
¿CÓMO DESARROLLAR EL SENTIDO DEL MUESTREO EN LOS ESTUDIANTES?

Carmen, Batanero

batanero@ugr.es

Universidad de Granada (España)

Nuria, Begué

nbegue@correo.ugr.es

Universidad de Granada (España)

María M., Gea

mmgea@ugr.es

Universidad de Granada (España)

Asunto: Desarrollo del pensamiento aleatorio

Temática: Inferencia

RESUMEN

El muestreo es una idea estocástica fundamental, ya que establece un puente entre probabilidad y estadística y es la base del estudio de la inferencia. Sin embargo, la investigación didáctica muestra que no siempre es bien comprendida por los estudiantes, ya que enfatizan excesivamente la representatividad muestral, olvidando su variabilidad, no diferencian los tres tipos de distribución que intervienen en el muestreo y no consideran siempre la independencia de sus elementos. En este trabajo reflexionamos sobre los componentes del sentido del muestreo, describiendo algunas de estas investigaciones, y ofreciendo algunas ideas para desarrollarlo gradualmente en los estudiantes.

PALABRAS CLAVES

Sentido estadístico, Muestreo, Inferencia estadística.

INTRODUCCIÓN

La inferencia estadística es una herramienta esencial para la predicción, control de procesos y toma de decisiones racionales en la ciencia, técnica y gestión. Debido a esta importancia, su enseñanza se incluye en muchas licenciaturas, grados y estudios postdoctorales, así como en el bachillerato en algunos países (por ejemplo, *Common Core State Standards Initiative* [CCSSI], 2010; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD], 2015; *Senior Secondary Board of South Australia* [SSBSA], 2002).

Además de ser el fundamento de la inferencia, Heitele (1975) indica que el muestreo es un vínculo entre la estadística y la probabilidad. Los procesos de muestreo son frecuentes en nuestra vida cotidiana, ya que, por limitaciones de tiempo y recursos, construimos nuestro conocimiento a partir muestras de experiencias u observaciones de la realidad ya que es demasiado amplia para ser abarcada totalmente. Las investigaciones basadas en muestreo se difunden, además, en los medios de comunicación, por lo que un ciudadano informado necesita comprender la forma en que se recogen las muestras y se extienden los resultados a la población, así como reconocer las posibles fuentes de error en los mismos, para poder juzgar la validez y fiabilidad de dichos resultados (Franklin, Kader, Mewborn, Moreno, Peck, Perry y Scheaffer, 2007). Por tanto, es importante que los estudiantes logren una comprensión suficiente del muestreo, antes de continuar con el estudio de la inferencia, pues de lo contrario, los errores acerca de la comprensión del muestreo van a proyectarse en los contenidos posteriores (Batanero, 2013; Burrill y Biehler, 2011).

En esta presentación reflexionamos sobre los componentes del sentido del muestreo y resumimos algunos errores de comprensión de sus ideas fundamentales. Finalizamos con algunas sugerencias de tareas que permiten desarrollar gradualmente el sentido del muestreo en los estudiantes desde la educación secundaria.

EL SENTIDO DEL MUESTREO Y SUS COMPONENTES

En Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013) se sugiere la necesidad de desarrollar el sentido estadístico de los estudiantes, el cual se concibe como la unión de la cultura y el razonamiento estadístico. Como parte de su modelo de cultura estadística, Gal (2002) engloba el conocimiento básico de las ideas estadísticas fundamentales y unas actitudes adecuadas hacia la estadística. A continuación se desarrollan estos componentes para el caso del muestreo.

Actitudes y creencias sobre el muestreo

Un sentido adecuado del muestro requiere, en primer lugar, unas actitudes favorables que supongan la valoración del trabajo basado en el muestreo, de su realización en condiciones adecuadas y la percepción de la propia capacidad para comprenderlo. Gómez-Chacón (2000) y Di Martino y Zan (2015), entre otros, resaltan la importancia del componente emocional en la enseñanza de las matemáticas y la forma en que este componente afecta al aprendizaje. Los autores diferencian entre emociones, actitudes y creencias. Mientras que las emociones pueden ser transitorias, las actitudes y creencias se desarrollan como consecuencia de experiencias con el tema y son difíciles de cambiar.

Las actitudes pueden ser positivas o negativas, intensas o moderadas y se refieren a la utilidad del tema, la propia percepción de la competencia para aprenderlo, el interés hacia el mismo y la disponibilidad para aplicarlo en las situaciones que sea adecuado (Gómez-Chacón, 2000; Di Martino y Zan, 2015). Es importante, entonces, que el estudiante adquiera actitudes positivas hacia el muestreo y lo valore como instrumento de resolución de problemas, y adquiera actitud crítica ante la información basada en muestreo realizado convenientemente. Además, se deben superar las creencias erróneas sobre el tema, en concreto, algunos de los sesgos que se deben evitar son los siguientes:

- *Insensibilidad al tamaño de la muestra* (Tversky y Kahneman, 1982), que consiste en asumir que una muestra, aunque sea pequeña, siempre representa a la población, independientemente de cómo se ha seleccionado. Esta creencia conduce a graves consecuencias en el trabajo estadístico, pues se espera una convergencia estocástica a la distribución teórica, incluso en pocas repeticiones de un experimento, porque se generaliza indebidamente la Ley de los Grandes Números.
- *Falacia del jugador*, o suponer que el resultado de un experimento aleatorio afectará, al repetirlo en el futuro, a la probabilidad de los sucesos de dicho experimento. Esta creencia es infundada cuando los experimentos aleatorios son independientes. La influencia del resultado de un experimento aleatorio en el cálculo de probabilidades futuras es una creencia que se denomina *recencia positiva*, si se supone que los siguientes resultados de un experimento aleatorio seguirán el patrón observado, y *recencia negativa* si se piensa que se compensarán los resultados futuros con los observados.
- *Sesgo de equiprobabilidad* (Lecoutre, 1992) que consiste en pensar que los resultados de cualquier fenómeno aleatorio, en particular cualquier valor de un estadístico muestral, son igualmente probables.
- *Falacia de la composición* (Chernoff y Russel, 2012), que consiste en transferir a un todo una propiedad que se cumple en alguna de sus partes. Así, por ejemplo, cuando los sucesos de un experimento aleatorio son equiprobables (como la cara y la cruz al lanzar una moneda), los sujetos extienden indebidamente la propiedad de equiprobabilidad a cualquier muestra de resultados del experimento compuesto (consideran equiprobables obtener 0, 1 o 2 caras al lanzar dos monedas).
- *Ilusión de control* (Langer, 1975) o creencia de poder controlar los resultados de un proceso aleatorio (una muestra). Este sesgo aparece frecuentemente en los jugadores compulsivos y se refuerza cuando se incrementa la motivación (por ejemplo, si se espera un fuerte premio) y la persistencia (cuanto más se juega).

Comprensión de las ideas fundamentales del muestreo

Un adecuado sentido del muestreo requiere, asimismo, el conocimiento de las ideas estadísticas fundamentales (Burrill y Biehler, 2011); en particular, las siguientes están relacionadas con el muestreo:

- *Datos.* Moore (1991) definió la estadística como la ciencia de los datos y sugirió la importancia del contexto de los datos en un estudio estadístico. Los datos permiten a los estudiantes investigar cuestiones como formas de recogerlos, tratamiento de datos faltantes o atípicos, fiabilidad y validez (Batanero y Borovcnik, 2016). Sin embargo, no están acostumbrados a trabajar con datos de situaciones reales, que frecuentemente requieren de interpretaciones y razonamientos de alto nivel.
- *Variabilidad aleatoria:* aunque las variables y la variabilidad aparecen en todas las ramas de la matemática, juegan un papel especial en estadística, cuyo objetivo principal es cuantificar, controlar y predecir la variabilidad. Los estudiantes deben aprender a reconocer las diferentes fuentes de variabilidad en un estudio estadístico (Reading y Shaughnessy, 2004): a) variabilidad de resultados en un experimento aleatorio; b) variabilidad en los datos; c) variabilidad en una variable aleatoria; d) variabilidad en las muestras o la distribución muestral.
- *Distribución.* Este es un concepto propiamente estadístico, que no se utiliza en otras ramas de las matemáticas y algunos estudiantes tienen dificultad, por ejemplo, en concebir la media como una propiedad de la distribución, considerada como un todo. Además, no diferencian los tres tipos de distribución que se trabajan en inferencia (Harradine, Batanero y Rossman, 2011): a) la distribución teórica de probabilidad que modela una variable aleatoria tomada de una población y depende del parámetro, que es generalmente desconocido; b) la distribución del conjunto de datos que constituye una muestra aleatoria simple, donde se calculan distintos resúmenes estadísticos, que se utilizan para estimar los parámetros de la población; c) la distribución de un estadístico (como la media muestral) en todas las posibles muestras del mismo tamaño y condiciones (distribución muestral).

La coordinación de estos tres niveles de distribución, y su diferenciación, supone una gran dificultad conceptual para los estudiantes. Shaughnessy, Ciancetta y Canada (2004) identifican tres niveles progresivos de comprensión de estas distribuciones: 1) nivel de razonamiento aditivo, que consiste en considerar las diferentes muestras como subconjuntos disjuntos de la población y utilizar en las estimaciones únicamente la frecuencia absoluta, sin tener en cuenta la proporción del suceso; 2) nivel de razonamiento proporcional, donde se utilizan las proporciones al realizar las estimaciones y se comprende el valor esperado de la distribución muestral; y 3) nivel de razonamiento

distribucional (el menos frecuente), donde se integra la comprensión del valor esperado y de la variabilidad de la distribución muestral al realizar las estimaciones.

- *Muestreo y estimación.* El estudio de la inferencia comienza por la distinción entre población y muestra (subconjunto de la población) y las ideas básicas de representatividad y variabilidad muestral. La representatividad implica que si no hay sesgos en el método de selección, un estadístico muestral debe ser un buen estimador del parámetro poblacional. La variabilidad nos sugiere que diferentes muestras de la misma población podrían dar distintos valores del estadístico. De acuerdo a Ben-Zvi, Bakker y Makar (2015), son los fallos en comprensión de las ideas de variabilidad, y representatividad muestral lo que impide una correcta comprensión de la distribución muestral. La idea básica en estimación es que es posible generalizar los datos de una muestra a una población mayor. Esta posibilidad ha permitido aplicar las matemáticas a las ciencias no exactas y ha llevado a la actual sociedad basada en la evidencia (Batanero y Borovcnik, 2016).
- *Probabilidad.* Aunque la probabilidad es fundamental en toda la estadística, no se destaca suficientemente la relación del muestreo con el enfoque frecuencial de la probabilidad. En dicho enfoque, la probabilidad de un suceso se estima a partir de su frecuencia relativa, en muestras de tamaño suficiente, apoyándose en la Ley de los Grandes Números. Las ideas de representatividad, variabilidad muestral y la mayor precisión de la estimación de la probabilidad al aumentar el tamaño de la muestra están implícitas en este significado, aunque estas propiedades no siempre son bien comprendidas, como se muestra en Gómez, Batanero y Contreras (2014).

Razonamiento sobre el muestreo

El sentido del muestreo requiere también desarrollar en los estudiantes un adecuado razonamiento. Entre los tipos de razonamiento descritos por Wild y Pfannkuch (1999), destacamos los siguientes, en relación al muestreo:

- *Reconocer la necesidad de los datos:* La base de la investigación estadística es la hipótesis de que muchas situaciones de la vida real solo pueden ser comprendidas a partir del análisis de datos, que han sido recogidos de forma adecuada. Es esencial reconocer las situaciones en que es necesario el muestreo, así como el tamaño y tipo de muestreo apropiados. En sí mismo, conlleva adquirir el concepto de muestra, para el que Watson y Moritz (2000) diferencian tres niveles de comprensión: en el primero, sólo se comprende la terminología del muestreo; en el segundo, se comprenden, además, las aplicaciones del muestreo; y en el tercero, se adquiere una capacidad crítica para discutir conclusiones a partir de muestras que no sean adecuadas, desde el punto de vista estadístico.

- *Percepción de la variabilidad.* La selección adecuada de una muestra y la realización de inferencias, precisa reconocer la variabilidad en los datos y la forma de controlarla. Hicimos referencia a este tipo de razonamiento al hablar de variabilidad como idea estadística fundamental. Así, dos fines importantes de la enseñanza de la estadística es que los estudiantes perciban la variabilidad y la identifiquen cuando manejen modelos que permitan controlarla y predecirla.
- *Razonamiento con modelos estadísticos.* La diferencia entre el dato que forma parte de la muestra (realidad) y el modelo (población) es esencial en el muestreo. En particular, en el muestreo será importante reconocer y aplicar, dependiendo de los datos y las condiciones de estimación, los modelos de probabilidad que se usan para describir la población, por ejemplo, la curva normal o la distribución binomial, entre otros. Se debe fomentar tanto la competencia para generar muestras, a partir de un modelo de población, como la de caracterizar el modelo de población y estimar sus parámetros a partir de una muestra.
- *Integración de la estadística y el contexto.* El análisis del contexto contribuye al principal fin de la estadística puesto que sirve para decidir qué datos recoger, cómo recogerlos y relacionar las características de las muestras con las de la población que representan, para obtener conclusiones con algún grado de probabilidad. Sin embargo, muchos estudiantes realizan los cálculos estadísticos sin percatarse de estas cuestiones y tienen dificultad en interpretar los resultados dentro del contexto.

ALGUNAS TAREAS PARA DESARROLLAR EL SENTIDO DEL MUESTREO

La exposición realizada muestra que el sentido del muestreo requiere de un periodo largo de desarrollo, por lo que debiera comenzarse la enseñanza del tema desde el principio de la etapa secundaria. Para contribuir a su adquisición, se pueden utilizar alguna de las tareas propuestas en la investigación didáctica. Por ejemplo, Meletiou-Mavrotheris y Papparistodemou (2015) proponen las siguientes actividades, que permiten clarificar a los estudiantes el concepto de muestra, su utilidad, así como diferentes formas de muestreo:

Tarea 1. ¿Has oído la palabra muestra antes? ¿Qué significa para ti?

Tarea 2. En un estudio realizado en un colegio algunos investigadores tomaron una muestra de niños ¿Por qué piensas que los investigadores usaron una muestra? ¿Cuántos niños deberían elegir para la muestra? ¿Por qué? ¿Cómo deberían elegir los niños para su muestra?

Se puede complementar con la siguiente tarea adaptada, de la misma autora, que sirve para discutir la idea de sesgo en el muestreo.

Tarea 3. Los estudiantes en un colegio realizaron una encuesta con el fin de determinar la proporción de niños que reciclan en sus casas. Compara los siguientes métodos de elegir la muestra e indica cuáles te parecen fiables. Si tuvieras que elegir uno de los métodos, ¿cuál elegirías y por qué?

1. Mari preguntó a 60 amigos.
2. Rafa hizo una lista con los nombres de todos los niños del colegio y eligió 60 niños al azar.
3. Andrés preguntó a 60 estudiantes que eran miembros de un club de medio ambiente.
4. Elena envió el cuestionario por correo electrónico y usó las primeras 60 respuestas.
5. Ana preguntó a 5 chicos y 5 chicas de cada uno de los cursos 1° a 10° para tener una muestra representativa.

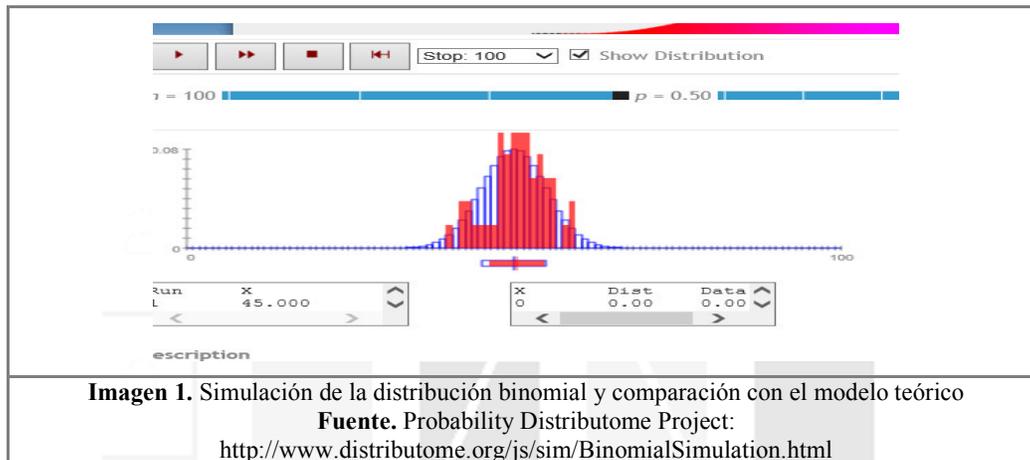
Como hemos indicado, los estudiantes ponen demasiado énfasis en la representatividad de las muestras, olvidando su variabilidad y el efecto del tamaño de la muestra sobre la misma. Para reforzar esta comprensión, se podrían proponer algunos de los ítems típicos usados en la investigación de Kahneman, Slovic y Tversky (1982), por ejemplo, la siguiente versión del problema del hospital, modificada por Serrano (1996). En la primera parte del ítem se pide comparar la probabilidad de un valor de la proporción muestral en una muestra pequeña y una grande. Habitualmente, se elige la respuesta c), comparando sólo las proporciones, sin tener en cuenta la variabilidad muestral, que es mayor en la muestra grande. La solución correcta sería la a). En la segunda parte se razona sobre los valores más y menos probables en una distribución binomial.

Tarea 4. En la maternidad de la ciudad X están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa, según el sexo del recién nacido.

1. ¿Cuál de estos casos te parece más probable y por qué?
 - a. Que entre los próximos 10 nacimientos 8 o más sean varones.
 - b. Que entre los próximos 100 nacimientos 80 o más sean varones.
 - c. Las dos cosas anteriores son igual de probables.
2. ¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos y por qué?
 - a. La fracción de chicos será mayor o igual a $7/10$.
 - b. La fracción de chicos será menor o igual a $3/10$.
 - c. La fracción de chicos estará comprendida entre $4/10$ y $6/10$.
 - d. Las tres cosas son igual de probables.

Para corregir los sesgos de los estudiantes en estos problemas, se puede recurrir a la simulación de las distribuciones binomiales, para proporcionarles una mayor experiencia con el muestreo y un reconocimiento de los factores que afectan a su variabilidad. Un

ejemplo de estos simuladores, que permite también comparar con la distribución binomial teórica, se muestra en la Imagen 1. El simulador permite variar el valor de la proporción en la población y el tamaño de la muestra (valores p y n en la distribución binomial), lo que permite analizar las respuestas a la Tarea 4, con diferentes valores de n y p .



En la Tarea 5, tomada de Gómez et al. (2014), en lugar de preguntar por la plausibilidad de una muestra dada la población, se pide generar muestras de una población, cuya proporción debe estimar el estudiante a partir de los datos del enunciado. En la tarea propuesta, el valor esperado del número de chinchetas que cae con la punta hacia arriba en la siguiente repetición del experimento será próximo a 68, pues la proporción muestral observada es esa ($\hat{p} = 0,68$) y, por tanto, sería el mejor estimador de la proporción en la población. Sin embargo, cabe esperar alguna variabilidad en las cuatro muestras diferentes, debido a la variabilidad en el muestreo. Una respuesta razonable sería, por ejemplo, indicar los valores 65, 70, 71 y 64 para las cuatro nuevas muestras.

Tarea 5. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba y 32 caen hacia abajo. Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño vacía una caja de 100 chinchetas y obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Escribe cuatro resultados posibles si se repite el experimento cuatro veces.

Aunque la mayoría de los estudiantes proporciona una respuesta correcta, teniendo en cuenta la información frecuencial del enunciado, otros dan estimaciones próximas a 50 chinchetas con la punta hacia arriba, o bien intentan compensar el resultado del profesor dando muestras con el número de chinchetas alrededor de 30. También hay estudiantes que dan valores muy extremos, como 100 chinchetas con la punta hacia arriba, o mezclan

las anteriores respuestas (Begué, 2016). Además de discutir las soluciones en clase, se pueden realizar experimentos con chinchetas reales o utilizar el simulador presentado en la Imagen 1 para hacer ver a los estudiantes el comportamiento previsto en diferentes muestras.

PARA FINALIZAR

El análisis de los componentes del sentido del muestreo realizado, indica que no es suficiente enseñar las reglas y conceptos con el fin de llegar a la comprensión integral del tema. A pesar de nuestros esfuerzos, las concepciones erróneas permanecen después de la instrucción formal, por lo que cabe reflexionar en las palabras de Moore (1997, p. 124): “Debemos preguntarnos si la enseñanza tradicional de los estudiantes es demasiado restringida”. Debiéramos preguntarnos por qué la enseñanza actual de la estadística no mejora las intuiciones de nuestros estudiantes y, en este sentido, qué tendríamos que cambiar para remediar la situación. Quizás “la estadística debiera enseñarse a la vez que se muestran materiales sobre estrategias intuitivas y errores de inferencia [...] esto tendría la ventaja de aclarar los principios subyacentes de la estadística y facilitar que se aprecie su aplicación a situaciones concretas” (Nisbett y Ross, 1980, p. 281).

Los diseños curriculares permiten que la enseñanza del muestreo comience desde la etapa secundaria, donde las tareas que proponemos en este trabajo tienen toda su entidad, aunque son solo algunos de los posibles ejemplos que podemos utilizar para desarrollar el sentido del muestreo en los estudiantes. Todas estas tareas, y otras analizadas en Batanero (2013) y Batanero y Borovcnik (2016), podrían englobarse dentro de lo que hoy se denomina como razonamiento inferencial informal, desde el que se intenta iniciar a los estudiantes en la inferencia estadística, gradualmente y con apoyo en tareas simples, recursos manipulativos o simulación. Dentro de esta aproximación, tiene importancia la comprensión del muestreo, que es resaltada por Zieffler, Garfield, delMas y Reading. (2008), para quienes la inferencia informal sería “el modo en que los estudiantes usan su conocimiento estadístico informal para apoyar inferencias sobre características desconocidas de una población basándose en muestras observables” (p. 44).

Numerosos *applets* interactivos proporcionan actualmente un entorno dinámico y visual en el que los estudiantes pueden participar en el muestreo, el azar y la construcción de las distribuciones muestrales. En concreto, la disponibilidad actual de software y tecnología hace que sea posible dedicar el tiempo, que previamente se invertía en tareas rutinarias y de cálculo, en trabajar de forma más intuitiva y reforzar el razonamiento y sentido sobre el muestreo.

Agradecimiento: Proyecto EDU2016-74848-P y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

- Batanero, C. (2013). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 277-291.
- Batanero, C. & Borovcnik, M. (2016). Sampling and Inference. En C. Batanero y M Borovcnik (Eds.), *Statistics and Probability in High School* (pp. 163-196). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18.
- Begué, N. (2016). Comprensión de elementos básicos de muestreo en alumnos de Educación Secundaria Obligatoria. Tesis de Máster. Universidad de Granada.
- Ben-Zvi, D., Bakker, A. & Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 291-303.
- Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study*. 57- 69. Dordrecht: Springer.
- Chernoff, E. J. & Russell, G. L. (2012). The fallacy of composition: Prospective mathematics teachers? Use of logical fallacies. *Canadian Journal for Science, Mathematics and Technology Education*, 12(3), 259-271.
- Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers. Recuperado de www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.
- Di Martino, P. & Zan, R. (2015). The construct of attitude in mathematics education. En B. Pepin & B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education: Exploring a mosaic of relationships and interactions* (pp. 51-72). New York: Springer.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education [GAISE] report: A preK-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Recuperado de www.amstat.org/education/gaise/.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gómez, E., Batanero, C. & Contreras, C. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, 28(48), 209-229.
- Gómez-Chacón, I. (2000) Affective influences in the knowledge of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 43(2), 149-168.

- Harradine, A., Batanero, C. & Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*. (pp. 235-246). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6(2), 187-205.
- Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.
- Langer, E. J. (1975). The illusion of control. *Journal of personality and social psychology*, 32(2), 311.
- Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23(6), 557-568.
- Meletiou-Mavrotheris, M., & Paparistodemou, E. (2015). Developing students' reasoning about samples and sampling in the context of informal inferences. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 385-404.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD] (2015). Real decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la educación secundaria obligatoria y del bachillerato. Madrid. MECD.
- Moore, D. S. (1991). Teaching statistics as a respectable subject. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the twenty-first century* (pp. 14-25). Mathematical Association of America
- Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content: the case of statistics. *International Statistical Review*, 635, 123-165.
- Nisbett, R., & Ross, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings of social judgments*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En D. Ben-Zvi & J. B. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, Holanda: Springer.
- Senior Secondary Board of South Australia [SSBSA] (2002). *Mathematical studies curriculum statement*. Adelaide, Australia: SSBSA.
- Serrano, L. (1996). Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Shaughnessy, J. M., Ciancetta, M. & Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 177-184). Bergen, Noruega: International Group for the Psychology of Mathematics Education.)

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Judgments of and by representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 117-128). New York: Cambridge University Press.

Watson, J. M. & Moritz, J. B. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1) 44-70.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58.

