
ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS PARA MEJORAR LAS HEURÍSTICAS ENDEBLES EN ESTOCÁSTICA MOSTRADAS POR PROFESORES EN FORMACIÓN

Greivin, Ramírez Arce

gramirez@itcr.ac.cr

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Universidad de Costa Rica (Costa Rica)

Asunto: Formación de profesores

Temática: Probabilidad y Estadística Descriptiva

RESUMEN

Se presentan y clasifican las heurísticas y sesgos que muestran profesores en formación en pruebas diagnóstico y posterior; así como sesiones de foros que se aplican en un curso de Didáctica de la Probabilidad y la Estadística en el Instituto Tecnológico de Costa Rica durante el primer semestre de 2018. Se utilizan investigaciones recientes en estocástica como marco para la clasificación de los sesgos y heurísticas de los participantes, dando como resultado una evolución importante debido a las estrategias didácticas llevadas a cabo en el curso.

23

PALABRAS CLAVE

Sesgos, Heurísticas, Profesores en formación, Probabilidad, Estadística.

INTRODUCCIÓN

Se documentan las heurísticas o sesgos que muestran un grupo de profesores en formación que toman un curso Didáctica de la Probabilidad y la Estadística en la carrera de Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos, del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Se hace un análisis de comparación, diagnóstico-posterior, de cómo evolucionan las heurísticas mostradas al inicio del curso después de una serie de estrategias didácticas llevadas a cabo para tratar de mejorar las concepciones iniciales.

En Costa Rica, se han hecho cambios importantes en el currículo de matemática a partir de 2012 cuando el Ministerio de Educación Pública [MEP] presenta una reforma integral en todos los niveles de primaria y secundaria; promoviendo, en buena proporción, los contenidos de probabilidad y estadística, y exigiendo, a la vez, a los docentes formarse, actualizarse o bien capacitarse en estas áreas.

Los profesores en formación del estudio no han sido parte, en su secundaria (de 13 años a los 17 años) de la reforma, pues con el plan de transición que el MEP ha desarrollado, a penas en 2017 se han egresado los primeros estudiantes con el plan total incorporado, entre tanto, los profesores actuales participantes del estudio llevan ya de dos a tres años en su ciclo universitario de formación. Hasta el momento han tomado sólo un curso básico de análisis de datos y probabilidad en su plan de estudios de grado, desarrollado con una metodología teórico-práctico.

Así, se confirma la necesidad de que estos futuros profesores hayan tomado desde edades tempranas formación en probabilidad y estadística, pues se anticipa que las heurísticas y sesgos están muy arraigados, a pesar de las estrategias didácticas propuestas en los cursos universitarios; aun así se presentan algunas mejorías.

Los foros de discusión sobre artículos de investigación y propuestas didácticas para primaria y secundaria permiten que los participantes adquieran madurez en el desarrollo de temas de probabilidad y estadística.

MARCO DE REFERENCIA

Heurísticas y sesgos

Según Kahneman, Slovic y Tversky (1982), hay explicaciones para las heurísticas o sesgos al enfrentarse a una tarea estocástica: i) Son procesos mentales que reducen la complejidad de un problema, de modo que sea accesible para el que lo está resolviendo. ii) Deficiencias al percibir los problemas y iii) Falta de motivación al buscar y seleccionar información. Agregan:

Las heurísticas difieren de los algoritmos en que son automáticas y se aplican inconscientemente sin pensar si es adecuada o no al juicio a realizar. El algoritmo se aplica paso a paso en forma concreta, establecido por criterios dados, y produce la solución para cualquier problema dentro de una clase dada (p. 65).

Díaz (2005, en Serrano, 2010) aporta un resumen, producto de muchas investigaciones, de estas heurísticas y sesgos que serán la base para la clasificación de las respuestas incorrectas de los participantes en el estudio. Entre ellas están:

Heurística de representatividad

Algunos problemas de probabilidad que aparecen en la vida diaria están relacionados con la pertenencia de un elemento a una categoría (¿Qué probabilidad hay de que el elemento A pertenezca a la clase B?). Para resolverlos confiamos en la heurística de representatividad que consiste en evaluar la probabilidad de un suceso por el grado de

correspondencia o similitud entre una muestra y una población, un ejemplar y una categoría, un acto y un actor o, más generalmente, un resultado y un modelo (Tversky, Kahneman, 1974). La representatividad se usa para predecir resultados y, generalmente, produce buenas respuestas, ya que las muestras y los resultados más representativos tienen una mayor probabilidad de ocurrencia. Sin embargo, el hecho de fijarnos solo en la similitud de la muestra con la población puede llevarnos a ignorar otros elementos esenciales de la información, como la variabilidad del proceso de muestreo, ocasionando algunos errores. Entre los sesgos más comunes que surgen al utilizar esta heurística, según Kahneman et al. (1982) mencionan los dos siguientes:

Insensibilidad al tamaño de la muestra. En muchas situaciones de estimación, el valor esperado del estadístico de la muestra es igual al valor del parámetro en la población. Este valor no depende del tamaño de la muestra, aunque la varianza del estadístico, que es una variable aleatoria, es una función inversamente proporcional al tamaño de la muestra, lo que influye en las probabilidades de obtener diferentes valores del estadístico muestral. Con frecuencia se olvida esta última propiedad, por lo que se hace una extensión indebida de la ley de los grandes números, esperando la convergencia de los valores de los estadísticos a los parámetros poblacionales en una serie corta de ensayos. Parece como si se creyese en una “Ley de los pequeños números”, por la que las pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden.

Concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias. En un proceso aleatorio, se espera que una parte de la trayectoria represente fielmente el proceso. Por ello, las secuencias de resultado que aparecen relativamente ordenadas no se consideran aleatorias. Así, un error típico es la llamada falacia del jugador, de la que, si en una serie de juegos se produce una racha de un mismo resultado, se espera intuitivamente que aumente la probabilidad del resultado contrario en el próximo experimento.

El sesgo de equiprobabilidad

En los experimentos de Lecoutre (1985, 1992), Lecoutre y Durand (1988) y Lecoutre y Cordier (1990), se describe la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio. Lecoutre y sus colaboradores encontraron que ello no es debido a la falta de razonamiento combinatorio, sino a que los modelos combinatorios no se asocian fácilmente con las situaciones en que interviene “el azar”. Los sujetos que muestran el sesgo de equiprobabilidad consideran que el resultado del experimento “depende del azar” y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables. Desde el punto de vista de la enseñanza este sesgo supondría una extensión indebida de la regla de Laplace y la no discriminación de las situaciones en las que es o no es aplicable el principio de indiferencia.

Enfoque en el resultado aislado

Konold (1991) estudió un patrón de errores que considera más fundamental que las heurísticas descritas anteriormente. En lugar de explorar cómo los sujetos realizan los juicios de probabilidad, se interesó por cómo interpretan las preguntas sobre la probabilidad o el valor de una probabilidad. Como resultado de sus entrevistas a estudiantes universitarios, llegó a la conclusión de que estos interpretaban una pregunta sobre la probabilidad de forma no probabilística. Por ello, una pregunta en la que se pide explícitamente la probabilidad de un suceso se interpreta como tener que predecir si el suceso en cuestión ocurrirá o no en el siguiente experimento. Por ejemplo, al interpretar una predicción meteorológica en la que se da una probabilidad de lluvia de un 70%, muchos sujetos indican que lloverá el día en cuestión. Si el día en cuestión no llueve, pensarán que el meteorólogo se equivocó en sus predicciones. Esta conducta es razonablemente consistente con la primitiva acepción de la palabra probable (Hacking, 1975), en la que un acontecimiento es probable si es verosímil que suceda. Las personas que presentan esta concepción, evalúan las probabilidades comparándolas con los valores 0%, 50% y 100%. Si una probabilidad se acerca a los extremos 0% o 100%, el suceso se considera como imposible o seguro, respectivamente; sólo si se acerca al 50% se considerará verdaderamente aleatorio.

Los estudiantes que muestran este tipo de comportamiento, tienden a buscar explicaciones causales en lugar de aleatorias a la ocurrencia de resultados inesperados y a la variabilidad de los fenómenos aleatorios. Asimismo, se ignora la información de tipo frecuencial, prefiriendo basar los juicios en consideraciones subjetivas sobre el fenómeno dado. La investigación de Konold (1989) sugiere que los alumnos que muestran el “enfoque en el resultado aislado” consideran que cada una de las repeticiones de un experimento aleatorio no tiene porqué guardar relación con las anteriores o posteriores; por lo que podrán tener dificultad en comprender un enfoque frecuencial de la probabilidad en la enseñanza.

La probabilidad condicional

Intuitivamente, la probabilidad condicional $P(A|B)$, de un suceso A dado otro suceso B , es la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado. Un concepto relacionado con la probabilidad condicional es el de independencia, ya que dos sucesos son independientes si la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos no cambia al ocurrir el otro. La independencia también se verifica a partir de la regla del producto, ya que A y B son independientes si y solo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Estas definiciones, aunque matemáticamente poco complejas, han descrito sesgos de razonamiento cuando se aplican en la resolución de problemas, así:

Falacia de las tasas base. Tversky y Kahneman (1982) denominaron falacia de las tasas base al hecho de ignorar la probabilidad a priori de un suceso en problemas que involucran el cálculo de la probabilidad a posteriori, calculándola como si fuese una probabilidad simple. Generalmente, este sesgo ocurre debido a una percepción incorrecta de la dependencia entre los sucesos implicados y sobre todo aparece en problemas que se resuelven mediante aplicación del teorema de Bayes. Una consecuencia es la estimación incorrecta de los riesgos asociados a la toma de decisiones; por ejemplo, esta conducta ha sido descrita en estudios médicos (Eddy, 1982). Se ha observado, asimismo, este sesgo en estudiantes después de seguir un curso donde han estudiado la probabilidad condicional (Totohasina, 1992; Díaz, De la Fuente, 2007).

Confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes. Creer que dos sucesos son independientes si y solo si son excluyentes es un error extendido, incluso entre futuros profesores de secundaria (Sánchez, 1996). Kelly y Zwiers (1986) indican que este error puede ser debido a la imprecisión del lenguaje ordinario, en que independiente puede significar, a veces, separado. También puede suceder cuando no se identifica con claridad la intersección de los sucesos en el espacio muestral producto (Truran, 1997).

Confundir probabilidades conjuntas y condicionales. Pollatsek et al. (1987) y Ojeda (1995) sugieren que los enunciados que usan la conjunción y pueden llevar a muchos estudiantes a confundir una probabilidad conjunta con una probabilidad condicional. Esta confusión también aparece en un estudio previo con futuros profesores de educación primaria (Contreras et al., 2010).

Falacia de la conjunción. Con este nombre se denomina a la creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que cada uno de ellos, por separado (Tversky, Kahneman, 1982). Díaz (2005) indica que este sesgo aparece únicamente cuando uno de los sucesos tiene una probabilidad muy alta en comparación con el otro. En dicho caso, la intersección de los dos sucesos se ve más probable que el suceso de mayor probabilidad, por lo que el error se produce como resultado de considerar la conjunción como más representativa que cada suceso por separado.

Falacia de la condicional transpuesta. Consiste en la confusión entre una probabilidad $P(A|B)$ y la que se obtiene al cambiar la condición y el condicionado, $P(B|A)$ (Falk, 1986). Este error aparece con frecuencia en contextos médicos, donde se confunde la probabilidad de que una prueba médica de un resultado positivo cuando se tiene una enfermedad, con la probabilidad de tener la enfermedad, si el resultado de la prueba es

positivo (Eddy, 1982). También aparece al interpretar el nivel de significancia en un contraste de hipótesis (Valera, Sánchez, Marín, 2010).

Falacia del eje de tiempo. Es la creencia de que un suceso no puede condicionar a otro que ocurra anteriormente. Gras y Totohasina (1995) indican que los estudiantes asocian el condicionamiento con el orden temporal de los sucesos y no encuentran natural que se condicione un suceso por otro que ocurre con posterioridad. Denominan a esta forma de razonar concepción cronológica de la probabilidad condicional e indican que aparece por una confusión entre condicionamiento y causación. Este sesgo se ha detectado también en las investigaciones de Falk (1986) y Díaz y de la Fuente (2007).

Marco de clasificación de los reactivos de los cuestionarios diagnóstico y posterior

La clasificación de los ítems del cuestionario diagnóstico y posterior se hace, según criterio de expertos, mediante la escala de la prueba PISA, auspiciada por el Organismo para la Cooperación y el Desarrollo Económico [OECD]. Esta organización ha sido influyente en los cambios curriculares hechos en Costa Rica debido a los pobres resultados obtenidos en la prueba, sobre todo en matemática, desde que se sometió cada trienio, a partir de 2009.

La prueba examina los dominios en lectura, matemáticas y ciencias, en jóvenes de 15 años. El dominio de matemáticas tiene cuatro sub-escalas, i) Cantidad, ii) Espacio y Forma, iii) Cambio y Relaciones, e iv) Incertidumbre y datos. Para cada una existen seis niveles de desempeño donde se indica qué deben ser capaces de hacer los estudiantes. En el último caso, se integra el tratamiento estadístico de los datos y su probabilidad de ocurrencia. En la Tabla 1 se describen las tareas y niveles de desempeño en esta sub-escala.

NIVELES	LOS ESTUDIANTES DEBEN PODER:
6	Interpretar, evaluar y reflexionar críticamente sobre una serie de datos estadísticos o probabilísticos, sobre información y situaciones complejas, para analizar los problemas. Saben aplicar conocimientos y razonamientos sujetos a varios elementos del problema; entienden las conexiones entre los datos y las situaciones que representan y son capaces de sacar provecho de estas conexiones para explorar plenamente las situaciones del problema. Llevan a cabo técnicas de cálculo apropiadas para explorar los datos o resolver problemas probabilísticos; y pueden producir y comunicar conclusiones, razonamientos y explicaciones.
5	Interpretar y analizar una serie de datos estadísticos o probabilísticos, información y situaciones, para resolver el problema en contextos complejos que requieren la vinculación de diferentes componentes del mismo. Pueden utilizar el razonamiento proporcional de forma eficaz para vincular los datos de una muestra a la población a la que representan; pueden interpretar las series de datos adecuadamente a lo largo del tiempo, y ser sistemáticos en el uso y la exploración de datos. Saben utilizar los conceptos estadísticos y probabilísticos para reflexionar, sacar conclusiones y generar y comunicar los resultados.

4	Elaborar y emplear las representaciones de una serie de datos y procesos estadísticos y probabilísticos para interpretar los datos, la información y las situaciones, con el fin de hallar la solución del problema. Pueden trabajar de modo eficaz con restricciones, tales como las condiciones estadísticas que pueden aplicar en un experimento de muestreo, y pueden interpretar y convertir los datos entre dos representaciones relacionadas (tales como un gráfico y una tabla de datos). Saben desarrollar el razonamiento estadístico y probabilístico para llegar a conclusiones contextuales.
3	Trabajar con datos e interpretar información estadística procedente de una sola representación que incluye múltiples fuentes de información (por ejemplo, un gráfico que representa varias variables) o procede de dos representaciones de datos relacionadas, tales como una tabla de datos simple y un gráfico. Pueden trabajar e interpretar los conceptos y convenciones estadísticas y probabilísticas descriptivas, como el lanzamiento de una moneda o la lotería, además de poder sacar conclusiones a partir de los datos, por ejemplo, calculando o utilizando las medidas simples del centro y dispersión. Son capaces de llevar a cabo un razonamiento básico de estadística y probabilidad en contextos sencillos.
2	Identificar, extraer y comprender los datos estadísticos presentados en una forma simple y conocida, por ejemplo en forma de tabla, gráfico de barras o gráfico de segmentos. Pueden identificar, entender y utilizar los conceptos de estadística y probabilidad básica y descriptiva en contextos cotidianos, como el lanzamiento de una moneda o tirar los dados. En este nivel pueden interpretar los datos en representaciones simples y aplicar los procedimientos de cálculo apropiados que conecten los datos facilitados al contexto del problema.
1	Identificar y leer la información presentada en tablas pequeñas o gráficos simples y bien etiquetados para localizar y extraer los valores de datos específicos, ignorando la información distractora, e identificar cómo están relacionados con el contexto. Reconocer y utilizar los conceptos básicos de aleatoriedad para identificar ideas erróneas en conceptos empíricos conocidos, como los resultados de la lotería.
<p>Tabla 1. Descripción de las tareas y niveles de desempeño en incertidumbre y datos Fuente. PISA, 2012</p>	

DESARROLLO DEL TEMA

Aspectos metodológicos

Sobre el cuestionario diagnóstico y cuestionario posterior. El cuestionario consta de dos partes (Anexo A), una de selección única y otra de desarrollo (o respuesta abierta). Una base del cuestionario fue tomado de la investigación realizada por Cuevas y Ramírez (2018) en el que a los profesores a los que se le aplicó dicha prueba, mostraron conocimientos endebles para las exigencias de los estándares propuestos por el Ministerio de Educación Pública en Costa Rica para las áreas de probabilidad y Estadística. Ambos cuestionarios, diagnóstico y posterior, son idénticos, el primero se aplica en la primera clase del curso lectivo y el posterior en la última clase, después de 16 semanas.

El cuestionario diagnóstico lo debían responder en una hora y media de tiempo, sin embargo todos lo entregaron a lo sumo en una hora. La aplicación del cuestionario posterior tardó 45 minutos en promedio.

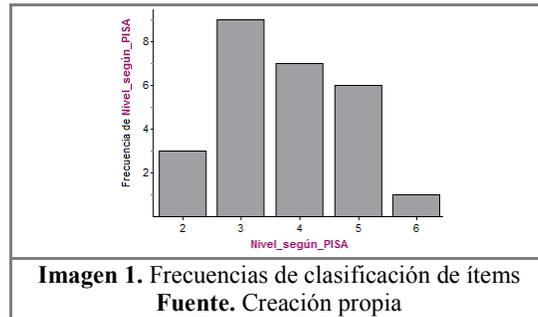
Una vez revisada la prueba diagnóstico, se les daba a conocer la calificación obtenida a cada uno de los participantes, pero no se regresó el enunciado ni tampoco se retroalimentó sobre cuál era la opción correcta a cada reactivo. Esto debido a que se quiere comparar con las respuestas brindadas en el cuestionario posterior.

El Coeficiente Alfa de Cronbach del cuestionario da como resultado 0.81 para el diagnóstico, mientras que para el posterior se obtuvo 0.7; que según Barraza (2007), para efectos de investigación, es una confiabilidad aceptable. La disminución se debe a que hay menor variabilidad en los resultados para el cuestionario posterior. La Tabla 2 muestra la clasificación de los ítems, su nivel de escala que establece PISA y la temática examinada.

ÍTEM	NIVEL SEGÚN PISA	TEMÁTICA
1	4	Variabilidad
2	4	Esperanza dist. binomial
3	3	Experimento aleatorio
4	3	Interpretación gráfica
5	3	Eventos condicionantes
6	2	Medidas de tendencia central
7	4	Tabla de frecuencias
8	5	Medidas de tendencia central
9	4	Probabilidad con porcentajes
10	6	Probabilidad condicional
11	2	Eventos excluyentes y complementarios
12	3	Clasificación de variables
13	3	Clasificación de variables
14	3	Clasificación de variables
15	5	Secuencias de lanzamientos de monedas
16	3	Probabilidad condicional
17	4	Coefficiente de variación y variabilidad relativa
18	5	Posición relativa
19	2	Variabilidad
20	5	Diagrama de Golback
21	4	Eventos independientes
22	5	Eventos independientes
23	3	Probabilidad condicional
24	3	Independencia de eventos
25a 25b	4	Probabilidad de eventos simples con tablas
25c 25d	5	Probabilidad de eventos condicionales con tablas

Tabla 2. Clasificación de ítems según escala PISA y temáticas
Fuente. Creación propia

La distribución de frecuencia de los ítems se concentra más de los niveles centrales a los superiores (3, 4 y 5) según la escala PISA.



Sobre la población de estudio. Los profesores en formación están inscritos en la carrera Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos y la investigación se desarrolla mientras toman el curso Didáctica de la Estadística y la Probabilidad de quinto semestre en su plan de estudios con una duración de 4 horas lectivas semanales (para ese momento tienen 21,43 años de edad en promedio). En el semestre anterior cursaron Elementos de Análisis de Datos y Probabilidad, cuyas temáticas principales son: conteo, combinatoria, cálculo de probabilidades y distribuciones de variable aleatoria; así como estadística descriptiva.

Hasta el momento han tomado cursos de Matemática (Fundamentos de Matemática, Matemática Discreta, Cálculo y Análisis I; así como Geometría I y II); Pedagogía (Teorías Psicopedagógicas, Aprendizaje y Didáctica, Didáctica del Álgebra y Funciones) y de Tecnología (Tecnologías Digitales Aplicadas a la Matemática Educativa y Elementos de Computación). La formación en primaria y secundaria, de los participantes, sobre estos temas fue escasa o nula, debido a que en Costa Rica apenas fue reciente el cambio en los programas de estudio. Participaron 15 profesores provenientes tanto de zonas rurales como urbanas, de los cuales 9 eran hombres. Un estudiante abandonó el curso, por lo que el cuestionario posterior sólo lo responden 14 profesores.

Sobre las temáticas, metodología y evaluación del curso. El curso se desarrolla mediante una combinatoria metodológica que incorpora, entre otras estrategias didácticas, lecciones magistrales, análisis de lecturas, estudio de casos, trabajo cooperativo, exposiciones de los estudiantes, demostraciones, resolución de problemas, formulación y desarrollo de proyectos, jornadas de discusión y reflexión.

Las temáticas abarcadas en el curso corresponden a las siguientes:

1. Importancia de la estadística y la probabilidad en diferentes contextos.
 - a. La estadística y la probabilidad en diversos contextos sociales (políticas económicas, salud pública, educación).
 - b. Importancia de la estadística y la probabilidad para la investigación y el desarrollo científico y tecnológico.

2. Educación y pensamiento estocástico.
 - a. Fines y propósitos de la educación estocástica.
 - b. Estado actual de la educación estocástica.
 - c. Perspectivas futuras para la educación estocástica.
3. Principales dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y la probabilidad.
 - a. Dificultades de tipo filosófico.
 - b. Dificultades de tipo psicológico.
 - c. Dificultades de tipo metodológico.
4. Aspectos metodológicos para la educación estocástica.
 - a. El papel del docente y del estudiante, desde diferentes perspectivas teóricas.
 - b. Estrategias metodológicas (lecciones magistrales, actividades lúdicas, proyectos educativos, resolución de problemas, simulaciones en computadora, trabajo cooperativo, etc.).
 - c. Materiales y recursos didácticos para la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y la probabilidad (material concreto, uso de tecnologías digitales basadas en software libre).
5. Posibilidades y limitaciones de diversos instrumentos diseñados para la evaluación de los aprendizajes en el campo de la estadística y la probabilidad.

La evaluación del curso contempla las siguientes rúbricas:

RUBRO	PORCENTAJE
Exposición (programas MEP-NCTM)	20%
Foros de discusión	30%
Observación de clase, reporte y exposición	25%
Propuesta Didáctica	25%
Tabla 3. Evaluación del curso	
Fuente. Creación propia	

Exposición (programas MEP-NCTM). Se refiere a la presentación de las habilidades propuestas, metodología y problemas planteados por el Ministerio de Educación Pública o la *National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM] (2015) en algún nivel educativo de primaria o secundaria. Resumen de la exposición a los compañeros, para el foro. Debe ser desarrollada individualmente o en grupos de 2 personas.

Foros. Se refiere a consultas a compañeros o profesor de lecturas realizadas o propuestas desarrolladas. Al menos un comentario o pregunta por clase. Debe ser individual. Se habilitan en la plataforma del TEC digital semanalmente.

Observación de clase, reporte y exposición. Visitar una institución de secundaria o primaria donde se estén impartiendo, previa coordinación con el maestro o profesor del colegio, temas de probabilidad o estadística; para observar dos lecciones. Puede ser en parejas o individual. Debe entregar un reporte al profesor, que contemple aspectos abarcados en la clase: introducción y contextualización, objetivos pretendidos, metodología(s) empleada(s), desarrollo de actividades, evaluación y cierre. Además, debe ser expuesto en 30 minutos a sus compañeros y reportar los principales hallazgos.

Propuesta Didáctica. Proponer la enseñanza de un tema de primaria o secundaria, mediante una clase de 80 minutos. Debe ser de manera individual o en parejas.

Sobre los foros y exposición (programas MEP-NCTM). Los participantes debían leer semanalmente artículos sobre diversas investigaciones a nivel nacional e internacional en Didáctica de la Probabilidad y la Estadística. Se habilitan foros de discusión en los cuáles debían realizar comentarios y preguntas de cada una de las lecturas a los exposiciones (algunas veces el profesor desarrollaba la exposición o bien los mismos compañeros. Cada participante, de forma individual o en parejas, debía exponer una vez al semestre según distribución aleatoria de alguna de las temáticas del curso).

Una semana previa a la exposición se habilita el Foro, en el cual, el expositor debía subir un artículo de su lectura, de la propuesta didáctica desarrollada en temas de probabilidad y estadística para primaria o secundaria según el programa de estudios del MEP en Costa Rica, o bien, de los principios y estándares de la NCTM en Estados Unidos. Se desarrollaron 18 foros distribuidos en las siguientes temáticas:

- El Foro 1 trató sobre el perfil del profesorado que enseña estadística en secundaria en CR y México (Cuevas y Ramírez, 2018).
- Del Foro 2 al Foro 6, se analizó por completo la propuesta de Batanero (2001) en su libro “Didáctica de la Estadística”, en el que trata sobre la situación actual y perspectivas futuras de la Didáctica de la Estadística, fundamentos epistemológicos, investigaciones sobre razonamiento estadístico y dificultades de aprendizaje, el currículo de estadística y ejemplos de proyectos para la clase de estadística.
- En el Foro 7 se discutió el artículo de Soledad Estrella, presentado en Salcedo (2017), Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico.
- En el Foro 8 se presentaron los modelos: Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) desarrollado por Shulman (1987), Conocimiento Pedagógico Tecnológico del Contenido (TPACK) desarrollado por Koehler y Mishra (2009) y el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTKS) desarrollado

por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013); todos aplicados a la enseñanza de la probabilidad y estadística.

Estos primeros ocho foros estuvieron a cargo del profesor, los siguientes estuvieron a cargo de los participantes:

- Del Foro 9 al Foro 14, los participantes desarrollaron propuestas didácticas en probabilidad y estadística según las habilidades propuestas por el MEP (2012) en primaria y secundaria; distribuidos por cada dos niveles (el Foro 9 se desarrolló en primer y segundo grado de primaria, el Foro 10 en tercero y cuarto grado de primaria, el Foro 11 quinto y sexto de primaria, Foro 12 séptimo y octavo de secundaria, Foro 13 noveno y décimo de secundaria, Foro 14 undécimo y duodécimo de secundaria).
- Del Foro 15 al 18, los estudiantes desarrollaron propuestas didácticas en probabilidad y estadística según las expectativas pretendidas por la NCTM (2000) distribuidos de la siguiente manera: en el foro 15 se desarrollaron las etapas de 3-5, en el Foro 16 las etapas de 6-8, Foro 17 las etapas de 9-10, Foro 18 las etapas de 11-12.

DESARROLLO DE LA PROPUESTA

Se hace un análisis general de rendimiento en ambas pruebas; así como una comparación con el cuestionario de diagnóstico y el cuestionario posterior para cada uno de los participantes. Además, se hace un análisis del nivel de razonamiento que muestran los participantes en los comentarios y preguntas que realizan en el Foro.

Resultados cuestionario de diagnóstico y posterior. A manera de resumen, la siguiente tabla muestra, por temática, el rendimiento promedio de los participantes en el cuestionario diagnóstico y el cuestionario posterior. Preocupa sobre manera, el deficiente análisis acerca de la variabilidad, las medidas de tendencia central y la independencia de eventos.

TEMÁTICA	ÍTEMS	% DE ACIERTO DIAGNÓSTICO	% DE ACIERTO POSTERIOR
Análisis variabilidad	1, 2, 15, 19	27%	45%
Medidas de tendencia central y variabilidad	6, 8, 17, 18	37%	45%
Independencia de eventos	21, 22, 24	43%	56%
Probabilidad condicional	5, 10, 23, 25c, 25d	51%	64%
Probabilidad	11, 16, 25a, 25b	58%	63%
Interpretación de tablas y gráficos	4, 7, 9	62%	58%

Clasificación de variables	12, 13 y 14	62%	86%
Experimentos determinista y Diagrama de Golback	3 y 20	78%	98%

Tabla 4. Rendimiento global de participantes según temáticas en el cuestionario diagnóstico y posterior
Fuente. Creación propia

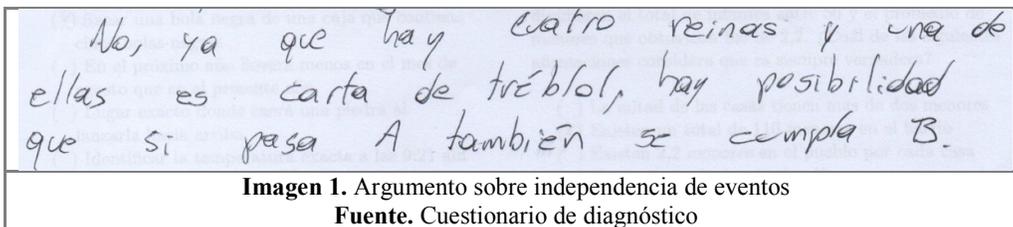
Todos los participantes han superado en el cuestionario posterior los niveles iniciales, propuestos en PISA, que obtuvieron en el cuestionario diagnóstico. De los cuatro participantes que se ubican alrededor del primer nivel en el diagnóstico, tres de ellos pasan al nivel 2 (sólo uno permanece en el primer nivel), siguen habiendo ocho que se ubicaban un tanto por encima del nivel dos, y cinco alcanzan el nivel tres. Preocupa sobre manera los resultados, pues pronto serán las temáticas que deben enseñar.

Preguntas sobre análisis de variabilidad. Tres de los cuatro reactivos correspondientes al análisis de variabilidad tuvieron un porcentaje de acierto inferior a 43 %, tanto en el cuestionario diagnóstico como posterior. El ítem 19 pasó de un 40 % de acierto en el diagnóstico a un 79 % en el posterior, se puede deber a la insistencia en el curso sobre la constante consideración de la variabilidad en representaciones gráficas. En el ítem 1, en el diagnóstico, sólo dos participantes responden correctamente, entre tanto once de ellos seleccionan la distribución B como la más variable.

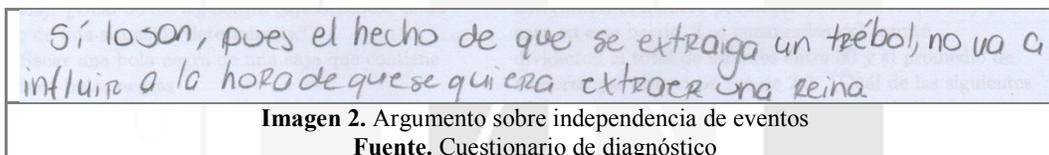
En el cuestionario posterior, sólo seis aciertan y cinco seleccionan la distribución B como la más variable (mismos que habían seleccionado esta opción en el diagnóstico). Quiénes seleccionan la opción B, enfocan su análisis gráfico en lo irregular de las frecuencias absolutas y no en el rango de las variables graficadas. Sólo dos participantes en el diagnóstico y tres en el posterior responden correctamente al ítem 15, los demás responden centrándose en el cálculo teórico de la probabilidad seleccionando que “todas las secuencias son igualmente probable”, presentándose el sesgo de equiprobabilidad, específicamente sobre la concepción errónea en las secuencias aleatorias.

Preguntas sobre medidas de tendencia central y variabilidad. En el reactivo 18, para el diagnóstico, sólo un participante respondió correctamente, ocho de ellos respondieron a la opción 3, tres a la opción 2, y tres a la opción 1. En el posterior, nuevamente sólo uno responde correctamente (no es el mismo que acertó en el diagnóstico), siete responden a la opción 3, cuatro a la opción 2 y dos a la opción 1. Se sigue presentando un desconocimiento generalizado sobre las posiciones relativas, a pesar de que en el desarrollo del curso se abarcó el tema. Igualmente se muestran endebles conocimientos sobre variabilidad relativa, pues en el ítem 17 sólo seis participantes aciertan en el diagnóstico y cinco en el posterior (enfoque de resultado aislado al desconocer la variabilidad).

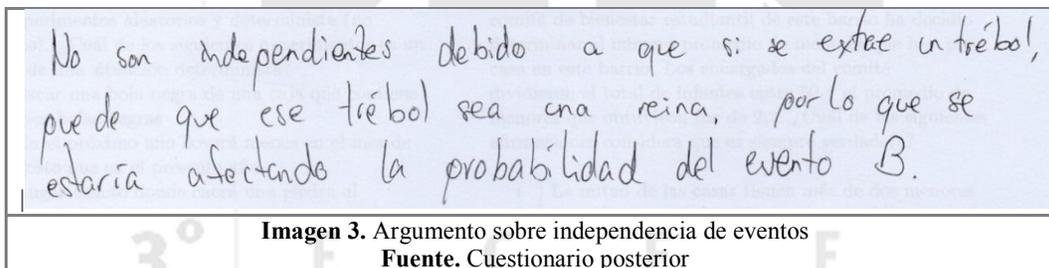
Preguntas sobre independencia de eventos. El reactivo 22, en el diagnóstico, ninguno justifica correctamente la independencia de los eventos, por ejemplo:



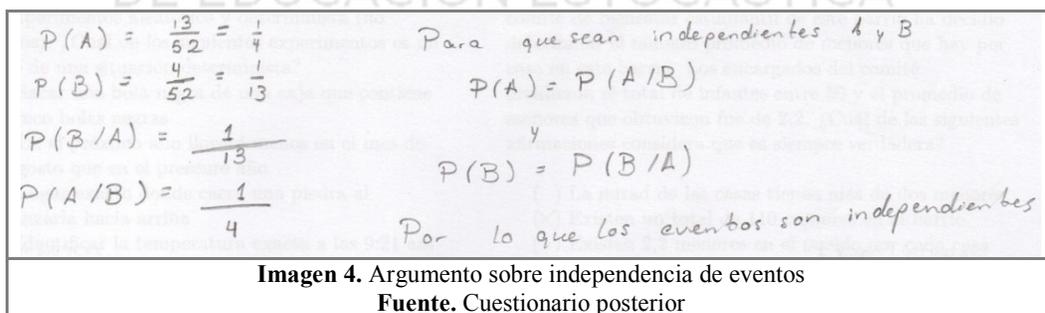
Una respuesta correcta, sin mostrar el cálculo de probabilidades que lo justifique es:



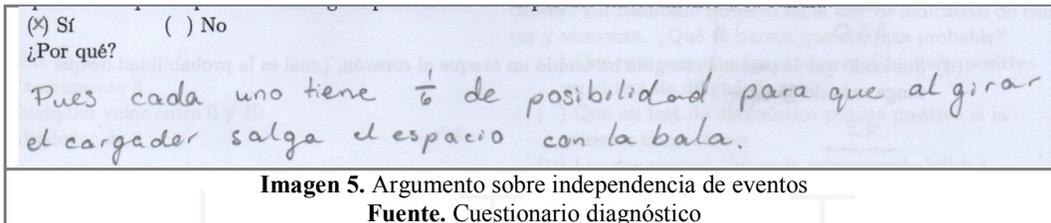
En el cuestionario posterior la situación es similar, la mayoría confunde independencia con eventos excluyentes (sesgo de independencia):



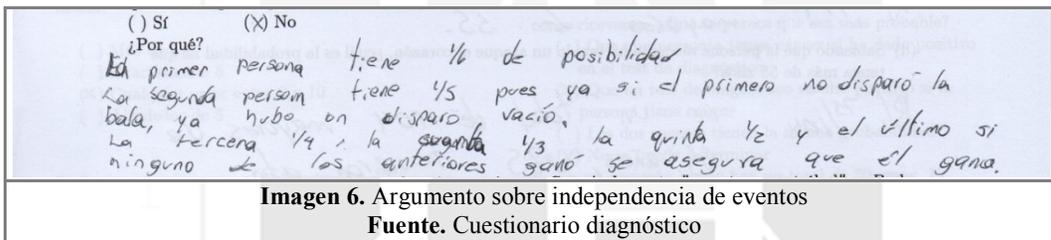
Solo un estudiante justifica correctamente la independencia de los eventos en el cuestionario posterior:



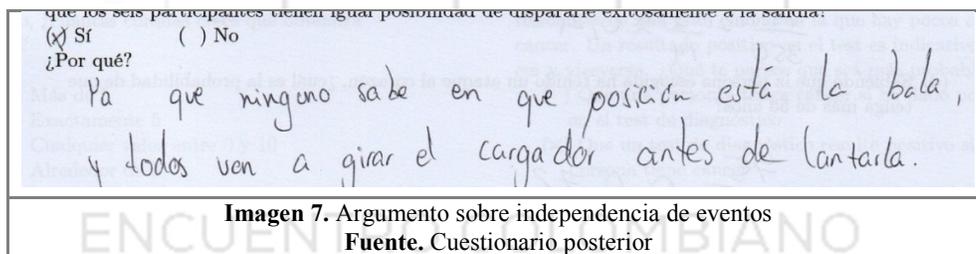
Entre tanto, en el ítem 21, en el cuestionario diagnóstico hay siete justificaciones correctas que muestran el entendimiento de la independencia de los eventos, en un problema donde el proceso se realiza con reposición:



Algunas respuestas manifiestan que las probabilidades varían obviando el hecho de que el cargador gira aleatoriamente antes de cada disparo:



En el posterior, 10 participantes justifican correctamente, como muestra la Imagen 7.



Una respuesta donde no se considera la reposición y además muestra el enfoque de resultado aislado al centrarse en que una vez que el arma se dispara no hay más posibilidades de disparo para los siguientes, como si no tuvieran inicialmente la misma probabilidad:

que los seis participantes tienen igual posibilidad de dispararle exitosamente a la sandía?
 Sí No
 ¿Por qué?
 Pues si el primero acierta, ya los demás no tienen posibilidad de disparar.
 De igual forma suponiendo que cae una falla, el primero de fijo le toca una bala, al segundo puede que le salga un hueco sin bala y así sucesivamente; al último solo tiene una opción de que le salga bala

Imagen 8. Argumento que no considera la reposición
Fuente. Cuestionario posterior

Preguntas sobre probabilidad condicional. En el ítem 5, en el diagnóstico, sólo cuatro participantes responden correctamente; los demás manifiestan igual probabilidad en los eventos. Para el posterior, seis aciertan, cuatro manifiestan igual probabilidad, tres manifiestan que es más probable que una persona tenga cáncer si ha dado positivo en el test y uno dice que no se puede determinar. En este ítem la mayoría muestra indiferencia en el evento condicionante y condicionado (falacia de la condicional transpuesta). Cuando se les pide que definan probabilidad condicional (ítem 23), solo un participante lo hace correctamente en el diagnóstico, ocho lo hacen de forma imprecisa, ya que puede definirse probabilidad condicional, independientemente de que el suceso ocurra o no (inclusive se condicione con un suceso con otro que ocurre con posterioridad; falacia del eje de tiempo), por ejemplo:

23. Defina de manera intuitiva la probabilidad condicional.

Es aquella en la que si no ocurre un evento A, no puede ocurrir un evento B, pues B depende de si ocurre o no A.

Imagen 9. Argumento sobre probabilidad condicional
Fuente. Cuestionario diagnóstico

O bien, pensar que no depende de otro evento (heurística de disponibilidad):

23. Defina de manera intuitiva la probabilidad condicional.

Tiene condiciones para ocurrir, puede depender o no de otro evento.

Imagen 10. Argumento sobre probabilidad condicional
Fuente. Cuestionario diagnóstico

En el posterior, nueve participantes brindan una definición correcta, cuatro lo hacen aún de forma imprecisa y uno no responde. En eventos independientes la probabilidad no se ve afectada por la ocurrencia de otro, sin embargo, un participante confunde la definición de probabilidad condicional con eventos que son dependientes, así:

Una probabilidad que cambia debido a una condición anterior.

Imagen 11. Argumento sobre probabilidad condicional. Confusión con eventos dependientes
Fuente. Cuestionario posterior

Preguntas sobre probabilidad. Solo cinco participantes en el diagnóstico y dos en el posterior han respondido correctamente al ítem 16, manifestando que “los sucesos son igual de probables”; cuatro en el diagnóstico y seis en el posterior han respondido a la primera opción, “Que una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules”, dejándose llevar por una relación causal natural (falacia de eje de tiempo), obviando el hecho de que también puede darse la relación diagnóstica (que la madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules); en el posterior, cuatro marcaron esta relación diagnóstica como la más probable. Los otros participantes han manifestado que no se puede terminar qué suceso es más probable.

Para las otras temáticas, aunque se presentan respuestas incorrectas, correspondientes a conocimientos básicos y niveles inferiores, según PISA; son minoría, por lo que no se profundiza en su análisis.

Análisis de los foros. Todos los participantes muestran un avance importante, en distinto grado, en la profundidad del tipo de comentario y preguntas que se hacen a lo largo de los foros. Inicialmente los comentarios o preguntas se orientan hacia el desarrollo superfluo de una lección, manifestando preocupaciones sobre el tiempo dedicado a las actividades planteadas, el poco acceso que podría haber al uso de la tecnología en las instituciones primarias y secundarias a lo largo del país, manejo de la disciplina al plantear actividades lúdicas, generalidades sin evidencia basados en suposiciones, entre otros. Incluso, algunos de ellos orientaban sus comentarios a realizar resúmenes de los artículos o de las propuestas realizadas en los artículos leídos. Cada uno de los comentarios o preguntas eran avaladas por el profesor del curso, en caso de ser rechazada la intervención en el foro, debían cambiar el comentario o las preguntas realizadas. Para realizar este cambio tenían dos días de tiempo. El número de rechazos disminuyó a lo largo del tiempo. Se presenta el análisis de dos participantes y su evolución en cuatro de los 18 foros.

Foro de Adrián. En este primer foro, realiza un resumen del artículo que lee, e incluso repite algunas preguntas que algunos compañeros ya habían hecho, aunque muestra evidencia de algunas comparaciones en resultados de la investigación entre las naciones, y envía un cuestionamiento interesante a las autoridades magisteriales del país, tal y como se puede observar en la Imagen 12.

En el siguiente comentario (Imagen 13) analiza la dificultad del término de aleatoriedad, por lo que propone una actividad que podría realizarse para que los estudiantes adquieran estos conceptos desde pequeños. Igualmente consulta: ¿Será el ingreso a la educación formal la que coarta el avance del niño por la poca relación con lo que él ya conoce?

Hace un buen análisis al manifestar que los niños de tercero (9 años aprox.) aún se les hace difícil asignarle un número para determinar la probabilidad de un evento, por lo que a esa edad, según estudios de Piaget y Fishbein, lo que pueden lograr es comparar cuáles eventos son más posibles que otros. Propone actividades que promueven la búsqueda de datos, a través de interrogación o medición, contextualizados al estudiante (Imagen 14).

Foro Foro 1. Perfil del profesorado que enseña estadística en secundaria en CR y México: Comentario

 **ADRIAN GERARDO VEGA FLORES** on 09/02/18 23:18

1. Comentario

En este estudio, me llamó la atención que hay ciertas áreas en las que Costa Rica está un poco mejor que México, sin embargo ambos países deben mejorar en el tema de la estocástica, ya que hay bastantes deficiencias. Si bien es cierto, este tema es muy nuevo, los sistemas educativos, en el caso de Costa Rica, el MEP, poco a poco va metiendo más estos temas, con tal de buscar un mejor rendimiento y calidad en la educación del país.

El área que, según el estudio, manejan menor ambos países es el de experimentos aleatorios, donde Costa Rica tuvo un rendimiento de 8 puntos porcentuales más abajo que México. Además donde los docentes costarricenses más fallaron fueron en los temas de análisis de tablas y gráficas y en las medidas de tendencias de variabilidad y los mexicanos tuvieron un menor rendimiento en la clasificación de variables y en la interpretación de tablas y gráficas.

Ahora, es importante destacar que Costa Rica tuvo alrededor de un 20% más que México en el área de clasificación de variables, lo que me llama mucho la atención pues en Costa Rica eran solamente 33 los profesores que participaron en el estudio y en México 78 docentes, es decir más de el doble que en nuestro país.

Por lo que, de este estudio podemos destacar que en realidad ambos países están muy similares, y que ambos nos podemos apoyar para estar mejor capacitados a la hora de impartir las clases. Se podría buscar ayuda en conjunto en aquellos temas que los docentes no tuvieron un buen rendimiento, pues son aquellos a los que más hay que ponerle atención, obviamente sin dejar de lado reforzar, aquellos que tienen un mejor rendimiento.

Por último a mi me surgen unas preguntas, ¿estarán en realidad Costa Rica y México preparados para incluir en los programas de secundaria la estocástica? El avance y evolución de programas va cada vez más rápido y de la mano con la tecnología. Entonces, ¿podremos encontrar alguna estrategia metodológica, que nos ayude a impartir lecciones con ayuda de la tecnología, para que la comprensión de los temas de la estocástica sea más clara tanto para los docentes como para los estudiantes? Y luego, ¿de qué manera hacerlo? ¿basta en realidad con el conocimiento que tenemos en el país? ¿Se tendrá que buscar ayuda internacional para una mejor capacitación de los docentes, o bastará con lo que se aprende en las universidades, capacitaciones del MEP y el material didáctico que tenemos a disposición (ya sea físico o digital)?

LA ÚLTIMA PREGUNTA ES LA ÚNICA QUE ES DISTINTA A LAS HECHAS POR LOS COMPAÑEROS EN COMENTARIOS PREVIOS.

Imagen 12. Participación de Adrián en el 1° Foro
Fuente. Foro de Adrián

Foro Foro 4. Investigaciones razonamiento estadístico y dificultades. Batanero (pág 75-90; 102-105): Comentario

Libro de Carmen Batanero



ADRIAN GERARDO VEGA FLORES on 20/02/18 11:34

1. Comentario

Batanero y Serrano (1999) indican que los estudiantes le dan diferentes significados al término "aleatoriedad", y algunos de ellos son muy similares a los que dice la teoría. Entre ellos están, aleatoridad como: inexistencia de causas o causa desconocida, equiprobabilidad, estabilidad de las frecuencias relativas e impredecibilidad.

Todas estas definiciones, dependiendo del contexto en que hablemos, son o no aceptables, ya que algunas son muy básicas para lo complejo que es este tema. Una forma de explicar este tema en secundaria, puede ser poniendo a los estudiantes a hacer una lluvia de ideas y que digan que piensan ellos que es aleatoriedad, y luego que él haga una retroalimentación explicando con ejemplos todo lo que sus estudiantes dijeron y corrigiendo los errores.

Es importante entonces, empezar a explicar estos temas, desde la niñez, ya que son muy abstractos, pero a pesar de ello, los niños si comprenden las cosas, y curiosamente como dice la lectura, entre más pequeños sean los niños, más cerca están de las definiciones correctas. Es decir, que los niños si comprenden ciertas cosas, que entre más grandes estén es más difícil que comprendan. Pero con esto me surge una pregunta ¿A qué edad será la mejor para empezar a enseñar estadística? ¿El error estará en realidad en no saber reforzar lo que ya traemos desde pequeños?

Imagen 13. Participación de Adrián en el 1º Foro analizando el término aleatoriedad
Fuente. Foro de Adrián

Foro Foro 10. Programas MEP 3-4: Comentario



ADRIAN GERARDO VEGA FLORES on 31/03/18 11:54

1. Comentario

Me parece correcto tanto lo que propone Bryan como lo que propone el MEP, pues son actividades muy acertadas, que se acercan a la realidad nacional, como por ejemplo las aves en peligro de extincion, lo cual me parece muy bueno, pues se cumple con lo que el MEP pide de integrar otras áreas con lo que nosotros estamos enseñando. Además, se le esta enseñando al estudiante la importancia de cuidar y valorar la naturaleza. Es importante rescatar que en el tema de probabilidad todavia no se esta hablando de numeros, sino de cosas más o menos probables, esto me parece muy bien, pues pienso que al asociarle un número, a los estudiantes se les puede dificultar, por lo que me parece correcto que primero se les vaya enseñando que es más o menos probable, para que con el paso del tiempo, los estudiantes puedan ir asociando eso a números.

Además me parece importante por ejemplo lo del supermercado con los kilos, pues así ellos van a asociar todo lo que aprenden en clases con lo que realizan en la vida diaria con sus padres. Me parece importante que el profesor les de ejemplos de la aleatoriedad y sobre la recolección de datos con los elementos que hay dentro de la institución, por ejemplo para recolectar datos se les puede dar a ellos una cinta métrica y que se midan, luego que se pregunten entre ellos la edad, el color favorito entre otros, para que ellos aprendan a recolectar datos y luego, con eso mismo que ellos hicieron, sacar la moda, la media y los mínimos y máximos.

Imagen 14. Participación de Adrián sobre asignación de un número para determinar la probabilidad de un evento
Fuente. Foro de Adrián

La siguiente observación, Adrián la hace a los compañeros que proponen una actividad, advirtiéndole que se debe aumentar el tamaño de la muestra para tener mayor variabilidad de respuestas y considerar el contexto de la institución (rural o urbana) donde se desarrolla la actividad (Imagen 15).

Foro Foro 16. NCTM 6-8: Comentario



ADRIAN GERARDO VEGA FLORES on 27/04/18 21:33

1: Comentario

La propuesta de los compañeros me parece bastante buena; principalmente porque incluyen la parte de cómo se va a evaluar cada actividad, lo cuál me parece muy bueno, pues así a parte de tener actividades de donde escoger para realizar con los alumnos, ya el profesor tendría la forma de cómo evaluarlos. Además me parece muy bien que cada actividad tenga un tipo de evaluación diferente, ya que, al menos yo, considero que cada tema, actividad o habilidad debe evaluarse de forma diferente y enlazado con lo visto en clase. Me parece que las evaluaciones están acordes a las actividades y me parece genial el hecho de que hayan incluido a la tecnología para ello, como lo es el caso de Kahoot, ya que eso a los estudiantes los motiva, los mantiene activos y entretenidos y le agarran más gusto a la materia.

Sin embargo, para la parte 5.2, en la parte que los estudiantes van a ir a preguntar a otros estudiantes del colegio ¿cuál ficha les gusta más?, me parece que se podrían agregar un par de imágenes más e incrementar el número de encuestados (por ejemplo a 20); esto porque me parece que puede haber gente que no se identifique con esas 3 imágenes, ya que no le gusten los deportes, los animales o los vegetales. Eso si, esto también depende del lugar donde se esté dando clases, pues las imágenes que se utilizarán en un colegio de ciudad serán diferentes a las que se utilizarán en un pueblo alejado de la ciudad. Esto depende mucho en conocer el contexto que hay e los estudiantes de cada institución.

Imagen 15. Participación de Adrián en relación con el tamaño de muestra

Fuente. Foro de Adrián

Foros de Edwin. Se destacan los comentarios de Edwin los cuales son específicos y con profundidad en el análisis. En el primer comentario (Imagen 16) hace hincapié en la preparación del profesor de probabilidad y estadística por la variedad de significados que puede surgir de un concepto.

Foro Foro 2. Fundamentos Epistemológicos Batanero (pág 1-29): Edwin

Libro de Carmen Batanero



EDWIN ARMANDO QUESADA SOLANO on 13/02/18 15:15

1: Edwin

Fundamentos Epistemológicos

La epistemología es la rama o departamento de la filosofía que estudia cómo conoce el ser humano. Respecto a la Estadística se puede hablar de cómo concebimos y aprendemos (procesamiento de la información y su permanencia en el tiempo) en esta área, pues la importancia de esta disciplina no se puede exagerar al presentarse en ella facetas como la ciencia siendo una herramienta de investigación en áreas diversas, campos de investigación, formación de niños y profesionales, entre otras más.

Este conocimiento puede ser determinado mediante las técnicas que se emplean. Puede ser resumido y presentado de forma interesante y atractiva. Además es un conocimiento que puede ser planteado por medio de situaciones didácticas de la mano de principios constructivistas del aprendizaje por medio de interactuar socialmente y el trabajo en grupo del alumnado.

El estado actual de la educación estadística ha progresado no solamente gracias a los profesores de matemática y a los matemáticos mismos que se empeñan en enseñar el saber sabio, sino también a la IASE (Sociedad Internacional de Educación Estadística), y por medio de la cual, la estadística comienza a ser una disciplina con identidad propia.

Como la epistemología es un departamento de la filosofía, la enseñanza de la estadística y sus conceptos -no todos-, poseen una dificultad de tipo filosófica. Esta última, puede estar relacionada con la interpretación de esos conceptos y la aplicación práctica que se le da a tales conceptos. Por lo que el docente debe estar preparado para la diversidad de significados que se le pudiera adjudicar a algún concepto. Por ejemplo: Probabilidad o aleatoriedad.

Las dificultades epistemológicas son dificultades en el alumno -sin dudar que el profesor pudiera tenerlas, aunque no es lo ideal dado que es el profesor-, por eso el docente debe estar preparado para poder enseñar y esclarecer "siempre" con el fin de ayudar y encaminar el proceso de construcción del conocimiento en el alumno; esto sin ocasionar una heurística innecesaria que conlleve al sesgo de las conclusiones obtenidas por el estudiante.

Imagen 16. Participación de Edwin respecto a la preparación del profesor

Fuente. Foro de Edwin

Consecuente con la dificultad que manifiesta anteriormente, el siguiente comentario (Imagen 17) destaca la transnumeración como las diversas representaciones que se puedan crear de un objeto matemático en búsqueda de significado.

Foro Foro 7. Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico, Audy (pág 173-191) : Comentario
 Libro de Audy Salcedo


EDWIN ARMANDO QUESADA SOLANO on 10/03/18 17:37

1. Comentario

La transnumeración como fundamento
para el pensamiento estadístico

Un buen profesor, es aquel que no solo posee conocimiento, es como un "transformador" que toma el conocimiento en bruto y lo pone a disposición del estudiante para que este pueda entender. Ese fenómeno de la conciencia que llamamos conocimiento nunca viene sin la previa actividad del razonamiento. Hay debates sobre si se conoce al comprender o si se puede conocer y luego comprender. No obstante, el pensamiento estadístico implica un razonamiento que conlleva a una comprensión. Cuando esta última surge del proceso dinámico de cambio de representaciones en diversos registros tenemos una transnumeración. En palabras de algunos autores:

La transnumeración responde a que a veces en la fase de análisis y organización de datos, una representación puede develar algo nuevo que previamente estaba oculto, entregando más comprensión del problema (Estrella y Olfo, 2015).

Es por esto que, el profesor debe hacer uso de situaciones reales a la hora de presentar información para una labor estadística, con el fin de recrear escenarios que produzcan representaciones que a su vez deservocan en la obtención del significado de los datos. Gracias a estudios recientes (Kanhemann 2012) sabemos que existe una difícil relación entre nuestra mente y la estadística. Por lo que trabajar con datos y no sujetarlos a nuestras concepciones *a priori* es una tarea difícil, por no decir, imposible. Siempre será verdad que hacer que lo difícil parezca difícil cualquiera lo logra, pero hacer que lo difícil parezca sencillo es una meta que muy pocos alcanzan. La transnumeración puede brindar al profesor una herramienta para alcanzar esta meta en la enseñanza del tema estadístico.

Imagen 17. Participación de Edwin acerca de la transnumeración
Fuente. Foro de Edwin

En el siguiente comentario hace observaciones minuciosas a la propuesta didáctica presentada para los niveles de quinto y sexto de primaria de los programas del MEP en Costa Rica (Imagen 18).

Foro Foro 11. Programas MEP 5-6: Comentario


EDWIN ARMANDO QUESADA SOLANO on 08/04/18 13:52

1. Comentario

Considero que la propuesta, en su introducción y resumen, logró llamar mi atención además considero que logró introducirme para saber de qué se iba a tratar. Posee muy buenas ideas y considero que puede ser muy interesante para los niños las actividades que los compañeros proponen.

No obstante, me gustaría hacer unas cuantas observaciones, a manera de crítica constructiva, respecto a la actividad planteada para 5to año. Estas son:

1. La actividad no es clara, considero que si la explican textualmente como lo dice el documento, los niños no van a entender. Esto por lo siguiente: *El rey o reina de Chocolandia realizará un censo, para repartir 28 monedas (de chocolate) a cada población, a los nobles, los religiosos, los de clase media y a los campesinos*. Pero después se dice: *"A los nobles les entregará 14 monedas, a los del religiosos 7, a los de clase media 5 y a los campesinos 2"*. Honestamente no entendí. Pero me gustaría entender porque considero que es una muy buena idea tomar ejemplos del feudalismo de la edad media.
2. Pero aún así no estoy seguro de si los niños puedan comprender el asunto que se quiere dar a entender de fondo. Esto porque los conceptos de noble, clero, clase media y campesino, en el contexto de la edad media, pueda entorpecer el entendimiento de la actividad.
3. Por otro lado, qué tan viable y saludable -hablo en sentido profesional y legal- pueda ser darle alimentos a los alumnos menores de edad. Lo digo porque no sabemos en qué momento pueda ocurrir un accidente. Esto sí que no es determinista. Así que, ¿debe un profesor (a) darle alimentos a un estudiante?

Por otro lado me llamó la atención cierta cuestión que debe tomarse en cuenta y que quizá es personal y en la que me pueda estar equivocando, pero al decir que:

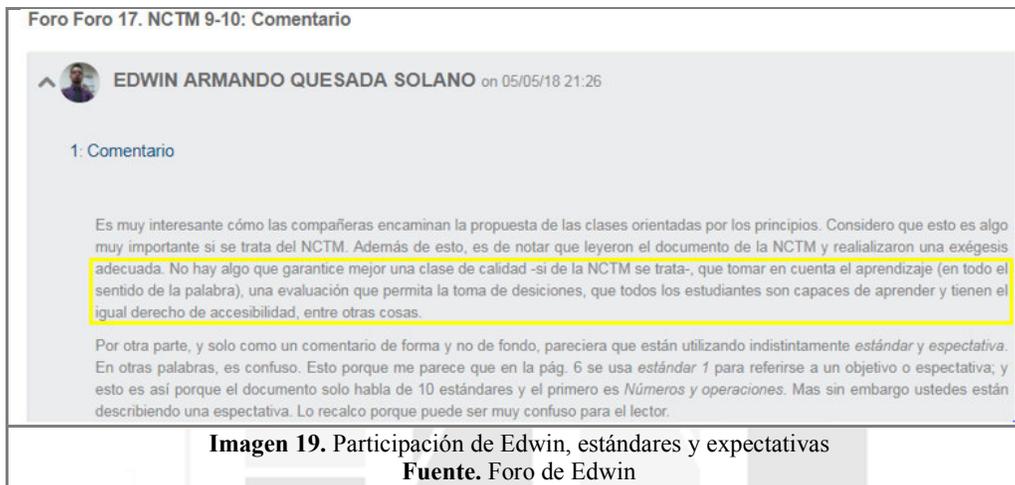
"Después de la representación se puede comentar un poco sobre la injusticia a las preferencias de la realeza a ciertos grupos de la población y de igual manera la que se presentaba entre ellos. Luego de esto, la importancia de llevar un control de cómo se reparte el dinero porque puede ser sinónimo de bancarrota para algunas sociedades si no se lleva un control ya que era imposible que todos los estudiantes tuvieran una moneda en este caso."

¿No se estaría yendo muy lejos con respecto a los ejes disciplinares tal como lo son las *actitudes y creencias positivas* que el plan de matemáticas contempla? Quizá no se capte tanto la atención en la importancia de identificar los conceptos de población y muestra. Sino el concepto de como ser un buen gobernante. De esta manera se debe recalcar más la importancia del muestreo en el análisis de datos o quizá realizar preguntas más profundizadoras tal como por ejemplo: ¿qué estrategias podemos utilizar para saber si la información de los representantes es cierta? ¿qué estrategias podemos usar para que la reina o el rey reparta las monedas por ciudadano de manera que sea quitativo y que no haya problemas (sesgos) en los datos?

Por lo demás considero que el trabajo de los compañeros es excelente y que me ayudó a replantear si lo que muchas veces podemos planear para los muchachos sea beneficioso y se puedan lograr los cometidos y objetivos de enseñanza-aprendizaje.

Imagen 18. Participación de Edwin sobre una propuesta didáctica
Fuente. Foro de Edwin

Edwin en su último foro, trata el tema de ser congruentes en la evaluación, pues si se promueve el desarrollo de proyectos en las clases de estadística, de manera que la educación sea inclusiva, los criterios de evaluación deben reflejar lo mismo. Al final hace una acotación a los expositores con el propósito de diferenciar entre estándar y expectativa, tal y como lo hace la NCTM (Imagen 19).



CONCLUSIONES

Una vez desarrollado el estudio se encontró que tres de los participantes subieron del primer nivel al segundo, según PISA, para el cuestionario posterior. Y tres de los que estaban en el segundo nivel, alcanzaron el tercer nivel. En promedio, los ocho que alcanzan el nivel dos en el cuestionario posterior, tienen mejor puntaje que los ocho que estaban en el segundo nivel en el cuestionario diagnóstico. Aun así, y aunque todos los participantes superan en el cuestionario posterior la calificación obtenida en el diagnóstico, preocupa que estos profesores en formación muestran deficiencias en temas de variabilidad, medidas de tendencia central, probabilidad condicional e independencia de eventos; habilidades fundamentales pretendidas en los programas de formación primaria y secundaria del MEP.

Los principales sesgos y heurísticas presentadas por los participantes fueron: el sesgo de equiprobabilidad, enfoque de resultados aislado, sesgo de independencia, falacia de la condicional transpuesta y falacia del eje de tiempo. Los distintos análisis que se hicieron a lo largo del curso, a través de artículos de investigación, foros, exposiciones, videos, entre otros, sobre la manifestación de estas problemáticas, no fueron suficientes puesto que, aún en el cuestionario posterior, se siguen evidenciando conocimientos endeble en controversias estocásticas. Lo que hace dudar, nuevamente, si enseñar los errores que otros comenten, sea la mejor forma de atacar nuestros propios obstáculos.

Finalmente, los profesores participantes en la investigación sólo llevarán un curso más en su plan de formación correspondiente a variables continuas y estadística inferencial, evidentemente insuficiente para superar las deficiencias que muestran en probabilidad y estadística al tener arraigadas las heurísticas y sesgos que se presentaron en la investigación.

REFERENCIAS

- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Barraza, A. (2007). Apuntes sobre metodología de la investigación. ¿Confiable? *Investigación Educativa Duranguense*, (6), 6-10. Recuperado de <http://www.upd.edu.mx/librospub/revistas/invedu06.pdf>
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8*, 2985-2994. Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.
- Cuevas, J. H., & Ramírez, G. (2018). Desempeño en Estocástica entre profesores de educación secundaria: un estudio exploratorio en dos regiones de Costa Rica y México. *Educación Matemática*, 30(1), 93-132.
- Díaz, C. (2005). Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *Suma*, 48, 45-48.
- Kahneman, D., Slovic, P., & Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.
- Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60-70.
- Ministerio de Educación Pública [MEP]. (2012). Programas de estudio en matemáticas. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada. San José, Costa Rica.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2015). *De los principios a la acción para garantizar el éxito matemático para todos*. México: Editorial 3D.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Thales, España.
- Salcedo, A. (2017). Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del siglo XXI. Universidad Central de Venezuela.
- Serrano, L. (Ed.). (2010). Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica. Málaga: Universidad de Granada. Recuperado de <http://www.ugr.es/batanero/pages/ARTICULOS/libroluis.pdf>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

ANEXOS

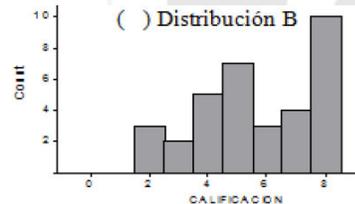
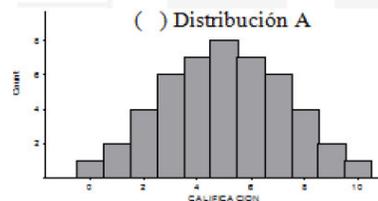
Cuestionario diagnóstico

INSTRUCCIONES GENERALES

El cuestionario que usted tiene en sus manos tiene el propósito de obtener información sobre su grado de dominio en solución de problemas en las áreas de probabilidad y estadística. La información recabada servirá para generar propuestas de apoyo a lo largo del curso.

I Parte. Selección Única. Marque con una equis (X) la opción que corresponde a la respuesta correcta. Debe marcar sólo una opción por pregunta

1. ¿Cuál de las siguientes distribuciones tiene más variabilidad?



- En la distribución A
 En la distribución B
 Ambas tienen igual variabilidad
 No se puede determinar

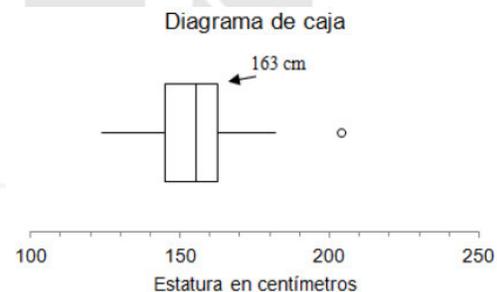
2. María lanza 10 monedas no cargadas al mismo tiempo, ¿Cuántas coronas crees que obtendrá María?

- Más de 5
 Exactamente 5
 Cualquier valor entre 0 y 10
 Alrededor de 5

3. Se desea realizar un análisis sobre las diferencias entre experimentos aleatorios y determinista (no aleatorios). ¿Cuál de los siguientes experimentos es un ejemplo de una situación determinista?

- Sacar una bola negra de una caja que contiene cinco bolas negras
 En el próximo año lloverá menos en el mes de agosto que en el presente año
 Lugar exacto donde caerá una piedra al lanzarla hacia arriba
 Identificar la temperatura exacta a las 9:21 am en la ciudad de New York

4. Un estudio referente a estaturas en jóvenes arrojó la siguiente representación gráfica.



El valor 163 cm indica que:

- El promedio de las estaturas es de 163 cm
 El 75% de las estaturas es de 163 cm o menos
 El 50% de las estaturas es de 163 cm
 El 75% de las estaturas es de 163 cm o más

5. Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad en la que hay pocos casos de cáncer. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y viceversa. ¿Qué te parece que sea más probable?

- Que una persona tenga cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico

- (x) Que un test de diagnóstico resulte positivo si la persona tiene cáncer
 () Los dos sucesos tienen la misma probabilidad
 () No se puede determinar

6. En un pequeño barrio hay un total de 50 casas. El comité de bienestar estudiantil de este barrio ha decidido determinar el número promedio de menores que hay por casa en este barrio. Los encargados del comité dividieron el total de infantes entre 50 y el promedio de menores que obtuvieron fue de 2,2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones considera que es siempre verdadera?

- () La mitad de las casas tienen más de dos menores
 (x) Existen un total de 110 menores en el barrio
 () Existen 2,2 menores en el pueblo por cada casa
 () El número más común de niños en una casa es dos

7. En el siguiente cuadro se muestran los años de experiencia que tienen 196 docentes de educación primaria que fueron encuestados en el

Años de experiencia de docentes de primaria en el 2009

Años de experiencia	Núm docentes	% docentes
De 1 a menos 5	28	14,286
De 5 a menos 10	31	15,816
De 10 a menos de 15	37	18,878
De 15 a menos 20	40	20,408
De 20 a menos 25	48	24,49
De 25 a menos 30	12	6,122
Total	196	100

2009.

Con base en los datos del cuadro anterior, analice las siguientes proposiciones:

- I. La mayoría de los docentes de primaria encuestados tiene más de 20 y menos de 25 años de experiencia en labores docentes.
 II. El 39,286% de los docentes tienen 10 años o más, pero menos de 20 de laborar en educación primaria.
 III. El valor de la mediana en relación con la experiencia de los docentes se encuentra entre 15 y menos de 20 años.

De las proposiciones anteriores, son verdaderas:
 () Solamente la I y la II

- () Solamente la I y la III
 () Todas
 (x) Solamente la II y la III

8. El ingreso promedio mensual de los empleados de una institución que tiene 1350 empleados es \$1600 y la mediana de los ingresos es \$1000. Analice las siguientes afirmaciones:

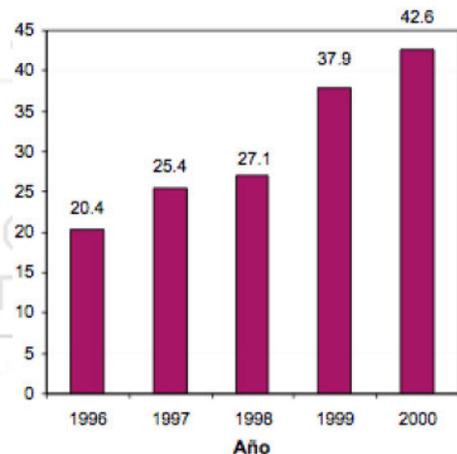
- I. El monto total que paga la institución en salarios al mes es aproximadamente \$ 1 350 000
 II. La mediana es más representativa de la distribución de los salarios que el promedio.
 III. En esta institución hay empleados que tienen salarios muy altos con respecto al total de los trabajadores.

De las afirmaciones anteriores son verdaderas:

- (x) Solamente la II y la III
 () Solamente la I y la III
 () Todas
 () Solamente la II

9. Con base en los siguientes gráficos, ¿cuál fue el valor del jugo de fruta que exportó Zedlandia

Total de exportaciones anuales de Zedlandia en millones de zeds, 1996-2000



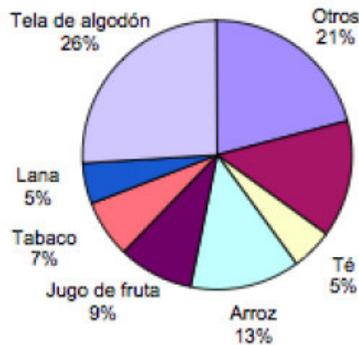
en 2000?

- 1,8 millones de zeds aproximadamente
- 2,3 millones de zeds aproximadamente
- 3,4 millones de zeds aproximadamente
- 3,8 millones de zeds aproximadamente

10. Se han considerado ocho personas para el puesto de Director Ejecutivo de una compañía. Seis de los candidatos tienen más de 60 años de edad. Tres son mujeres y de ellas dos tienen más de 60 años de edad. Si se selecciona un candidato aleatoriamente y resulta ser hombre, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 60 años de edad?

- $\frac{3}{5}$
- $\frac{5}{11}$

Distribución de las exportaciones de Zedlandia en 2000



- $\frac{4}{5}$
- $\frac{5}{4}$

11. Se tienen 10 bolas numeradas del 1 al 10 en una caja, que se distinguen unas de otras únicamente por su numeración. Una de las bolas se extrae en forma aleatoria y se devuelve a la caja. Se definen los dos eventos A y B:

Evento A: la bola extraída tiene un número par.

Evento B: la bola extraída tiene un número mayor o igual que 7.

De acuerdo con la información anterior, considere las siguientes proposiciones:

I. A y B son eventos mutuamente excluyentes.

II. El complemento de B; con respecto al espacio muestral corresponde a $B^c = \{1,3,5\}$

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- Ambas
- Ninguna
- Solo la I
- Solo la II

12. La opción que mejor caracteriza respectivamente la variable sexo en términos del tipo de variable, medida de tendencia central y gráfica asociada es:

- Cualitativa, Media Aritmética, Circular
- Cuantitativa, Media Aritmética, Barras
- Cuantitativa, Mediana, Polígono de Frecuencias
- Cualitativa, Moda, Circular

13. La opción que mejor caracteriza respectivamente la variable número de habitaciones en términos del tipo de variable, medida de tendencia central y gráfica asociada es:

- Cuantitativa Discreta, Mediana, Histograma
- Cuantitativa Continua, Media Aritmética, Diagrama de cajas
- Cuantitativa Discreta, Media Aritmética, Barras
- Cuantitativa Continua, Moda, Histograma

14. La opción que mejor caracteriza respectivamente la variable peso en kilogramos en términos del tipo de variable, medida de tendencia central y gráfica asociada es:

- Cuantitativa Continua, Moda, Circular
- Cuantitativa Continua, Mediana, Histograma
- Cuantitativa Discreta, Media Aritmética, Polígono de Frecuencia
- Cualitativa, Moda, Diagrama de Caja

15. Se lanza una moneda legal 10 veces, ¿cuál de las siguientes secuencias es más probable? C: corona, E: escudo

- CECECECECE

- CCCCCCEEE
 CCEECCEEE
 Todas son igualmente probables.

16. ¿Cuál de los siguientes sucesos es más probable?

- Que una niña tenga los ojos azules si su madre tiene los ojos azules
 Que una madre tenga los ojos azules si su hija tiene los ojos azules
 Los dos sucesos son igual de probables
 No se puede determinar

17. La siguiente tabla muestra información relacionada con las calificaciones por asignatura de los estudiantes de una escuela:

Asignatura	Media aritmética	Desviación estándar
Matemática	65	10
Español	80	5
Estudios Sociales	75	11
Ciencias	78	11

Considere las siguientes proposiciones:

- I.** En Matemática el coeficiente de variación es aproximadamente 15.38.
II. Las calificaciones en Estudios Sociales, de todos los estudiantes de esa escuela, presentaron menor variabilidad relativa que sus calificaciones en Ciencias.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- Ambas
 Ninguna
 Solo la I
 Solo la II

18. Con base en los datos de la tabla anterior, y sabiendo que:

José, un estudiante de esa escuela, obtuvo las siguientes calificaciones:

70 en Matemáticas, 81 en Español, 80 en Estudios Sociales y 82 en Ciencias.

Sofía, una estudiante de esa escuela, obtuvo las siguientes calificaciones:

95 en Matemáticas, 65 en Español, 75 en Estudios Sociales y 85 en Ciencias.

Considere las siguientes proposiciones:

I. En Estudios Sociales la posición relativa de *Sofía* es 75.

II. Al considerar las calificaciones de *José* en las cuatro asignaturas, él obtuvo mejor posición relativa en Matemáticas.

De ellas, ¿cuál o cuáles son verdaderas?

- Ambas
 Ninguna
 Solo la I
 Solo la II

19. Laura jugó un juego, en el que hay que lanzar aleatoriamente 16 pelotas para que caigan dentro de una caja cuyo suelo está mallado como se muestra en las figuras. El juego termina hasta que entran las 16 pelotas. A continuación, se muestra 3 posibles formas de como quedaron las pelotas al terminar el juego.

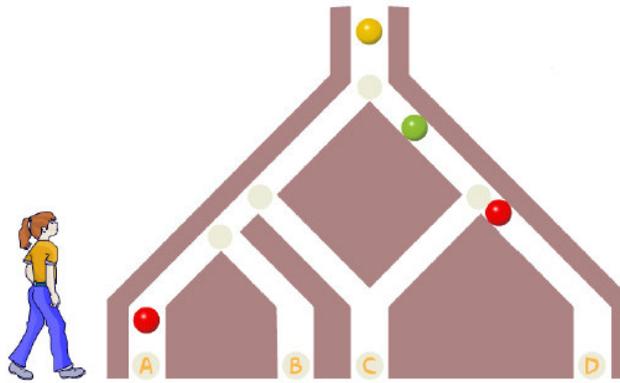


¿Cuál de los conjuntos crees que obtuvo Laura?

- Conjunto A
 Conjunto B
 Conjunto C
 Cualquiera de los tres

II Parte. Desarrollo. Los siguientes ítems corresponden a desarrollo, por tanto, debe presentar TODOS los pasos necesarios que le permitan obtener su respuesta.

20. Suponga que tenemos un circuito como el mostrado en la figura siguiente, en el cual se lanzan 100 bolitas por la parte superior:



De acuerdo con la información anterior, ¿en cuál de los depósitos (A, B, C, D) caerán más bolitas? ¿Por qué?

El depósito C, pues hay dos caminos que van hacia él, entre tanto los demás sólo lo llevan un camino.

O bien, la probabilidad de que la bola caiga en el depósito C es $\frac{1}{2}$; entre tanto en A y B es $\frac{1}{8}$ y D es $\frac{1}{4}$.

En caso de dar sólo el depósito y no justificar, será 0.5.

21. Un juego de tiro al blanco consiste en dispararle a una sandía (que está lo suficientemente cerca como para acertar el tiro) con una pistola que dispara bolas de goma con pintura dentro. Para ello hay seis jugadores. El arma tiene un cargador giratorio para las balas y espacio para contener seis balas, pero sólo se va a cargar con una bala. Cada jugador va a girar el cargador antes de disparar en su turno sin conocer la posición de la bala; gana el jugador que logre dispararle a la sandía primero. ¿Considera que los seis participantes tienen igual posibilidad de dispararle exitosamente a la sandía?

(x) Sí () No

¿Por qué?

Pues cada uno tiene $\frac{1}{6}$ de posibilidades de pegarle a la sandía y se gira en cada turno.

En caso de decir que sí, pero no justificar, será 0.5 puntos.

22. Se extra una carta al azar de una baraja americana: Sea A el evento "se extrae un trébol" y B el evento "se extrae una reina" ¿Los eventos A y B son independientes?

A y B son independientes si $P(A|B) = P(A)$ y además $P(B|A) = P(B)$

$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ y la $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

$P(A|B) = \frac{1}{4} = P(A)$, pues sólo hay un trébol dentro de las cuatro reinas

Otra forma es $P(B|A) = \frac{1}{13} = P(B)$, pues sólo una reina en los trece tréboles.

Otra forma $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$ y $P(A) \cdot P(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{52}$. Así que A y B son independientes.

En caso de decir que sí, pero no justifican, será 0.5.

23. Defina de manera intuitiva la probabilidad condicional.

La probabilidad condicional $P(A|B)$ de un suceso A dado otro suceso B es la probabilidad de que ocurra A sabiendo que B se ha verificado. Formalmente

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ siempre que } P(B) > 0$$

Se dará 0.5 pts si son imprecisas, por ejemplo "en la probabilidad condicional, para que se dé un suceso, se tiene que dar otro". Matemáticamente se puede definir la probabilidad condicional, independientemente de que el suceso ocurra o no.

"En la probabilidad condicional intervienen dos sucesos", pues también en el conjunto intervienen dos sucesos.

24. Una persona lanza un dado legal y anota si obtiene un número par o impar. Los resultados al lanzarlo 15 veces son: *par, impar, impar, par, par, impar, par, par, par, par, impar, impar, par, par* y *par*.

Lanza el dado de nuevo, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número par en este nuevo lanzamiento?

Sigue siendo $\frac{1}{2}$, pues los eventos son independientes.

25. En una población se ha realizado una entrevista a un grupo de hombres obteniendo los siguientes resultados:

	Menos de 55 años	Más de 55 años	Total
Ha sufrido un ataque al corazón	29	75	104
No ha sufrido ataque	401	275	676
Total	430	350	780

Si elegimos al azar una de estas personas:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?

Eventos:

A : tener más de 55 años y B : haber sufrido un ataque al corazón

$$P(B) = \frac{104}{780} = 0.133$$

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años y además haya tenido un ataque al corazón?

$$P(A \cap B) = \frac{75}{780} \approx 0.0962$$

(c) Sabiendo que la persona escogida tiene más de 55 años, ¿cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?

$$P(B|A) = \frac{75}{350} = 0.21429$$

(d) Sabiendo que la persona escogida ha tenido un ataque al corazón, ¿cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años?

$$P(A|B) = \frac{75}{104} = 0.72115$$