeron, J. C. y Herscovics, N. (Eds.). *Proceedings of the fifth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 319-324. Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 410-412.

Torres, E. (2015). El conocimiento del profesor de Matemáticas en la práctica: la enseñanza de la proporcionalidad. Tesis doctoral. UAB. Disponible en https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2015/hdl_10803_290741/etm1de1.pdf

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. y Verschaffel, L. (2009). Students' overuse of proporcionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 187-211.

Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back: The development of student's additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28 (3), 360-381.

Eugenia Torres Martín, natural de Las Palmas. Licenciada en Matemáticas (U. de Barcelona, 1991) y Doctora en Didáctica de las Matemáticas (U. Autònoma de Barcelona, 2015). Profesora de Enseñanza Secundaria en el Instituto Serra de Miramar de Valls (Tarragona). Investigación en: Estudio de la práctica del profesor de matemáticas, Proporcionalidad y Resolución de problemas.
eugetor@gmail.com

Jordi Deulofeu Piquet, licenciado en Matemáticas (U. de Barcelona, 1976) y Doctor en Didáctica de las Matemáticas (U. Autònoma de Barcelona, 1993). Profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la UAB. Director del Máster de Secundaria de Matemáticas. Investigación en: Competencia matemática, Resolución de problemas y Estudio de la práctica del profesor de matemáticas.
jordi.deulofeu@uab.cat