JUEGOS CON DADOS: UNA EXPERIENCIA EN AULA DESDE LA EXPERIMENTACIÓN Y LA SIMULACIÓN

Michelle, Penagos Vargas
mapenagosv@unal.edu.co
Universidad Nacional de Colombia (Colombia)

Asunto: Desarrollo del pensamiento aleatorio
Temática: Probabilidad

RESUMEN

La enseñanza de la probabilidad en la escuela es importante dentro de la educación matemática. Investigaciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad han recalcado el uso de estrategias como la simulación, la experimentación y el juego, puesto que estas permiten que el proceso de enseñanza sea más ameno. Esta comunicación breve muestra tres actividades, desarrolladas con estudiantes de 9° grado las cuales giran en torno a un juego de dados, y que por medio de procesos experimentales y de simulación permiten el acercamiento al concepto de probabilidad desde el enfoque frecuentista y clásico.

PALABRAS CLAVE

Probabilidad, Experimentación, Simulación, Juego.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de la probabilidad en la escuela se ha convertido en un aspecto fundamental en la formación matemática de los estudiantes. En el marco de la Maestría de la Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional se diseñó como trabajo de grado una secuencia didáctica para la enseñanza de la probabilidad frecuentista y clásica en estudiantes de 9° grado, en la que se crearon seis actividades basadas en simulaciones y experimentaciones, incluyendo la utilización de juegos de azar. Esta comunicación corta está basada en dicho trabajo de grado (Penagos, 2017) —se hace una adaptación de este— y muestra el desarrollo de tres de tales actividades, las cuales se basaron en juegos de dados y procesos experimentales y de simulación que acercaron a los estudiantes al concepto de probabilidad desde los enfoques frecuentista y clásico.

MARCO DE REFERENCIA

Aspectos disciplinares

Para la construcción de este marco disciplinar se tienen en cuenta los aspectos teóricos expuestos por Blanco, Arunachalam, y Dharmaraja (2012). Las siguientes definiciones básicas de la teoría de la probabilidad se tuvieron en cuenta a la hora de formular el marco disciplinar.

Experimento Aleatorio. Un experimento aleatorio es un experimento en el que, conociendo todos los resultados posibles, no se puede determinar de antemano el resultado de cada ensayo.

Espacio muestral. El espacio muestral de un experimento aleatorio es un conjunto Ω que contiene todos los posibles resultados de dicho experimento. Cada elemento $\omega \in \Omega$ se le llama punto muestral.

σ-álgebra. Sea un conjunto $\Omega \neq \emptyset$. Una colección $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra si cumple:

i. $\Omega \in \mathfrak{F}$
ii. Si $A \in \mathfrak{F}$ entonces $A^C \in \mathfrak{F}$
iii. Si hay una sucesión numerable de elementos $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathfrak{F}$ entonces $\bigcup_{i=1} A_i \in \mathfrak{F}$.

Cada uno de los elementos de $\mathfrak{F}$ es conocido como evento.

Espacio medible: Sea un espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$ y $\mathfrak{F}$ una σ-álgebra sobre Ω. La dupla $(\Omega, \mathfrak{F})$ es llamada espacio medible.

Eventos mutuamente excluyentes: Sean dos eventos A y B. Estos son mutuamente excluyentes si $A \cap B = \emptyset$.

Espacio de probabilidad: Sea $(\Omega, \mathfrak{F})$ un espacio medible. Una funciónP, definida de $\mathfrak{F}$ a $\mathbb{R}$ es una medida de probabilidad si satisface:

i. $P(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathfrak{F}$.
ii. $P(\Omega) = 1$.
iii. Si $A_1, A_2, \ldots$ son eventos mutuamente excluyentes en $\mathfrak{F}$ entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1} A_i\right) = \sum_{i=1} P(A_i)$$

La tripla $(\sigma, \mathfrak{F}, P)$ es llamada espacio de probabilidad.

Frecuencia Relativa. Para cada evento A el número $fr(A) = \frac{n(A)}{n}$ se conoce como frecuencia relativa de *A*, donde $n(A)$ representa el número de veces que el evento A sucedió en las n repeticiones del experimento. En esta definición del número $fr(A)$, como función de n, se puede observar que cuando el experimento se repite bajo las mismas condiciones un número grande de veces, la frecuencia relativa se estabiliza en un valor especifico entre 0 y 1. Este valor $P(A)$ alrededor del cual se estabiliza $fr(A)_n$ describe la posibilidad de que ocurra el evento A.

Experimento Laplaciano. Un experimento laplaciano es un experimento con un número finito de resultados, cada uno de ellos con la misma probabilidad de ocurrencia.
Espacio de probabilidad Laplaciano. Un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P})$, con Ω finito, $\mathfrak{F} = \wp(\Omega)$ y $\mathrm{P}(\omega) = 1/|\Omega|$ para todo $\omega \in \Omega$ es un espacio de probabilidad laplaciano. En este espacio de probabilidad se cumple que, si $\mathrm{A} \subseteq \Omega$ entonces

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{\omega \in \mathrm{A}} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in \mathrm{A}} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|}$$

A partir de esta definición se puede observar que, para determinar la probabilidad de un evento generado por un experimento laplaciano, basta con conocer el cardinal del evento y del espacio muestral.

Aspectos histórico-epistemológicos

La teoría de la probabilidad tiene sus inicios con los juegos de azar. Ejemplo de esto es que, según registros hallados del tiempo del emperador romano Augustus (63 a.C.-14 d.C.), los juegos eran comunes. Se han encontrado culturas antiguas que llevaban registros escritos de resultados de juegos en los que se utilizaban dados; también se cree que algunas culturas utilizaban dados para cuestiones de azar. Esto demuestra que desde hace bastante tiempo se manejaba alguna noción de probabilidad (Blanco et al., 2012; Vega-Amaya, 2002).

En la Edad Media se retoma la noción de probabilidad que subyacía en los juegos de azar. Girolamo Cardano (1501-1576) y Galileo Galilei (1564-1642) escribieron sobre estudios realizados sobre juegos con dados, que constituye un inicio al estudio de la probabilidad desde el enfoque clásico (Vega-Amaya, 2002). Más adelante, Jacob Bernoulli (1654-1705) escribió el libro *Ars Conjectandi*. En él recoge el trabajo realizado por Christiaan Huygens (1629-1695) sobre los juegos de azar, adicionando comentarios, demostraciones y un estudio sobre combinatoria. Considera 24 problemas relacionados con juegos de azar y trabaja en aplicaciones de la teoría de probabilidad en problemas civiles, morales y económicos (Burton, 2006).

Pierre Laplace (1749-1827) hace una primera formalización de la teoría clásica de probabilidad. En su obra *Théorie Analytique des Probabilités* presenta la solución de casi todos los problemas relacionados con probabilidad, que habían surgido, al tiempo que sistematizaba y extendía los saberes obtenidos por matemáticos anteriores a él. La teoría de probabilidad es presentada en la segunda parte de su libro, que se divide en tres partes: la teoría como tal, los teoremas de límites y la estadística matemática (Burton, 2006). En el siglo XX, Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987) fue el matemático que más aportes hizo a la teoría de la probabilidad, al crear un fundamento axiomático de la misma haciendo uso de la teoría de la medida, en la obra Fundamentos de la Teoría de Probabilidades publicada en 1933 (Chaumont, Mazliak, & Yor, 2007).

Aspectos didácticos

La simulación

Una simulación es una reproducción artificial de un modelo teórico de una situación, que analiza su comportamiento y planea las consecuencias de cambios similares dentro de un contexto real. Según Biehler (1991), citado por Borovcnik y Peard (1996), la simulación tiene dos papeles dentro de la enseñanza de la probabilidad: uno es la simulación como método para resolver problemas, ya que permite saltar grandes cálculos, y el otro es como antecedente empírico para la probabilidad, ya que brinda una base operacional, carente en la probabilidad. Aun así, a pesar de las ventajas que brinda el uso de simulaciones, se debe tener en cuenta que, al implementar estas, no da una explicación del cómo y por qué la solución que brinda realmente resuelve el problema.

A pesar de que no hay investigaciones con resultados concluyentes, los puntos de vista intuitivos del aprendiz pueden dificultar el uso de simulaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje, por lo que se sugiere iniciar el estudio con simulaciones con material concreto, como urnas o ruletas, para después comparar los resultados con simulaciones de computador (Borovcnik & Peard, 1996). La utilización de simulaciones puede tener algunas desventajas; una de ellas es que no puede sustituir la forma en la que se piensa la solución de un problema, como tampoco puede dar explicación a intuiciones erradas. Lo que sí consiguen hacer las simulaciones es indicar en dónde puede estar el error de estas intuiciones erradas (Borovcnik & Peard, 1996). Considerando la simulación como un antecedente empírico para la probabilidad, Freudenthal (1991), citado por Borovcnik y Peard (1996), afirma que "las simulaciones usuales de la 'convergencia' empírica de las frecuencias relativas hacia la probabilidad desconocida se enfoca en una serie progresiva de frecuencias, mostrando como se estabiliza" (p. 263).

La experimentación

En los procesos de enseñanza de la probabilidad, a lo largo del tiempo, se han privilegiado estrategias basadas en el enfoque clásico de la probabilidad. Con el desarrollo del análisis de datos, la enseñanza de la probabilidad ha optado en actividades experimentales y empíricas, favoreciendo el enfoque frecuentista de la misma (Chaput, Girard, & Henry, 2015).

Nilsson (2014) afirma que la realización de experimentos en el proceso de enseñanza de la probabilidad sirve como contexto para explorar e ilustrar aspectos críticos de este proceso, usando los datos empíricos producidos por los estudiantes. Este mismo autor, citando a Cobb (1990) y a Shaughnessy (2003), recalca la importancia de la enseñanza de la probabilidad por medio de la recolección de datos, permitiendo la discusión en el aula sobre conceptos de probabilidad. Aun así, señala que la experimentación puede que no siempre motive lo suficiente a los estudiantes para que reflexionen sobre el uso de los datos que se recolectan o que no la vean como evidencia para hacer predicciones probabilísticas sobre algún evento.

Para llevar a cabo un experimento, en probabilidad, se examina un evento aleatorio de interés efectuando acciones específicas y observando los resultados, realizando intentos en repetidas ocasiones. Lee y Mojica (2007) dan los pasos que debería tener un experimento probabilístico para ser usado en el proceso de enseñanza de un concepto; estos pasos son: 1) Entender el contexto del problema a estudiar para identificar eventos de interés. 2) Identificar los posibles resultados para el evento aleatorio. 3) Seleccionar un objeto generador de resultados aleatorios apropiado. 4) Determinar en qué consiste un intento y una muestra. 5) Repetir un número de intentos para determinar una muestra, posiblemente repetir el muestreo. 6) Analizar resultados para computar la probabilidad empírica del evento aleatorio. 7) Usar probabilidades empíricas para tomar decisiones sobre el problema original.

El juego

La historia muestra la importancia de los juegos de azar en el desarrollo de la teoría de la probabilidad; además, estos son de los primeros elementos que permiten a las personas tener contacto con situaciones de aleatoriedad, iniciando el proceso de concientización de la imprevisibilidad y la estimación de los resultados, lo que conlleva a que se pueda adquirir conocimientos probabilísticos antes de una introducción formal al tema (Cañizares, Batanero & Serrano, 1999). Según Cañizares et al. (1999) la investigación sobre el uso y la implicación del juego para la enseñanza de conceptos probabilísticos es poca, pero se encuentran bastantes experiencias de aula, las cuales fueron base para el planteamiento de las actividades que se mostrarán más adelante.

Se sabe que conocer la historia de una idea matemática puede ayudar a su comprensión puesto que da una guía para enmarcar dicha idea en los problemas que fueron motivo para su surgimiento o en las razones por las cuales se decidieron estudiar (de Guzmán, 1992); para el caso de la probabilidad, los juegos de azar fueron parte importante. El conocimiento de la historia de las ideas matemáticas permite:

1. Conocer las dificultades que pueden tener los estudiantes al abordar algún tema, puesto que probablemente esas mismas dificultades también estuvieron presentes cuando surgieron dichas ideas (de Guzmán, 1992).
2. Comprender mejor el proceso en que, históricamente, se han concebido las ideas matemáticas ya el aprendizaje de las matemáticas se puede asemejar a dicho proceso (de Guzmán, 1992).

3. La Historia de la Matemáticas se puede convertir en fuente de problemas, situaciones, anécdotas, etc., para que el profesor haga uso de esos recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje (Guacaneme, 2011).

DESARROLLO DEL TEMA

Aspectos metodológicos

Las tres actividades que se muestran a continuación hacen parte de una secuencia didáctica diseñada para enseñar el concepto de probabilidad desde los enfoques frecuentista y clásico. Para el desarrollo de esta secuencia se realizó:

1. Revisión documental que permitiera sentar una base teórica para sustentar la secuencia.
2. Determinación de los conceptos previos de los estudiantes.
3. Diseño de las actividades a partir de la revisión teórica realizada previamente.
4. Aplicación de las actividades diseñadas con 30 estudiantes de 9° grado de educación básica del Instituto San Ignacio de Loyola (Bogotá), ordenados en grupos de cinco personas. Para cada actividad se utilizó una sesión de clase de 90-120 minutos.
5. Evaluación del método de enseñanza por medio de mediciones tomadas antes y después de la aplicación de las actividades.

Desarrollo de la propuesta

Actividad 1. Carrera de caballos

En una carrera corren 12 caballos, cada uno de ellos identificándose con un número del 1 al 12. La pista de carreras tiene un número determinado de casillas, en las que los caballos pueden avanzar a partir del lanzamiento de un par de dados (de 6 lados cada uno). Se lanzan los dados y la suma de los resultados obtenidos determina qué caballo puede avanzar de posición, avanzando una casilla cada vez que se lancen los dados. Cada uno de los jugadores deberá apostar por un caballo. Gana el caballo que primero complete un número de casillas determinado antes de iniciar la carrera.

Para el caso de esta actividad se utilizó un tablero de cinco casillas, que representó la pista de carreras, por lo que el primer caballo en completar cinco casillas sería el ganador. A cada grupo de estudiantes se les entregó un tablero, un par de dados y un marcador para llenar el avance de la carrera. Cada grupo debía completar una tabla de resultados, donde registraban lo sucedido en el juego, para luego hacer un consolidado con los datos de todos los grupos. Según los datos recolectados, se les preguntó por el caballo por el que apostarían en una próxima carrera y el porqué de su elección, intentando que en sus respuestas incluyeran el cálculo de frecuencias relativas para determinar la probabilidad del caballo que ellos escogieran. Para terminar esta actividad se comprobó la hipótesis planteada por los estudiantes realizando una última carrera.

Actividad 2: Carrera de caballos simulada

Partiendo de la actividad anterior, se planteó la posibilidad que la pista de carreras fuera más larga, es decir, se necesita completar más casillas para ganar. Si esta tarea se realizaba con material manipulable, posiblemente se tornaría dispendiosa; por lo que se hizo uso de una aplicación móvil (disponible en https://goo.gl/xDYcMB), o en su defecto, un aplicativo web (disponible en https://goo.gl/wyGbxu), que simuló una carrera a partir del número de casillas que se necesitan para ganar la carrera.

Con la simulación, los estudiantes debían realizar diez carreras diferentes. Para la recolección de datos cada integrante de cada grupo registraba en una tabla los resultados de cada simulación, de tal forma que cada estudiante se encargaba de completar la información de una posición específica de la carrera, en su respectivo grupo. Luego de hacer un consolidado con todos los datos del curso, se analizó la primera posición de la carrera, y por qué al parecer el Caballo 7 tiene mayor probabilidad de ganar a medida que la carrera se hace más larga. La discusión de esta cuestión giró en torno a la revisión del espacio muestral del evento, guiando a los estudiantes a considerar todas las posibles combinaciones resultantes al lanzar un par de dados, observando que, de 36 posibles combinaciones, 6 favorecerán al Caballo 7, formulando en lo posible una relación parte-todo entre estas dos cantidades. Así, se haría un primer acercamiento al concepto de probabilidad desde el enfoque clásico.

Actividad 3: Dados cargados

En las dos actividades anteriores se han realizado lanzamientos con dos dados de seis caras y se ha llegado a la conclusión que el resultado con mayor probabilidad es la suma que da 7, por ende se propuso a los estudiantes un cambio a esta situación, cargando uno de los dados con los que se realizan los lanzamientos. Cada grupo recibió un par de dados de seis caras cada uno, distinguibles por color, de tal forma que uno de los dados estaba cargado. El objetivo de esta actividad experimental es examinar cuál es el resultado más probable de obtener con el par de dados cargados, y comparar los resultados del lanzamiento de dos dados no cargados.

Para esta actividad se utilizaron dados de espuma con dimensiones de 4cm. Para cargar los dados se realizó un agujero de 1.1 mm de profundidad en la cara 5, en la esquina contigua a las caras 6 y 4. En cada uno de los dados se insertaron dos balines de acero de 1/8 de pulgada cada uno con un peso de 0.062 kg. Por otra parte, para obtener los datos de los lanzamientos de los dados sin carga se utilizó una simulación alojada en un aplicativo web (disponible en https://goo.gl/98yxQa).

La recolección de los datos experimentales se hizo por medio de tablas de frecuencia, que se consolidaron en una hoja de cálculo para comparar los datos experimentales (resultados de lanzamientos de dados cargados) con los datos simulados (resultados de lanzamientos de dados sin carga). Utilizando herramientas que ofrece la hoja de cálculo se realizó una discusión, utilizando cálculos de probabilidad o gráficos estadísticos.

CONCLUSIONES

Durante el desarrollo de la primera actividad, los estudiantes decidieron apostar para una última carrera por el Caballo 7, según los resultados obtenidos y probabilidades calculadas. Cuando se comprobó la hipótesis de los estudiantes realizando una nueva carrera surgieron dos opciones: hacer los lanzamientos con dados físicos o hacerlos con dados virtuales. Estas dos opciones surgieron porque los estudiantes desconfiaban de la parcialidad de los resultados que se podían obtener; por un lado, los lanzamientos con dados físicos dependen de factores humano (fuerza con que se lanzan, superficie donde se lancen, etc.), mientras que los dados virtuales generan desconfianza porque no sabían cómo garantizar que los números generados fueran realmente aleatorios. Esta última situación resulta interesante, puesto que permite comprobar lo que mencionan Borovcnik y Peard (1996), dado que los resultados que brindan las simulaciones computarizadas son pseudo-aleatorios, los puntos de vista intuitivos de los estudiantes pueden ocasionar problemas con sus procesos de aprendizaje, pudiendo dificultar el uso de computadores. Por esta razón, se realizaron carreras con ambos tipos de dados (físicos y "simulados").

Con respecto a la segunda actividad, para definir el modelo matemático del enfoque clásico de la probabilidad fue de gran provecho las ideas que tenían los estudiantes sobre el enfoque frecuentista (trabajado abordado en actividades previas a partir de actividades con urnas) para medir probabilidades —basadas en el uso de porcentajes y relaciones parte-todo—, puesto que los estudiantes relacionaron estas ideas para calcular la probabilidad, identificando el número de casos que favorecían al Caballo 7, con el total de casos posibles en un lanzamiento de dos dados. Dado a que se basaron en las ideas del enfoque frecuentista se aclararon diferencias entre las dos formas de calcular probabilidades, que radicaron en la forma en la que se aborda un problema: si se hacen el experimento cierto número de veces y se observa cuántas veces ocurre cierto evento se tiene en cuenta un enfoque frecuentista, pero si se analiza los posibles resultados que puede tener un experimento y se toma en cuenta el total de veces que favorecen al evento a analizar se tiene en cuenta el enfoque clásico.

En la tercera actividad, los resultados obtenidos por los estudiantes se muestran en la Figuras 1. Según esta, con los dados cargados el número con mayor probabilidad de salir es el 7, los valores menores que 7 aumentaron su probabilidad de ocurrencia, mientras que los que eran mayores que 7 disminuyeron su probabilidad, esto en comparación con los datos obtenidos en las actividades realizadas anteriormente y con respecto a la simulación realizada en esta actividad, viéndose más el cambio en los valores 6 y 10. Cuando se calcularon los valores de probabilidad se hizo más notorio que los lanzamientos con los dados cargados favorecían en mayor medida a los números menores que 7, mientras que la disminución de la probabilidad de los valores mayores a 7 se dio casi que en la misma medida en como aumentaban los primeros.

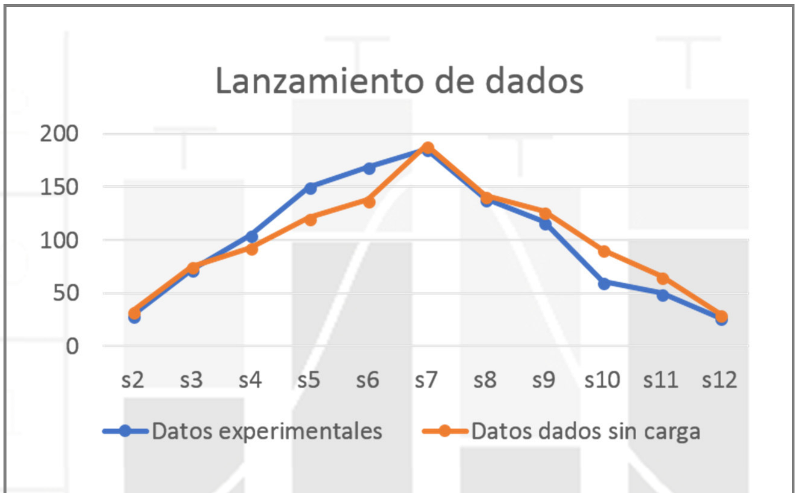

Figura 1. Gráfica de resultado obtenidos vs. Frecuencias (Actividad 3)
Fuente. Creación propia

Dado que en la planeación de la actividad no se tuvo en cuenta la comparación de los resultados de la experimentación con los valores de probabilidad clásica, se planteó a los estudiantes la situación en la que los datos experimentales no fueran los de los dados cargados sino los que arrojaba la simulación. Se preguntó si era posible que de alguna forma el valor de la probabilidad experimental se acercara a la probabilidad real y ellos identificaron que entre más lanzamientos se realizaran, estos dos valores de probabilidad se iban a parecer cada vez más. Se puede ver entonces que con estas actividades los estudiantes identificaron que la probabilidad frecuentista, al aumentar el número de repeticiones en las que se realiza un experimento, tiende al valor de la probabilidad clásica (la Ley de los grandes números).

REFERENCIAS

Blanco, L., Arunachalam, V. & Dharmaraja, D. (2012). *Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications*. John Wiley & Sons, Inc.

Borovcnik, M. & Peard, R. (1996). Probability. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbooks of Education* (pp. 239-287).

Burton, D. (2006). *The History of Mathematics: An Introduction* (6°). McGraw Hill.

Cañizares, M., Batanero, C. & Serrano, L. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, *37*, 37-55.

Chaput, B., Girard, J. C. & Henry, M. (2015). Frecuentist Approach: Modelling and Simulation in Statics and Probability Teaching. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 85–95). Springer.

Chaumont, L., Mazliak, L. & Yor, M. (2007). Some aspects of the probabilistic work. En É. Charpentier, A. Lesne, & N. Nikolski (Eds.), *Kolmogorov's Heritage in Mathematics* (pp. 41-66). Berlin: Springer.

de Guzmán, M. (1992). Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Recuperado de https://goo.gl/qqDg6Z

Guacaneme, E. A. (2011). La historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. En *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado de http://www.lematec.net/CDS/XIIICIAEM/artigos/2029.pdf

Lee, H. S. & Mojica, G. F. (2007). Teachers' Use of Experiments and Simulations in Middle School Probability Lessons. En T. de Silva & L. Wiest (Eds.), *29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Exploring Mathematics Education in Context* (pp. 437-440). Recuperado de https://goo.gl/wyHuic

Nilsson, P. (2014). Experimentation in Probability Teaching and Learning. En E. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking. Presenting plural perspectives.* (pp. 509–532). Springer.

Penagos, M. A. (2017). *Secuencia didáctica para la enseñanza de la probabilidad frecuentista y clásica para estudiantes de grado noveno*. (Trabajo de maestria) Universidad Nacional de Colombia.

Vega-Amaya, O. (2002). Surgimiento de la teoría matemática de la probabilidad. *Apuntes de Historia de Las Matemáticas*, *1*(1), 54-62. Recuperado de https://goo.gl/ScU5uJ