NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 99, noviembre de 2018, páginas 153-171

Demostrando con GeoGebra

Cynthia Bolaños Florido (Universidad de Granada. España)
Juan Francisco Ruiz Hidalgo (Universidad de Granada. España)

Fecha de recepción: 13 de Febrero de 2018
Fecha de aceptación: 18 de Julio de 2018

Resumen En este artículo aportamos material didáctico al profesorado de Educación Secundaria Obligatoria con la intención de fomentar el desarrollo de la Geometría de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas del tercer curso, mediante el uso del software GeoGebra y haciendo hincapié en la importancia de las demostraciones geométricas.

Palabras clave Material didáctico, Secundaria, Geometría plana, Demostración geométrica y GeoGebra.

Title **Proving by using GeoGebra**

Abstract In this article we provide a teaching proposal for eleventh grade with the intention of encouraging the development of Geometry in the subject Mathematics Oriented to the Academic Training, through the use of GeoGebra software and emphasizing the importance of the geometric proofs.

Keywords Teaching resources, Secondary Education, Plane Geometry, Geometric proof and GeoGebra.

1. Introducción

La actual propuesta curricular (MECD, 2015) da a la Geometría un papel importante en las Matemáticas de la Educación Secundaria. Podemos encontrar en dicha propuesta contenidos como los elementos de la geometría plana, los lugares geométricos, las traslaciones, giros y simetrías en el plano e incluso el uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Desde el punto de vista de la investigación, también existen multitud de trabajos que manifiestan la inquietud por la importancia del estudio de la Geometría dentro de las aulas de Educación Secundaria Obligatoria y la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje. Sirvan como ejemplo los trabajos de Gamboa y Ballestero (2009), Gutiérrez (2004) o Gutiérrez y Jaime (2012). Dentro de estas propuestas, cabe destacar que la incorporación de las tecnologías a nuestra vida diaria ha hecho que gran parte de dichas investigaciones se centren en el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) como recurso en el aula.

Tanto los actuales documentos curriculares como los trabajos de investigación subrayan la importancia de que el proceso de enseñanza de la Geometría deje de estar basado en la simple colección de nombres y figuras estereotipadas, propiedades evidentes y un catálogo de fórmulas como vino haciéndose en los libros de texto de finales del siglo XX (Mora, 2007). Esta superación debe dirigirse hacia el desarrollo de capacidades tal y como expresan Gamboa y Ballestero (2010):

> La enseñanza de la geometría debe centrarse en desarrollar, en el estudiantado, habilidades para la exploración, visualización, argumentación y justificación, donde más que memorizar puedan describir, aplicar y obtener conclusiones. El cuerpo docente debe interiorizar que en este proceso no es el principal actor, sino los estudiantes, los cuales deben ser promotores de su aprendizaje a partir de su "guía'', donde las actividades planteadas y los recursos disponibles faciliten y contribuyan a dicho proceso. (p. 140).

Según Barrantes y Balletbo (2011), los recursos tecnológicos facilitan, activan y desarrollan los procesos de adquisición de las competencias geométricas. En particular, Novembre, Nicodemo y Coll (2015, citado en Freyre y Mántica (2017)) determinan que las habilidades anteriores que forman parte de las funciones de la demostración tomadas de De Villiers (1990), pueden ser desarrolladas de forma efectiva mediante el uso de softwares matemáticos como el GeoGebra. Es por ello que pongamos el énfasis de este trabajo tanto en las demostraciones matemáticas como en dicho software.

La propuesta se enmarca dentro de la innovación docente y consiste en la elaboración de un material didáctico específico compuesto por una recopilación de tareas enfocadas al uso de la demostración dentro del bloque de Geometría de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas del tercer curso de Educación Secundaria. El planteamiento de las tareas requiere del uso del software de geometría dinámica, denominado GeoGebra, así como de una serie de guiones que permitan orientar a los alumnos y alumnas en su proceso de resolución. En todo momento de la elaboración se han tenido en cuenta los referentes teóricos que aparecen en la sección 2: competencia matemática, aprendizaje cooperativo y demostración matemática.

El material docente que se propone busca fomentar las capacidades de los alumnos y alumnas del tercer curso de Educación Secundaria de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. Cabe destacar que la intención no es que el alumnado se familiarice con el software GeoGebra ni que aprenda nuevos conceptos y propiedades. La idea es que el estudiantado, habiendo conocido dicho software, así como los contenidos abordados, pueda reajustar y reconstruir lo aprendido, quede orientado a nuevos aprendizajes, aprenda a generalizar, explicar o justificar resultados…

Las actividades planteadas están pensadas para realizarse en grupos o parejas siguiendo la metodología del Aprendizaje Cooperativo. Este tipo de metodología facilita la puesta en práctica de la innovación en diversidad de centros educativos, independientemente de los recursos de los que dispongan. Además, mediante este tipo de metodología, se pretende fomentar la participación, la comunicación y el interés por la materia.

Este trabajo va acompañado de un libro de GeoGebra donde se han implementado los archivos considerados en el trabajo. Para acceder a dicho libro es necesario descargarse el software.

- Link de descarga del software GeoGebra: https://www.geogebra.org/download
- Libro de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/MUxKVfFr

2. Aspectos teóricos

El trabajo propuesto se fundamenta en cuatro pilares: la competencia matemática, el aprendizaje cooperativo, las TICs y, más concretamente, GeoGebra y, finalmente, la demostración en educación matemática. A continuación, pasamos a analizar cada uno de estos aspectos.

2.1. Competencia Matemática

La noción de competencia es, desde hace algunos años, central en la educación española. Según MECD (2015) es una "combinación de habilidades prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos, actitudes, emociones, y otros componentes sociales y de comportamiento que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz" (p.170). Más concretamente, la competencia matemática "alude a los modos en los que los estudiantes actúan cuando usan las matemáticas y cuando se enfrentan a problemas de la vida cotidiana" (Flores y Lupiáñez, 2016, p.188).

Sin embargo, esta noción de competencia no es operativa ni expresa claramente las capacidades específicas que se desea que adquieran los estudiantes. La evaluación del grado de desarrollo que al alumnado logra es muy complicada de observar al no explicitarse en el desarrollo curricular ningún instrumento de guía para el seguimiento de esta.

Para solventar este problema, podemos ser más específicos organizando la competencia matemática en varias "subcompetencias" o capacidades. Para ello se pueden utilizar las siete capacidades específicas o singulares recogidas en el marco PISA (OCDE, 2013). Dichas competencias matemáticas específicas son: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, utilización de operaciones y lenguaje simbólico, formal y técnico, y utilización de herramientas matemáticas. Una revisión detallada del currículo básico (MECD, 2015) permite identificar todas ellas en el texto.

2.2. Aprendizaje Cooperativo

Según Smith (1996, p.71), un grupo cooperativo en educación es un pequeño grupo en el que los alumnos y alumnas trabajan juntos con el fin de maximizar el aprendizaje, tanto el propio como el de los demás. La "meta cooperativa" es que los componentes del grupo trabajen juntos generando un ambiente de armonía y apoyo, mientras que la "meta colaborativa" va más allá, ya que busca que los componentes del grupo se desarrollen como personas reflexivas, autónomas y elocuentes (Barkley, Cross y Howell, 2007).

Domingo (2008) señala que, para mejorar el proceso de aprendizaje, los alumnos y alumnas deben trabajar de forma conjunta como lo hace la metodología del Aprendizaje Cooperativo. Dicho autor revela que muchos docentes sienten miedo a poner en práctica dicha metodología. Sin embargo, textualmente Domingo (2008) añade que:

> Aquellos docentes que han experimentado el trabajo cooperativo han descubierto que sus estudiantes aprenden más y mejor, que no abandonan las clases, que se interesan por la materia y que comparten con sus compañeros elementos que van más allá de las aulas. (Domingo, 2008, p. 245).

Según Fariña (2016), el Aprendizaje Cooperativo se encuentra presente en el Constructivismo Social de Lev Vigotsky y su Zona de Desarrollo Próximo. Además, determina que el Constructivismo defiende que el ser humano adquiere el conocimiento a partir de una adaptación de los esquemas mentales existentes con los estímulos que percibe. En particular, el Constructivismo Social considera que el sujeto es un ser social y que su nivel de conocimiento depende por tanto de la sociedad y no de su desarrollo cognitivo como defiende Jean Piaget.

2.3. GeoGebra

Actualmente, algunas de las tendencias de pensamiento de los investigadores en didáctica de las matemáticas se enfocan en el uso de las nuevas tecnologías y el aprendizaje Cooperativo. Mora (2007) afirma que a día de hoy existe multitud de herramientas informáticas que facilitan la labor al docente. En particular, destaca que los programas de geometría dinámica han permitido que la propia Geometría deje de ser estática y pase a tomar un carácter dinámico. Dentro de todos los tipos de software de geometría dinámica que existen, nos gustaría destacar el software GeoGebra por sus amplias posibilidades pedagógicas como señala Esteley, Marguet y Cristante (2012, citado en Freyre y Mántica (2017)).

Según Flores (2016), el software GeoGebra posee una sencilla interfaz y una gran variedad de herramientas geométricas y algebraicas que permiten realizar un gran número de construcciones. Además, al tratarse de un software de geometría dinámica, los alumnos y alumnas pueden modificar las figuras, manteniendo fijada las condiciones que consideren oportunas. Esto permite que los estudiantes puedan realizar conjeturas, generalizaciones e incluso intuir qué formas se pueden obtener en ciertas condiciones.

Según Mora (2007), el uso de GeoGebra favorece la adquisición de las siete capacidades matemáticas fundamentales que permiten estudiar la competencia matemática. Sin embargo, a pesar de todas las ventajas que las TICs proporcionan al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría, autores como Ballestero y Gamboa (2010), afirman que los principales recursos didácticos utilizados en el aula para el desarrollo de este proceso son la pizarra, los libros de textos y el material fotocopiable.

2.4. Demostración

La demostración es reconocida por muchos autores como el procedimiento más importante en la matemática (Ibáñes y Ortega, 2005). Sin embargo, no aparece explícitamente en el currículo oficial español (MECD, 2015) hasta los cursos de Bachillerato, donde se incide en los métodos de demostración y el proceso de demostración. Este hecho no le resta interés en otros cursos de Secundaria Obligatoria, puesto que las funciones de la demostración son múltiples en la educación matemática (De Villiers, 2012b) y muchos autores se han interesado en las últimas décadas en señalar estas funciones y en los procesos cognitivos que involucra la demostración (Alvarado y González, 2009).

Según Nortes y Martínez (1994), atendiendo a la Teoría del Desarrollo Cognitivo de Piaget, se clasifica al alumnado de Secundaria dentro del Estadio de las Operaciones Formales. En dicha etapa, los alumnos y alumnas comienzan a desarrollar su capacidad de abstracción, a utilizar la lógica formal y, además, son capaces de formular hipótesis y utilizarlas para encontrar solución a los problemas. Esto implica que el alumnado se encuentra preparado para comenzar a realizar tareas de demostración.

Para elaborar nuestra propuesta, hemos tomado como referente los trabajos de De Villiers (1990, 2012a), según los cuales existen 5 enfoques diferentes de la demostración matemática a pesar de que tradicionalmente los docentes tan solo trabajen el enfoque de verificación. Estos enfoques son:

- **Demostración como explicación:** surge de la necesidad de explicar la veracidad de una demostración y no de encontrar una prueba deductiva que la verifique.
- **Demostración como descubrimiento:** consiste en explorar, analizar, descubrir e inventar nuevos resultados.
- **Demostración como verificación:** se fundamenta en procesos como la sustitución matemática, las construcciones sencillas… que permiten dar una prueba empírica que verifica una conjetura dada.
- **Demostración como reto intelectual:** posee la función de auto-realización y pone a prueba la resistencia intelectual y el ingenio del matemático como hace de forma similar la resolución de juegos como los rompecabezas.
- **Demostración como sistematización:** es una herramienta matemática que permite sistematizar en un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas, varios resultados conocidos.

2.5. Tareas matemáticas escolares

Para la adquisición de capacidades y el fomento de las competencias de los alumnos y alumnas de la Educación Secundaria, se requiere el uso de tareas de enseñanza. Según Moreno y Ramírez (2016), cuando hablamos de tarea matemática nos referimos a una "propuesta que solicita la actividad del alumno o alumna en relación con las matemáticas y que el docente planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para la evaluación del aprendizaje'' (Moreno y Ramírez, 2016, p. 244).

Para el bloque de Geometría podemos estudiar el tipo de tarea matemática desde tres puntos de vista diferentes (García y López, 2012):

- **Tareas de conceptualización:** relacionadas con la construcción de conceptos y relaciones geométricas.
- **Tareas de investigación:** enfocadas al estudio de las características, propiedades y relaciones entre objetos geométricos con el propósito de darles un significado.
- **Tareas de demostración:** que tienen como objetivo fomentar la capacidad para elaborar conjeturas o procedimientos de resolución de problemas que deben ser explicados, probados o demostrados utilizando argumentos lógicos.

Para caracterizar las tareas propuestas en nuestro trabajo consideramos algunas variables recopiladas de Moreno y Ramírez (2016). Estas son: la meta o finalidad, la formulación, los materiales y recursos, el tipo de agrupamiento, la situación de aprendizaje, la temporalización, la dificultad, y el contenido matemático.

3. Propuesta

Las actividades que se muestran a continuación, como material docente de la propuesta de innovación, se encuentran clasificadas en función del enfoque de demostración que posea. Estos enfoques como hemos visto anteriormente son: Explicación, Descubrimiento, Verificación, Reto intelectual y Sistematización.

Para el desarrollo de cada actividad inicialmente se muestran los objetivos de esta y, a continuación, se aportan las instrucciones que debe poseer el alumnado para abordar dichos objetivos. En aquellas actividades donde se hayan incluido tareas de ampliación, los objetivos de esta se muestran inicialmente bajo el título "objetivos de la tarea de ampliación asociada a la actividad". Por último, añadir que, durante las instrucciones para los objetivos, se muestran las soluciones sugeridas de las diferentes cuestiones, así como algunas anotaciones.

3.1. Demostración geométrica como explicación

A pesar de que el grado de convicción de la veracidad de una conjetura sea elevada, muchos matemáticos consideran que es necesaria una explicación. Esta necesidad de explicación se puede comparar con la motivación que algunos matemáticos poseen para proporcionar una demostración con carácter explicativo relacionada con la Hipótesis de Riemman o incluso con la necesidad que Newton sentía de validar los descubrimientos de Kepler en relación con las órbitas planetarias.

La meta de la actividad que se propone a continuación es desarrollar la capacidad de resolver problemas basándose en el uso de la demostración matemática como explicación. Se pretende que los alumnos y alumnas aprendan a explicar la veracidad de una demostración fomentando de forma paralela la capacidad de comunicación lingüística.

Desarrollo de la actividad

Objetivos de la actividad

1. Verificar que en un triángulo equilátero la suma de cualquier punto a los lados del triángulo es constante.
2. Explicar por qué es cierto que en un triángulo equilátero la suma de cualquier punto a los lados del triángulo es constante.
3. Explicar por qué en un triángulo no equilátero la suma de cualquier punto a los lados del triángulo no es constante.

Objetivos de la tarea de ampliación asociada a la actividad

4. Encontrar el punto cuya suma de distancias a los lados de un triángulo sea mínima.
5. Encontrar el punto cuya suma de distancias a los lados de un rombo sea mínima y generalizar a polígonos con una propiedad similar.
6. Encontrar el punto cuya suma de distancias a los lados de un cuadrilátero sea mínima y generalizar a polígonos con una propiedad similar.

Instrucciones para el objetivo 1:

- Lee con atención el enunciado siguiente:

  Una sobreviviente de un naufragio logra nadar hasta una isla desierta que tiene forma de triángulo equilátero. Rápidamente, ella descubre que el surf es excepcional en las tres costas de la isla y decide hacer una tabla de surf de un árbol caído para surfear todos los días. ¿Dónde debería construir su casa la naufraga para que la suma de las distancias de su casa a las tres playas sea lo más pequeña posible?

- Utiliza el archivo de GeoGebra denominado *Explain_Distance* que tiene el siguiente aspecto:

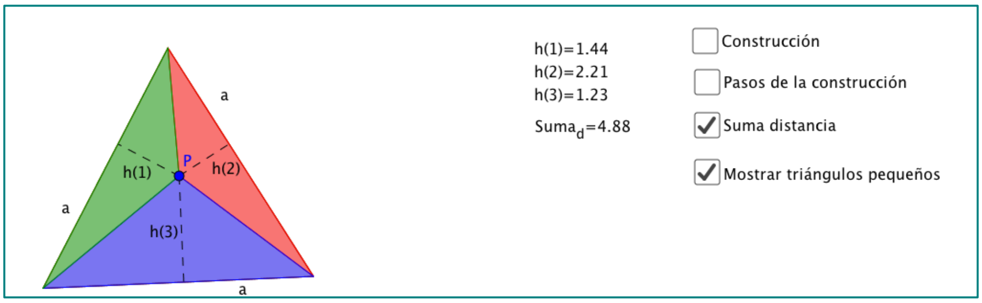

Figura 1. Explain_Distance.

- Responde a las siguientes preguntas:

1. Arrastra el punto *P* para experimentar con el boceto. Posteriormente, activa la casilla de "Suma distancia'' y vuelve a arrastrar dicho punto *P* alrededor del interior del triángulo. ¿Qué observas de la suma de las distancias?

   Sol: La suma de las distancias permanece constante.

2. Arrastra un vértice del triángulo para cambiar el tamaño de este. Una vez más, arrastra el punto *P* alrededor del interior del triángulo. ¿Qué observas ahora?

   Sol: Aumentar o disminuir el tamaño del triángulo equilátero aumenta o disminuye el valor de la suma. Sin embargo, al arrastrar el punto P alrededor del triángulo el valor de la suma no cambia.

3. ¿Qué sucede si arrastras el punto *P* fuera del triángulo?

   Sol: La suma de las distancias no es constante. Sin embargo, si consideramos las distancias que caen completamente fuera del triángulo como negativas, el resultado sí se mantiene constante.

4. Organiza tus observaciones de las preguntas 1, 2 y 3 en una afirmación. Escribe tu conjetura usando frases completas.

   Sol: En un triángulo equilátero, la suma de las distancias desde un punto dentro del triángulo a sus lados es constante.

Instrucciones para el objetivo 2

- Activa la casilla de control "Mostrar triángulos pequeños''.
- Responde a las siguientes preguntas:

5. Arrastra un vértice del triángulo original. ¿Por qué los tres lados se etiquetan con una a?

   Sol: Los tres lados son todos iguales, pero como sus longitudes pueden variar, se indican con la misma variable, a.

6. Escribe una expresión para el área de cada triángulo pequeño usando a y las variables h_1, h_2 y h_3.

   Sol: Las áreas de los triángulos son, respectivamente:
$$\frac{1}{2}ah_1, \frac{1}{2}ah_2, \frac{1}{2}ah_3.$$

7. Agrega las tres áreas y simplifica la expresión sacando factor común.

   Sol: $\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3 = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3).$

8. ¿Cómo se relaciona la suma de la pregunta 7 con el área total del triángulo equilátero? Escribe una ecuación para mostrar esta relación usando la variable A para el área del triángulo equilátero.

   Sol: El área del triángulo inicial es igual a la suma de las áreas de los triángulos pequeños. Por lo tando, si representamos el área del triángulo grande por A, se sigue que:
$$A = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3); \frac{2A}{a} = h_1 + h_2 + h_3.$$

9. Utiliza tu ecuación de la pregunta 8 para explicar por qué la suma de las distancias a los tres lados de un triángulo equilátero dado es siempre constante.

   Sol: Para un triángulo euilátero de tamaño fijo, se tiene que los valores de su área A y medida del lado a, son constantes. Por lo tanto, atendiendo a la ecuación expuesta en la pregunta 8, se tiene que la suma de las distancias $h_1 + h_2 + h_3$ es también constante.

10. Arrastra el punto P hacia un vértice del triángulo inicial. ¿Cómo es la suma de las distancias relacionadas con la altura del triángulo original en este caso?

    Sol: La suma de las distancias es igual a la altura del triángulo original, digamos H. Esto se puede explicar de la siguiente manera:
$$A = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3); \frac{1}{2}aH = \frac{1}{2}a(h_1 + h_2 + h_3),$$

    luego $H = h_1 + h_2 + h_3$.

Instrucciones para el objetivo 3

- Responde a las siguientes cuestiones:

11. Razona por qué tu explicación en las preguntas 5, 6, 7, 8 y 9 no funciona si el triángulo no fuera equilátero.

   Sol: La suma de las distancias se mantendrá constante sólo si hay un factor común, en este caso $\frac{1}{2}a$, que se puede sacar de las tres áreas. Esto quiere decir que el triángulo tiene que ser equilátero. Este resultado es también cierto si el punto P se arrastra fuera del triángulo, pero la explicación requiere considerar que las distancias que caen completamente fuera sean negativas.

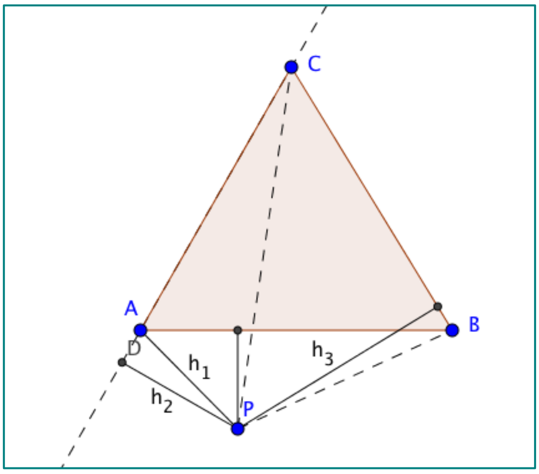

Figura 1. Caso particular

En este caso, la suma de las áreas de los triángulos PAB, PBC y PCA no es el área del triángulo ABC. Para obtener el área del tirángulo ABC, ahora tenemos que restar el área del triángulo PAB a la suma de los otros dos. Por lo tanto, en este caso tenemos:

$$H = h_2 + h_3 - h_1.$$

Para hacer que la fórmula general $H = h_1 + h_2 + h_3$ funciones, necesitamos considerar las distancias como negativas si caen completamente fuera del triángulo.

Instrucciones para el objetivo 4, 5 y 6

- Responde a las siguientes preguntas:

1. Construye cualquier triángulo ABC y un punto arbitrario P dentro de él. ¿Dónde debes ubicar P para minimizar la suma de las distancias a los tres lados del triángulo?

   Sol: Para encontrar la suma mínima en un triángulo arbitrario, el punto P debe situarse en el vértice opuesto al lado más largo. En el caso de un triángulo isósceles con dos lados de máxima longitud, el punto P debe situarse en cualquiera de los vértices opuestos a los dos lados de igual medida o en el punto medio del lado desigual.

2. Construye cualquier rombo y un punto arbitrario P dentro de él. ¿Dónde debes ubicar P para minimizar la suma de las distancias a los cuatro lados del rombo?

   Sol: La suma de las distancias del punto P a los lados de un rombo es constante.

3. Explica tu observación en 2 y generalizala a polígonos con una propiedad similar.

Sol: La prueba es la misma que para el triángulo equilátero, ya que todos los lados son iguales. El resultado es generalizable a los polígonos regulares. En general, para cualquier polígono regular de n lados de longitud a se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = 2\frac{A_n}{a}.$$

4. Construye cualquier paralelogramo y un punto arbitrario P dentro de él. ¿Dónde debes ubicar P para minimizar la suma de las distancias a los cuatro lados del paralelogramo?

   Sol: La suma de las distancias del punto P a los lados de un paralelogramo es constante.

5. Explica tu observación en 4 y generalizala a polígonos con una propiedad similar.

   Sol: La suma $h_1 + h_2$ es constante, ya que la distancia entre los dos lados paralelos opuestos es constante. Análogamente, $h_3 + h_4$ es constante. Por lo tanto, $h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ es constante. En particular es igual a la suma de las dos distancias entre los pares de lados opuestos. El resultado es generalizable a cualquier polígono con un número par de lados y cuyos lados opuestos sean iguales y paralelos.

3.2. Demostración geométrica como descubrimiento

A lo largo de la historia muchas demostraciones se han obtenido a partir de procesos deductivos como la axiomatización o las definiciones. Por ejemplo, resultados como la geometría no euclidiana son difíciles de imaginar como resultado de la intuición o la experimentación.

La actividad que se propone a continuación se engloba dentro del uso de la demostración con carácter de descubrimiento. La meta o finalidad de la tarea consiste en que los alumnos y alumnas exploren, analicen, descubran e inventen nuevos resultados.

Desarrollo de la actividad

Objetivos de la actividad

1. Descubrir que el perímetro del paralelogramo obtenido por el punto medio cuadrilateral es igual a la suma de las diagonales del cuadrilátero original.

Instrucciones para el objetivo

- Lee con atención el siguiente enunciado:

  Teniendo en cuenta que al conectar los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero se obtiene un paralelogramo, responde de forma razonada a las siguientes preguntas atendiendo al diagrama presentado.

- Observa el siguiente diagrama:

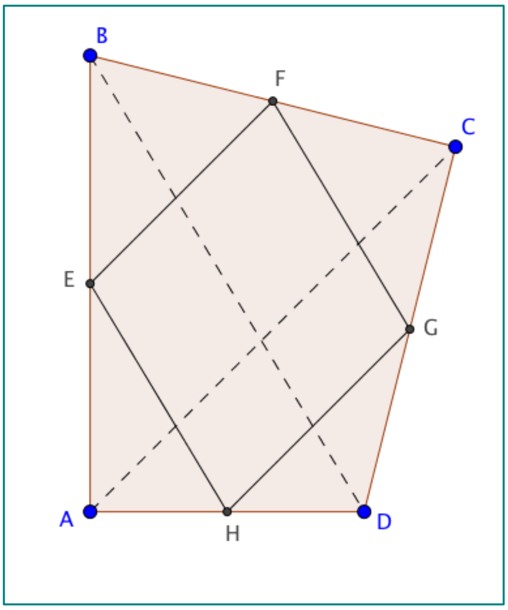

Figura 2. Diagrama 1

- Responde a las siguientes cuestiones:

1. Escribe una ecuación que relacione las longitudes $\overline{EF}$ y $\overline{HG}$ con la longitud $\overline{AC}$.

   Sol: $\overline{EF} + \overline{HG} = \overline{AC}$.

2. Escribe una ecuación relacionando $\overline{EH}\ y\ \overline{FG}$ con $\overline{BD}$.

   Sol: $\overline{EH} + \overline{FG} = \overline{BD}$.

3. Explica cómo encontraste las ecuaciones en las preguntas 1 y 2.

   Sol: En el triángulo ABC, $\overline{EF}$ es la mitad de $\overline{AC}$, ya que E y F son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Análogamente, $\overline{HG}$ es la mitad de $\overline{AC}$ en el triángulo ADC. Por lo tanto, $\overline{EF} + \overline{HG} = \overline{AC}$. De un modo similar, se obtiene la ecuación de la pregunta 2.

4. Utiliza las preguntas 1 y 2 para describir la relación entre perímetro del paralelogramo $EFGH$ inscrito y las diagonales del cuadrilátero $ABCD$.

   Sol: Se sabe que el perímetro de la figura $EFGH$ es:

   $$Perímetro = \overline{EF} + \overline{HG} + \overline{EH} + \overline{FG} = \overline{AC} + \overline{BD}.$$

   Esto quiere decir que el perímetro del paralelogramo inscrito es igual a la suma de las diagonales del cuadrilátero original.

- Contrasta los descubrimientos obtenidos mediante el software GeoGebra.

3.3. Demostración geométrica como verificación

Gran parte del profesorado de matemáticas considera que la demostración es la única autoridad que valida una conjetura. Además, defienden que la prueba matemática es un requisito previo a la convicción, a pesar de que otros muchos consideran que ello no es siempre así, aportando como argumento que en un gran número de ocasiones la convicción es la que permite al matemático obtener una prueba, puesto que le proporciona las razones para persistir en la búsqueda de esta.

La actividad que se desarrolla a continuación se engloba dentro del uso de la demostración como verificación. La meta o finalidad de la tarea es proporcionar una prueba empírica mediante procesos como las sustituciones matemáticas, las construcciones sencillas… que permiten verificar una conjetura dada.

Desarrollo de la actividad

La actividad de este bloque se fundamenta en una paradoja que parte de la siguiente nota.

Nota: Imagina una figura que tenga las siguientes características:

- Sea un triángulo ABC.
- $\overline{CG}$ está en la bisectriz del ángulo ACB y $\overline{GE}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.
- $\overline{GD}$ es perpendicular a $\overline{AC}$ y $\overline{GF}$ es perpendicular a $\overline{BC}$.

Objetivos de la actividad

1. Descubrir que la figura descrita inicialmente no es físicamente construible.

Instrucciones para el objetivo

- Atiende a la nota inicial.
- No utilices el software GeoGebra.
- Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué puedes decir sobre los triángulos CGD y CGF? ¿Por qué?

   Sol: Los triángulos CGD y CGF son congruentes, por el criterio de congruencias AAS.

2. De la pregunta 1, ¿qué conclusión puedes tener sobre $\overline{DG}$ y $\overline{FG}$?

   Sol: $\overline{DG} = \overline{FG}$.

3. ¿Qué puedes decir sobre $\overline{AG}$ y $\overline{BG}$? ¿Por qué?

   Sol: $\overline{AG} = \overline{BG}$, ya que G se encuentra en la mediatriz de $\overline{AB}$.

4. ¿Qué puedes ahora concluir sobre los triángulos GDA y GFB? ¿Por qué?

   Sol: Los triángulos GDA y GFB son congruentes, por el criterio de congruencias ASS.

5. A partir de la pregunta 4, ¿qué conclusión puedes tener sobre $\overline{DA}$ y $\overline{FB}$?

   Sol: $\overline{DA} = \overline{FB}$.

6. De la pregunta 1, ¿puedes concluir algo acerca de $\overline{CD}$ y $\overline{CF}$?

   Sol: $\overline{CD} = \overline{CF}$.

7. ¿Qué puedes ahora concluir sobre $\overline{CD} + \overline{DA}$ y $\overline{CF} + \overline{FB}$, y, por lo tanto, sobre $\overline{CA} + \overline{CB}$?

   Sol: $\overline{CD} + \overline{DA} = \overline{CA} = \overline{CF} + \overline{FB} = \overline{CB}$. Por lo tanto, $\overline{CA} = \overline{CB}$.

8. A partir de la pregunta 7, ¿qué tipo de triángulo es ABC?

   Sol: El triángulo ABC es isósceles.

9. Teniendo en cuenta las preguntas anteriores y las conclusiones obtenidas, reflexiona sobre las siguientes cuestiones:
   - ¿Es válido este argumento para cualquier triángulo ABC?
   - ¿Cuál es el problema?
   - ¿Dónde está el error?

10. Resume en una frase lo que puedes concluir de esta actividad.

3.4. Demostración geométrica como reto intelectual

Para gran parte de los matemáticos, las demostraciones geométricas forman un reto intelectual atractivo al igual que lo pueden ser los puzles u otras aficiones creativas y que requieren esfuerzo. El placer de realizar una demostración podría asimilarse a la alegría de conseguir un reto como puede ser resolver un simple crucigrama o subir el alto monte Everest.

A continuación, se desarrolla una actividad basada en el uso de la demostración como reto intelectual. La meta o finalidad de la tarea es poner a prueba la resistencia intelectual, la auto-realización y el ingenio de los alumnos y alumnas.

Desarrollo de la actividad

La actividad de este bloque se fundamenta en el siguiente diagrama:

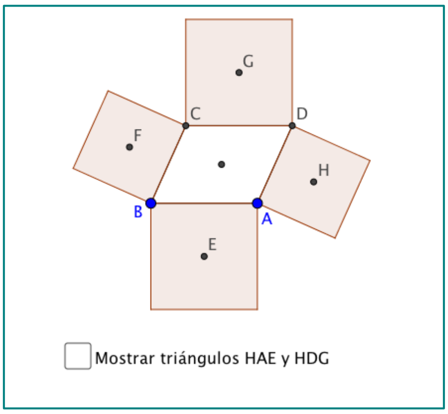

Figura 3. Challenge_Squares.

Objetivos de la actividad

1. Experimentar qué tipo de cuadrilátero se forma por los centros de los cuadrados construidos en los lados de un paralelogramo.

Objetivos de la tarea de ampliación asociada a la actividad

2. Proporcionar una demostración para el objetivo anterior.
3. Estudiar el tipo de cuadrilátero formado por los centros de los cuadrados construidos en los lados de un trapezoide isósceles.
4. Estudiar el tipo de cuadrilátero formado por los centros de los cuadrados construidos en los lados de una cometa.

Instrucciones para el objetivo 1

- Utiliza el archivo de GeoGebra *Challenge_Squares.*
- Lee con atención el siguiente enunciado.

Investiga el tipo de cuadrilátero formado mediante la conexión de los puntos E, F, G y H.

- Responde las siguientes preguntas:

1. Describe los cuatro cuadriláteros sombreados.

   Sol: Son cuadrados.

2. Describe el cuadrilátero $ABCD$. (Te puede servir de ayuda construir el cuadrilátero $EFGH$.

   Sol: Es un paralelogramo.

3. Arrastra cualquiera de los puntos A, B, C y D. ¿Qué tipo de cuadrilátero es $EFGH$?

   Sol: $EFGH$ es un cuadrado.

Instrucciones para el objetivo 2

- Responde a las siguientes cuestiones.

4. Activa la casilla de control "Mostrar triángulo HAE y HDG''. ¿Qué notas sobre estos dos triángulos?

   Sol: Los triángulos HAE y HDG son congruentes.

- Establece el punto H como centro de rotación para girar el interior del triángulo HDG de modo que quede dentro del triángulo HAE.
- Responde a las siguientes cuestiones.

5. ¿Cuántos grados giraste alrededor de H para asignar el triángulo HDG al triángulo HAE?

   Sol: 90º.

6. ¿Qué puedes ahora concluir con respecto al ángulo EHG, y por consiguiente sobre $EFGH$?

   Sol: El ángulo EHG es de 90º ya que $\overline{GH}$ se gira sobre $\overline{EH}$ al realizar la rotación anterior. Mediante un razonamiento análogo en relación al resto de ángulo de la figura $EFGH$, se demuestra que esta es un cuadrado.

- Discute en gran grupo los resultados obtenidos.

Instrucciones para el objetivo 3 y 4

- Resuelve las siguientes cuestiones.

1. ¿Qué tipo de cuadrilátero está formado por los centros de los cuadrados construidos a los lados de un trapezoide isósceles? ¿Puedes explicar tu observación?

   Sol: Los centros de los cuadrados a los lados de un trapezoide isósceles forman una cometa. Esto se realiza directamente desde la simetría puesto que el eje de simetría del trapezoide isósceles es también el eje de simetría del cuadrilátero formado que pasa a través de un par de vértices puestos.

2. ¿Qué tipo de cuadrilátero está formado por los centros de los cuadrados construidos a los lados de una cometa?

   Sol: Los centros de los cuadrados a los lados de una cometa forman un trapecio isósceles. Esto también se deriva directamente de la simetría, como en el argumento anterior.

3.5. Demostración geométrica como sistematización

Las demostraciones matemáticas pueden verse como una herramienta para sistematizar en un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas, varios resultados conocidos. De Villiers (2012a) determina que algunas de las funciones más importantes de una sistematización deductiva de los resultados conocidos son:

- Ayuda a identificar inconsistencias, argumentos circulares y suposiciones ocultas o no expresadas explícitamente.

- Unifica y simplifica las teorías matemáticas mediante la integración de declaraciones, teoremas y conceptos no relacionados entre sí, lo que conduce a una presentación económica de los resultados.
- Proporciona una perspectiva global útil o la vista panorámica de un tema mediante la exposición de la axiomática subyacente.
- "Ayuda a las aplicaciones, tanto dentro como fuera de las matemáticas, pues ayuda a comprobar la aplicabilidad de una estructura global compleja o de una teoría simple, mediante la evaluación de la pertinencia de sus axiomas y definiciones" (De Villiers, 1990, pp. 24-25).
- A menudo conduce a sistemas deductivos alternativos que proporcionan nuevas perspectivas y/o son más económicos, elegantes y provechosos que los existentes.

La actividad que se muestra a continuación fomenta el uso de la demostración como sistematización. La meta o finalidad de la tarea es usar la demostración matemática como herramienta para sistematizar en un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas varios resultados conocidos.

Desarrollo de la actividad

Objetivos de la actividad

1. Demostrar por qué una línea paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en la misma proporción.

Objetivos de la tarea de ampliación asociada a la actividad

2. Demostrar el inverso del objetivo anterior.

Instrucciones para el objetivo 1

- Lee con atención el siguiente enunciado:

  Una línea paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en la misma proporción. Pero, ¿por qué este resultado es cierto?

- Observa la siguiente imagen:

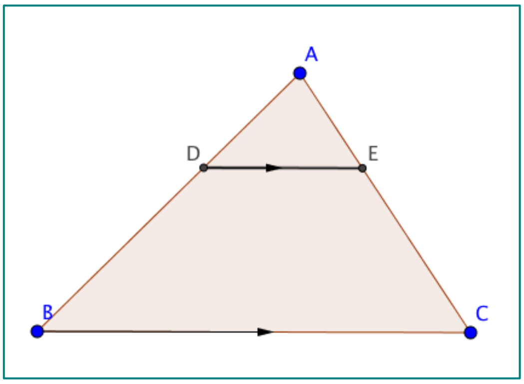

Figura 4. Diagrama 2

- Responde a las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué puedes decir acerca de los ángulos ADE y ABC? ¿Por qué?

   Sol: $\measuredangle ADE = \measuredangle ABC$, puesto que los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ están sobre la misma recta y, además, $\overline{DE}||\overline{BC}$.

2. ¿Qué puedes decir ahora acerca de los triángulos ABC y ADE? ¿Por qué?

   Sol: El triángulo ADE es semejante al triángulo ABC, por el criterio de semejanza AA.

3. A partir de la pregunta 2, ¿qué puedes concluir sobre las proporciones $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$ y $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$?

   Sol: Las proporciones son iguales.

4. Reescribe la proporción en la pregunta 3, sustituyendo $\overline{AD} + \overline{DB} \rightarrow \overline{AB}$ y $\overline{AE} + \overline{EC} \rightarrow \overline{AC}$.

   Sol: Se obtiene que $\frac{\overline{AD}+\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}+\overline{EC}}{\overline{AE}}$.

5. De las preguntas 3 y 4, ¿qué puedes ahora concluir acerca de las proporciones $\frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}$ y $\frac{\overline{EC}}{\overline{AE}}$? ¿Por qué?

   Sol: Se tiene que:

$$\frac{\overline{AD}+\overline{DB}}{\overline{AD}} - \frac{\overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}+\overline{EC}}{\overline{AE}} - \frac{\overline{AE}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{AE}}.$$

Instrucciones para el objetivo 2

- ¿Cuál es el recíproco del teorema que acabas de probar? Formúlalo.
- Utiliza GeoGebra para investigar si es verdadero o no el enunciado expuesto en el apartado anterior.
- En el caso de considerar que es verídica la conjetura, proporciona una prueba. En caso contrario, da un contraejemplo.
- Discute en gran grupo los resultados obtenidos.

4. Consideraciones finales

En el desarrollo de este artículo se ha aportado un material didáctico enfocado en la Geometría del tercer curso de las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas. En primer lugar, se ha incorporado una justificación tanto desde el punto de vista curricular como desde el punto de vista de varios autores en relación a la investigación del proceso de enseñanza-aprendizaje de dicho bloque y el uso paralelo de material basado en demostraciones geométricas y las TICs. Posteriormente, se ha expuesto un marco teórico sobre el que se fundamenta el trabajo y, para finalizar, se ha desarrollado la propuesta aportando el material docente y un análisis de instrucción de este.

Para la elaboración del artículo, ha sido de gran importancia el uso del documento De Villiers (2012a). La utilización de esta bibliografía ha permitido localizar tareas que desarrollan los contenidos y procedimientos que fueron extraídos inicialmente del MECD (2015). Además, nos ha permitido clasificar las tareas de demostración en función de los 5 enfoques: Explicación, Descubrimiento, Verificación, Reto intelectual y Sistematización; obteniendo así una mayor formación en el carácter que posee una demostración geométrica.

Este material puede ser de gran utilidad a la hora de ampliar una unidad didáctica de Geometría. Cabe destacar que al tratarse de un material formado por tareas de reflexión y de cierre, se hace conveniente que los alumnos y alumnas conozcan previamente los contenidos y procedimientos tratados. El profesorado podrá tomar este material para desarrollar las capacidades de sus alumnos y alumnas sin preocuparse demasiado del contenido abordado, puesto que este, es un mero instrumento para desarrollar las actividades. Esto permite desarrollar sesiones de clase donde se trabajen destrezas como la argumentación y justificación, las cuales a veces quedan olvidadas en el bloque de Geometría.

Bibliografía

Alvarado, A. y González, M. (2009). La implicación lógica en el proceso de demostración matemática: estudio de un caso. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 73-84.

Barrantes, M. y Balletbo, F. (2012). Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria. *Campo abierto*, Vol. 31. Nº2, 139-153.

Barkley, E., Cross, K. y Howell Major, C. (2007). *Técnicas de aprendizaje cooperativo.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia/ Morata.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 7-24.

De Villiers, M. (2012a). *Rethinking proof with the geometers sketchpad.* Emeryvylle, CA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2012b). An illustration of the explanatory and Discovery functions of proofs. *Pythagoras*, 33(3), 1-8.

Domingo, J. (2008). EL aprendizaje cooperativo. *Cuadernos de trabajo social*, Vol. 21, 231-246.

Fariña, P (2016). *Descubriendo el pantógrafo y el caleidoscopio. Trabajo de Fin de Máster. Universidad de La Laguna.*

Flores, P. (2016). Materiales y recursos en el aula. En L. Rico y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesorado de secundaria.* (pp.275-292). Madrid: Pirámide.

Flores, P. y Lupiañez, J. (2016). Expectativas de aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesorado de secundaria.* (pp.177-194). Madrid: Pirámide.

Freyre, M. y Mántica, A. (2017). Constatación empírica y uso de propiedades para la validación de conjeturas utilizando GeoGebra. *Números*, 95, 107-121.

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.*

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, Vol. XIV, Nº2, 125-142.

García, S. y López, O. (2008). *La enseñanza de la geometría*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación*:* México.

Gutiérrez, A. (2004). Reflexiones sobre enseñanza de la geometría euclidiana en secundaria. *Yupana.*

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, episteme y didaxis: revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*. Nº32, 55-70.

Ibáñez, M. y Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *Números,* 61, 19-40.

MECD (2015). Real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato. *BOE*, n.3, 169-546.

Mora, J. (2007). *Geometría Dinámica en Secundaria.* En Actas de la XIII JAEM. Granada: SAEM Thales. Descargado el 25 de julio de 2017 de http://jmora7.com/miWeb8/Archiv/2007%20Granada%20JAMora.pdf

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno, *Elementos de didáctica de la matemática para el profesorado de secundaria.* (pp.243-257). Madrid: Pirámide.

Nortes, A. y Martinez, R. (1994). Psicología piagetiana y educación matemática. *Revista Interuniversitaria de formación del profesorado*. Nº21, 59-70.

Smith, K. (1996). Cooperative learning. Making "group work" work. *New Directions for Teaching and Learning,* 67, 71-82.

Cynthia Bolaños Florido. Estudiante del Máster Universitario de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de idiomas de la Universidad de Granada durante el curso escolar 2016/2017. Procedente de la isla de Gran Canaria y graduada en Matemática por la Universidad de La Laguna.
cynthiabof@gmail.com

Juan Francisco Ruiz Hidalgo. Nacido en Madrid en 1973. Tras una larga experiencia como profesor de Matemáticas de Enseñanza Secundaria, en la actualidad trabaja en la Universidad de Granada preparando futuros maestros de Infantil y Primaria, así como profesores de Matemáticas de Secundaria. Sus publicaciones se centran en el ámbito de la Didáctica de la matemática.
jfruiz@ugr.es