FORMAS DE RAZONAMIENTO COVARIACIONAL INFORMAL ALREDEDOR DE LA RECTA DE MEJOR AJUSTE EN UN AMBIENTE COMPUTACIONAL EN ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO

Ana, García Amado
anna.garciamado@gmail.com
Universidad Industrial de Santander (Colombia)
Gabriel, Yáñez Canal
gyanezc80@gmail.com
Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Asunto: Desarrollo del pensamiento aleatorio
Temática: Estadística descriptiva e inferencial

RESUMEN

En investigaciones acerca del razonamiento de los estudiantes surge la necesidad de explorar y aprovechar sus conocimientos previos, ya sean formales o informales, así como sus creencias, experiencias, intuiciones e inclusive errores, para diseñar el camino que, teniéndolos en cuenta, los conduzca hacia la comprensión de conceptos matemáticos. Presentamos resultados parciales de una investigación que tuvo como objetivo analizar las formas de razonamiento covariacional informal de estudiantes de 8° grado, alrededor de la recta de mejor ajuste. Como parte de los resultados se sugiere una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en actividades computacionales y que va desde un análisis univariado con la media, hasta un análisis bivariado con la ubicación de la recta de mejor ajuste.

PALABRAS CLAVE

Razonamiento covariacional informal, Recta de mejor ajuste, Trayectoria hipotética de aprendizaje.

INTRODUCCIÓN

La necesidad por buscar explicaciones de lo que pasa a nuestro alrededor nos lleva a relacionar unos eventos con otros. Sin embargo algunas explicaciones podrían ser equívocas debido a interpretaciones incorrectas o ideas falsas respecto a la asociación estadística en general, inclusive entre aquellos que están muy familiarizados con el tema (Borovcnik, 2012).

Esta investigación tuvo como tema de interés el Razonamiento Covariacional Informal [RCI], en particular sobre la recta de mejor ajuste, ya que "explicar, controlar y predecir los sucesos que se presentan en nuestro día a día, depende de habilidades para detectar covariaciones" (Alloy y Tabachnik, 1984), lo que incluye encontrar tendencias o patrones, así como el modelo de ese patrón, por ejemplo, la recta de mejor ajuste. Las investigaciones (por ejemplo, Casey, 2015) muestran que esa recta no es tan intuitiva para los estudiantes pero sí podría serlo el valor de la media como un dato representativo o un punto de equilibrio o central, en el caso univariado.

Por otra parte, recientemente existe una tendencia en la investigación estadística que se caracteriza por el uso de programas computacionales como una respuesta a la necesidad de generar diversas muestras u obtener diferentes tipos de representación que permitan a los estudiantes una mejor comprensión de los fenómenos estocásticos.

MARCO DE REFERENCIA

Conocer cómo los estudiantes razonan y piensan estadísticamente ha sido el foco de muchos investigadores en Educación Estadística; lo anterior, argumentándose en que la enseñanza tradicional de la estadística se reduce a procedimientos y cálculos en donde los estudiantes no desarrollan los procesos de pensar y razonar estadísticamente (Ben-Zvi y Garfield, 2004).

El razonamiento estadístico puede definirse como la forma en que las personas razonan con ideas estadísticas y le dan sentido a la información estadística. Lo que implica realizar interpretaciones basadas en conjuntos de datos, representaciones de datos o resúmenes estadísticos. Implica también la conexión de un concepto con otro (por ejemplo el centro y la variabilidad), o combinar ideas sobre datos y el azar. Razonar estadísticamente significa entender y ser capaz de explicar los procesos estadísticos y ser capaz de interpretar completamente los resultados estadísticos (Ben-Zvi y Garfield, 2004, p. 7).

Por otra parte, el Razonamiento Informal [RI] se entiende como la forma en que el estudiante usa su Conocimiento Informal [CI], el cual hace referencia, por una parte, a ese conocimiento cotidiano y a las experiencias que se adquieren fuera del salón de clases, y, por otra, al conocimiento que resulta luego de una instrucción formal previa, en otras palabras, "es el punto de partida para el desarrollo del conocimiento formal" (Zieffler, Garfield, delMas & Reading, 2008, p.3). Como nuestro interés es la asociación estadística entre dos variables cuantitativas, resulta necesario definir lo que aquí se entiende por Razonamiento Covariacional [RC] y Razonamiento Covariacional Informal [RCI].

Después de examinar las definiciones que se le han dado al Razonamiento Covariacional desde los diferentes campos en que se ha estudiado, Zieffler (2006, p.6) concluye que "el razonamiento covariacional se refiere a la forma en que la gente piensa acerca de, o razona acerca de la relación entre dos o más variables", por ejemplo a partir de la lectura de un diagrama de dispersión, o en la interpretación de las correlaciones y en otras tareas que conlleven al análisis de dos variables así como la interpretación de los resultados arrojados en ese análisis.

Finalmente, en un intento por aunar las definiciones que Zieffler et al. (2008) hacen sobre CI y RI con la definición de RC, adoptamos la definición de RCI como la forma en que la gente razona y argumenta acerca de la relación entre dos o más variables haciendo uso solo de su RI y CI. Claramente, como parte del RCI está el razonar sobre un diagrama de dispersión: la existencia o no de una relación entre dos variables, la predicción del valor de la variable respuesta para un valor de la variable explicativa, así como la fuerza y la forma con que se relacionan, por ejemplo, la recta de mejor ajuste.

DESARROLLO DEL TEMA

Aspectos metodológicos

La población sobre la cual se realizó el estudio fueron estudiantes de bachillerato, específicamente de 8° grado; la selección de este grado se debió a que, para este nivel, los estudiantes no han recibido ningún tipo de enseñanza formal en los temas de covariación, correlación y regresión, inclusive, matemáticamente hablando, sobre rectas.

El marco metodológico para esta investigación se basa en uno de los elementos del ciclo de enseñanza de las matemáticas que propone Simon (1995), la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje [THA], la cual se refiere al "camino" que podría dar paso al aprendizaje, describiendo cómo los estudiantes entienden un concepto en particular y cómo este debe progresar, siendo hipotética porque se desconoce la trayectoria real de aprendizaje. Tres elementos componen la THA: *i)* La consideración del objetivo de aprendizaje, el cual direcciona la THA; *ii)* Las actividades de aprendizaje y; *iii)* El aprendizaje y el pensamiento en el que los estudiantes pueden participar (hipótesis del proceso de aprendizaje).

Inicialmente se aplicaron dos pruebas con el fin de diagnosticar y caracterizar el RCI de los estudiantes para, junto con la revisión bibliográfica, construir un plan de actividades y plantear hipótesis alrededor de la forma como los estudiantes razonan de manera informal sobre variables que están conjuntamente relacionadas e indagar cómo este razonamiento se desarrollará a lo largo de la implementación de las actividades.

El diseño y posterior ajuste (para cada sesión) de la THA, basada en actividades computacionales, permitió un análisis retrospectivo que finalmente nos llevó a describir las formas de RCI de los estudiantes así como su desarrollo desde las pruebas diagnósticas hasta el final de la implementación de la THA.

En cuanto a la recolección de datos, esta se hizo de forma escrita, por medio de grabaciones de vídeo y de audio y, grabaciones de pantalla.

Desarrollo de la propuesta

Con el diseño y aplicación de las dos pruebas diagnósticas iniciales pretendíamos evaluar: *i)* si los estudiantes establecían o no una relación entre las dos variables; *ii)* conocer sus concepciones sobre la variabilidad; *iii)* los criterios que utilizan para predecir el valor de la variable respuesta, dado un valor para la variable explicativa y; *iv)* conocer los criterios con que trazan la recta que mejor se ajusta a los datos y con qué precisión lo hacen. En pocas palabras, su nivel de razonamiento covariacional informal actual.

El análisis de las pruebas nos permitió ratificar algunas estrategias y concepciones ya reportadas en investigaciones anteriores y algunas novedades que nos orientaron para establecer más hipótesis de aprendizaje y, consecuentemente, diseñar el plan para la creación de actividades computacionales para el aprendizaje de la recta de mejor ajuste:

- Construir actividades sin contexto, o por lo menos no comprensible al estudiante, podría evitar que el estudiante tenga una concepción causal (Estepa y Batanero, 1995) *e.g. "Porque cuando hace todo más rápido las pulsaciones se agitan más y va a tener más pulsaciones en menos tiempo"* o *"Porque entre más rápido el pulso cardíaco se acelera"*. En su lugar, se obligaría a tener un razonamiento "puro" en tareas de asociación y predicción.
- La mayoría de los estudiantes, sí reconocen de alguna manera, al observar un diagrama de dispersión, la asociación entre dos variables y cómo varían conjuntamente, mientras que no reconocen fácilmente la no existencia de una asociación, es decir, buscan relacionar de alguna manera las dos variables.
- La mayoría de los estudiantes sí establecen un nivel de asociación en cuanto al grado de dispersión o proximidad de los puntos, además también lo hacen en cuanto a la forma; *e.g.* "*Yo creo que el mayor es el que los punticos están más juntos y el menor pues el que tiene los puntos dispersos por todo el gráfico".*
- *La* estrategia de los "vecinos cercanos", en tareas de predicción, manifiesta una concepción local (Estepa y Batanero, 1995) *e.g.* "*Porque en la gráfica se ve que entre los que miden 1.52 a 1.58 tienen un peso entre 44 a 48 kg el mayor peso entre estudiantes de 8"* o *"Porque el estudiante que tiene de estatura 158 tiene 48 de peso en cambio el estudiante que tiene de estatura 144 pesa entre los 40 a*

los 41 o sea entre menos estatura menor peso y entre más estatura mayor peso". La extensión de esta estrategia conduce al ajuste de una recta poligonal que bien podría "enderezarse" y convertirse en la recta de mejor ajuste global.

Convenimos en que considerar la recta como un modelo para la asociación lineal entre dos variables, debería ser el resultado de un razonamiento previo en tareas que involucren:

i. Variabilidad en un conjunto de datos.
ii. Predicción de un nuevo valor en un conjunto de datos.
iii. Análisis univariado alrededor de la media.
iv. El reconocimiento de la existencia o no de una asociación entre dos variables cuantitativas.
v. La predicción local del valor de la variable respuesta.
vi. La predicción global que conlleve a la forma que "resume" la asociación entre las dos variables, en este caso, la recta.
vii. La exploración de la recta que mejor se ajusta a la nube de puntos.

Con base en lo anterior, la THA que se propone consta de dos fases (Imagen 1).

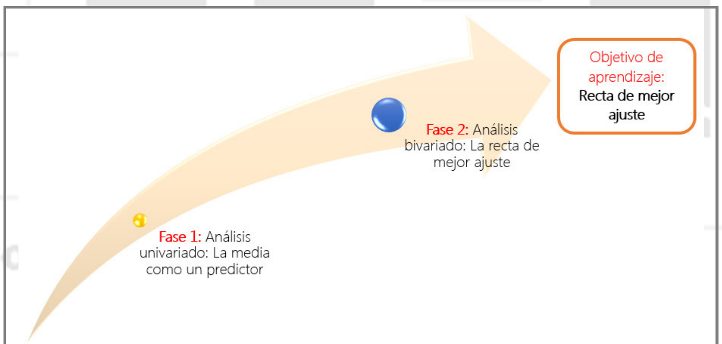

Imagen 1. THA para el concepto Recta informal de mejor ajuste
Fuente. Creación propia

En coherencia con lo que se propone en la Imagen 1, se diseñaron las actividades y el discurso para el desarrollo de las mismas, encaminadas hacia el objetivo de aprendizaje. A continuación se muestran algunas de las actividades desarrolladas y lo que se pretendía con dichas actividades.

Una pregunta natural que surge es ¿Por qué partir del análisis de un conjunto univariado con un enfoque hacia la media? En un problema bivariado, en donde se refleja gráficamente una tendencia lineal, una tarea interesante sería resumir ese conjunto de datos en una recta, la mejor ¿pero cómo encontrar esa recta y qué características o propiedades tiene que la hacen única?

La idea de encontrar un modelo que resuma un conjunto de datos, representados gráficamente, guarda una similitud con el análisis que se podría hacer en el caso univariado. Por ejemplo, desde el análisis univariado, se podrían ver aspectos como variabilidad y predicción de un nuevo valor en un conjunto de datos. Ahora, en el caso univariado, existe un valor, que no solo resulta ser un buen predictor sino que además se provee de propiedades y características que la hacen muy particular, estamos hablando de la media. De manera que nuestro objetivo, en primera instancia, fue caracterizar la media y sus propiedades de manera que nos permitieran hacer una extensión al caso bivariado cuando nos enfrentáramos a tareas de predicción con dos variables que estaban relacionadas. A continuación, la descripción de algunas de las actividades contenidas en la THA que se propone.

Una de las actividades diseñadas en GeoGebra, “El Machín Machón” (Imagen 2), tuvo como objetivo que los estudiantes vieran la media, más allá de un algoritmo matemático, como un punto de “equilibrio” o “balanceador” y que dieran cuenta de una de sus propiedades: “La suma de las desviaciones sobre la media es cero” o “la suma de las distancias a la derecha sobre la media, es igual a la suma de las distancias a la izquierda sobre la media”, es justo a partir de lo anterior que se llega a la expresión matemática.

Imagen 2. Actividad Machín Machón en GeoGebra. Distancias del pivote a dos niños
Fuente. Creación propia

En seguida, dado que en el caso bivaríado se tenían dos variables relacionadas, con otra actividad llamada “El profesor Gabo y la natación”, quisimos que los estudiantes exploraran la relación entre dos variables cuantitativas. Con ayuda de Fathom los estudiantes debían hacer un gráfico para cada una de las variables (Imagen 3) y observar la relación entre las dos variables cuando seleccionaban parte de los datos en el gráfico de Minutos y observar lo que pasaba en el de Pulsaciones por minuto.

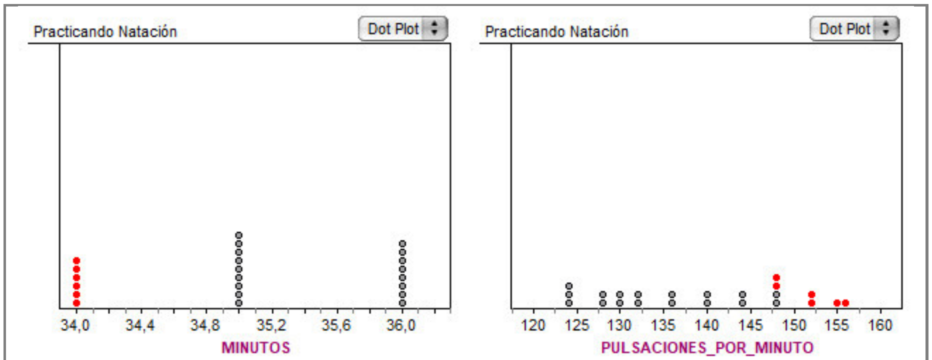

Imagen 3. Relación entre Minutos y Pulsaciones por minuto desde diagramas separados
Fuente. Creación propia

Es claro que el aprendizaje de cualquier concepto no es inmediato, requiere de actividades debidamente diseñadas y con intenciones claras. A veces se requiere del diseño de varias actividades previas para finalmente hablar del objeto final de aprendizaje, en este caso la recta de mejor ajuste. Claramente después de dar cuenta de la relación entre dos variables cuantitativas y cómo esa relación se reflejaba en un diagrama de dispersión, y antes de empezar a hablar de recta de mejor ajuste, se tuvo que pasar por otras actividades que implicaban predicción, en un principio predicción local y finalmente predecir de manera global, es decir, considerar a la recta como una solución.

Una vez los estudiantes asumían la recta como un representante de una nube de puntos, quisimos indagar sobre cómo ellos ubicaban esa recta. De manera que, dados unos diagramas de dispersión, establecían sus conjeturas que luego serían validadas en una última actividad llamada "Juego: Encontrando la mejor recta" (Imagen 4), que no era más que una extensión de lo que se hizo con la actividad "Machín Machón". Aquí, los estudiantes debían ubicar la recta con la estrategia que ya habían establecido anteriormente y seguidamente, verificar la ubicación de la recta. Para lo anterior, una vez ubicada la recta, en la parte inferior de la pantalla en "Ver" debían escribir "EK" en donde, con esta acción, se visualizaba una casilla llamada "¡Eureka!", seleccionaban la casilla y si la posición de la recta estaba bien, aparecía la palabra "¡Eureka!" (Imagen 4), de lo contrario debían mover la recta hasta encontrar la mejor posición. Esta actividad se torna válida en la medida en que los estudiantes sean capaces de describir las razones que identifican la recta correcta.

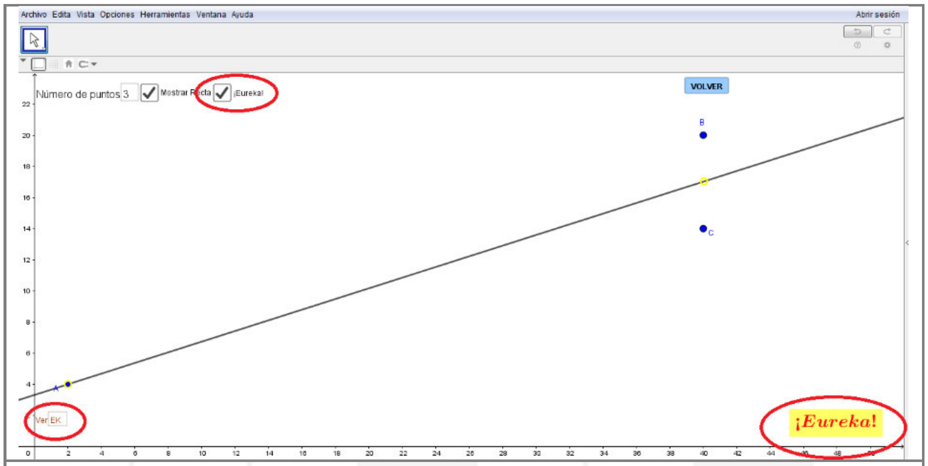

Imagen 4. Pantalla de GeoGebra. Actividad "Juego: Encontrando la mejor recta"
Fuente. Creación propia

Un propósito de la actividad "Juego: Encontrando la mejor recta" fue extender las ideas que se habían visto para el caso univariado al caso bivariado. Una de ellas era observar la suma de las diferencias de los puntos a la recta y el cuadrado de esa suma. Por lo que, en primera instancia, con ayuda de la simulación, los estudiantes pudieron darse cuenta de que las diferencias por encima de la recta eran positivas, por debajo negativas y de que, efectivamente, la suma de las diferencias de los puntos a la mejor recta era cero, como se hizo por ejemplo con el Machín Machón (Imagen 5).

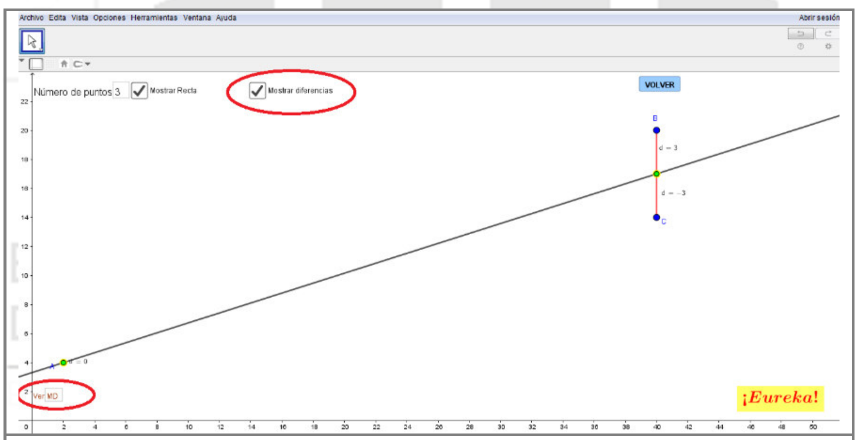

Imagen 5. Pantalla de GeoGebra. Diferencias de los puntos a la recta
Fuente. Creación propia

CONCLUSIONES

Se podría decir que todos los estudiantes, para el caso univariado, terminaron por asumir a la media como un buen candidato para hacer predicciones pero siempre de la mano de la variabilidad, es decir, siendo un valor bastante preciso pero, no necesariamente, exacto. Por otra parte, la mayoría de los estudiantes, a través de las actividades, caracterizaron la media como un punto de equilibrio o balanceador, también como un valor justo y como un valor muy particular, al presentar ciertas propiedades.

En cuanto al caso bivariado, la mayoría de los estudiantes reflejan una coordinación entre las dos variables al asociar expresiones como “al aumentar una variable aumenta la otra” con una “relación ascendente” y, de igual manera, “al aumentar una variable disminuye la otra” con una “relación descendente”. Así mismo, el nivel de asociación lo relacionan con la forma que siguen los puntos, siguiendo un “orden” o reflejando, de manera global, una línea recta. En este mismo aspecto, en la entrevista final, se evidenció un buen grado de aceptación en cuanto al grosor de la nube de puntos, es decir, si esta es más “flaca” el nivel de asociación es más fuerte. Respecto a predicción, a menos que se les sugiera trazar la recta, los estudiantes reflejan una concepción local al predecir los valores de los vecinos cercanos pero, a su vez, reflejan una visión global de los datos para que sus predicciones sean coherentes con el tipo de relación que tienen las variables.

En lo concerniente a la ubicación de la recta de mejor ajuste, al finalizar la trayectoria, la mayoría de los estudiantes le atribuyen a esta recta características como: se ubica entre los puntos, refleja la relación entre las dos variables y es la más cercana a los puntos. Aunque se cuestionó sobre qué entendían por “cercanía” o a qué se referían con esa expresión, sus respuestas fueron prácticamente nulas o evasivas, es decir, aunque, tanto en el caso univariado como en el caso bivariado, los estudiantes evidenciaron que las sumas de los cuadrados de las distancias a la media y a la recta, respectivamente, es mínima, ese hecho no les dio luz de que nos encontrábamos ante el valor y la recta más cercana a todos y cada uno de los datos. Por lo que bien vale la pena seguir investigando en este aspecto: ¿Qué comprenden o a qué le atribuyen los estudiantes el término “cercanía”? ¿Cómo miden esa cercanía?

Finalmente, un componente que siempre estuvo presente a lo largo de la THA fue la variabilidad. Lo anterior se evidenció cuando, dada la recta de mejor ajuste, se les pedía predecir. La mayoría de los estudiantes emitían sus predicciones muy cerca de la recta y los que ubicaban sus predicciones sobre la recta, de igual manera, adicionaban “o muy cerca de la recta”. La justificación fue la variabilidad, como si asumieran que sobre la recta sería el valor exacto pero que, debido a la variabilidad, no necesariamente tenía que ser así. Es decir, en el momento de predecir, la confrontación: cercanía vs variabilidad, aparecía como una manera de controlar la variabilidad como “no podemos ser tan exactos pero sí muy cercanos”.

REFERENCIAS

Alloy, L. B., & Tabachnik, N. (1984). Assessment of covariation by humans and animals: The joint influence of prior expectations and current situational information. *Psychological Review, 91*(1), 112-149.

Ben-Zvi, D., & Gardfiel, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. En D. Ben-Zvi, & J. Gardfiel (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 3-15). Dordrecht, The Netherlands: Kluber Academy Publishers.

Borovcnik, M. (2012). Correlation and Regression – Errors and Pitfalls. *Selçuk Journal of Special,* special issue, 51-68.

Casey, S. (2015). Examining Student Conceptions of Covariación: A Focus on the Line of Best Fit. *Journal of Statistics Education*, *23*(1), 1-33.

Estepa, A., & Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, *13*(2), 155-170.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Zieffler, A. S. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course*. Tesis doctoral. Universidad de Minnesota.

Zieffler, A. S., Garfield, J., delMas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *7*(2), 5-19.