
DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES AL ABORDAR UNA SITUACIÓN DIDÁCTICA SOBRE EL CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

Valeria, Bizet Leyton

valeriabizet@gmail.com

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

Felipe, Ruz Ángel

felipe.ruz.angel@gmail.com

Universidad de Granada (España)

Elisabeth, Ramos Rodríguez

elisabeth.ramos@pucv.cl

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

Asunto: Uso de recursos didácticos o tecnológicos

Temática: Probabilidad

RESUMEN

El presente estudio aborda el aprendizaje del concepto variable aleatoria [v.a.] desde su carácter funcional en educación secundaria, por lo que nos planteamos como objetivo identificar las dificultades que presentan estudiantes al enfrentarse a una situación didáctica sobre v.a.. El estudio se enmarcó en el paradigma de investigación cualitativo, los sujetos informantes fueron 22 estudiantes de 15-16 años de un colegio de Chile. Como instrumento de recogida de datos se empleó una situación didáctica sobre v.a., cuyos elementos de análisis a priori, permitieron definir categorías para el análisis. Los resultados evidencian dificultades en la comprensión de la v.a. como función real, relacionadas a los tipos de sistemas de representación usados por los estudiantes, además de los obstáculos asociados a estos.

312

PALABRAS CLAVE

Variable aleatoria, Teoría de situaciones didáctica [TSD], Situación didáctica, Dificultades.

INTRODUCCIÓN

En los últimos veinticinco años, el tratamiento de la probabilidad se ha ido incorporando progresivamente a lo largo de los distintos niveles educativos del currículo de matemática en gran parte de los países desarrollados (Vásquez & Alsina, 2014). En

este contexto, uno de los contenidos fundamentales respecto al aprendizaje de la probabilidad en educación secundaria es el de variable aleatoria [v.a.], lo que se justifica gracias a su utilidad para comprender otros temas vinculados a ella como el de función de probabilidad, de distribución y variados modelos teóricos como la distribución normal.

Diversos autores (Heitele, 1975; Batanero, Chernoff, Engel, Lee & Sánchez, 2016) proponen a la v.a. entre los conceptos fundamentales en la enseñanza de la probabilidad, posicionándola como un conocimiento esencial y relevante de la educación escolar, para entender situaciones de la vida real. De esta forma, el lugar de la probabilidad se ha consolidado curricularmente y ha establecido nuevos desafíos para el campo de investigación en didáctica de la probabilidad.

Para Jiménez y Rupin (2013), en el contexto chileno donde la v.a. se introduce en 2° grado de secundaria (15-16 años, MINEDUC, 2009), algunos errores de los estudiantes pueden provenir de una inadecuada comprensión del concepto de función. Para Pérez y Parraguez (2013) la v.a. al ser enseñada en el nivel secundario presenta dificultades epistemológicas, didácticas, cognitivas y pedagógicas, existiendo “poca claridad de la noción de variable aleatoria, lejos de relacionarla con su significado funcional (en el contexto estadístico, aleatorio)” (p. 590). Además, desde la perspectiva de la epistemología de la matemática, para Ruiz (2006) los estudiantes evidencian “dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria y la composición de funciones vinculada con ella y la probabilidad” (p.156).

Bajo este escenario, nuestro estudio aborda la problemática relativa a las dificultades de los estudiantes de educación secundaria para comprender la naturaleza funcional del concepto v.a., por lo que es de interés identificar dichas dificultades en la implementación de una situación didáctica. Para ello, hemos diseñado, aplicado y analizado los datos de la puesta en práctica de una situación de aprendizaje, considerando como fundamento teórico elementos de la Teoría de Situaciones Didáctica, como forma de atender a la pregunta de investigación ¿cuáles son las dificultades que presentan estudiantes al enfrentarse a situaciones didácticas sobre v.a.?

MARCO DE REFERENCIA

La Teoría de Situaciones Didáctica [TSD] propuesta por Brousseau (2007), busca indagar el sistema didáctico, constituido por tres entes profesor- estudiantes- saber y sus interacciones, focalizándose en la dimensión cognitiva y epistemológica vinculada a la construcción del conocimiento matemático. Para Brousseau (2007), “una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y un medio determinado” (p. 17). En nuestro contexto, educación escolar, consideramos una situación como un entorno del estudiante, diseñado y manipulado por el profesor, que pretende ser utilizado como una herramienta

en el proceso de enseñanza- aprendizaje. Además, el medio son los materiales que dispone el estudiante y con los que interactúa para construir su propio conocimiento, el profesor es quien facilita el medio.

Uno de los conceptos fundamentales de esta teoría es el de situación a-didáctica, referida a la situación donde el sujeto (estudiante) aprende por interacción con el medio, sin intervención de profesor, cuyo propósito es poner en juego los conocimientos antiguos y generar en los estudiantes la necesidad de aprender algo nuevo. No obstante, como el estudiante no siempre logra resolver cualquier situación a-didáctica, es el profesor quien debe identificar aquellas que están a su alcance. En este caso, la situación o problema elegida por el profesor, que lo involucra a él en un juego con el sistema de interacciones del alumno con su medio, se denomina situación didáctica (Brousseau, 2007). De esta manera, una situación a-didáctica es parte de una situación didáctica.

Brousseau (2007) introduce tres tipos principales de situaciones que conducen gradualmente al estudiante a especificar el conocimiento utilizado para resolver un problema: situación de acción, situación de formulación y situación de validación, las cuales conforman una situación a-didáctica. El producto de esta situación es un conocimiento, que interpretamos como una estrategia que permite resolver el problema. En estas instancias, el profesor debe restringirse a alentar al estudiante a resolver el problema, hacer que este reconozca las acciones que puede realizar sobre el medio y decida si pudo lograrlo. Luego de finalizada la situación a-didáctica, se lleva a cabo la institucionalización, proceso en que el profesor debe explicitar las relaciones entre el conocimiento construido por el estudiante en dicha situación y el saber que desea enseñar.

En el desarrollo de la situación didáctica de nuestra investigación, se lleva a cabo una primera situación (*de acción*), en grupos de tres a cinco integrantes, donde cada estudiante se interesa en abordar el desafío propuesto e intenta dar respuesta a él poniendo en acción conocimientos previos. En la segunda situación (*de formulación*), el estudiante comunica al equipo su estrategia de resolución y discute entre pares para generar una estrategia común (representar la relación entre los conjuntos propuestos en lenguaje figural, tabular o natural). En la tercera situación (*exposición y discusión de estrategias*), cada equipo comunica al grupo curso sus resultados, comprobando estos, buscando un consenso sobre la respuesta correcta del desafío. Para finalizar con la cuarta situación (*de institucionalización*) en la que el profesor, a partir de las representaciones propuestas por los grupos, introduce los conceptos de v.a. y función de probabilidad. Cabe destacar que no se realiza una situación de validación, pues los estudiantes no establecen la validez del conocimiento característico de la situación, la v.a.. Al respecto, Panizza (2003) señala que, no se trata de una regla general, aunque pueda ser apropiado en algunos casos, que para cada saber al que apunte la enseñanza hay que pasar necesariamente por situaciones

de acción-formulación-validación. Habrá conocimientos que es oportuno formular pero cuya validación explícita no sea apropiada para ciertos niveles de escolaridad.

DESARROLLO DEL TEMA

Aspectos metodológicos

Este estudio se enmarca en el paradigma de investigación cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández & Baptista, 2006). Los sujetos informantes fueron 22 estudiantes de 2° grado de secundaria (15 a 16 años) de un establecimiento educacional subvencionado de la región de Valparaíso (Chile). Como instrumento de recogida de datos se empleó una situación didáctica sobre la v.a. (Imagen 1) y un video de su implementación, la clase tuvo una duración de 90 minutos. Se desarrolló un análisis a priori de la situación didáctica.

Desafío

A raíz de los festejos del día del alumno, el profesor de taller de cine del colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes inscritos que tiene cada uno de los 30 apoderados del taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los resultados para tal efecto son:

Número de apoderados	8	13	7	2
Número de estudiantes	1	2	3	4

La intención es efectuar una rifa que beneficie a los alumnos, se asignará a cada apoderado un boleto de rifa. En la celebración del día del alumno se realizará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, pero estas se tienen que comprar con anticipación, pues hasta mañana están en oferta. Por lo tanto el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, con la finalidad de abaratar costos.

Dados los conjuntos A, B y C definidos por

- A: el conjunto de 30 apoderados del taller.
- B: el conjunto de cantidad de estudiantes.
- C: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación.

Defina y represente la relación entre A y B y entre B y C.

Imagen 1. Instrumento de recogida de datos
Fuente. Creación propia

La situación didáctica expuesta en la Imagen 1, tiene como propósito abordar el concepto de v.a. enfatizando su carácter funcional. Por ello, la intención es que los estudiantes logren reconocer y representar las relaciones entre los conjuntos A y B y entre los conjuntos B y C, para posteriormente darles a conocer que en el contexto de probabilidad esas relaciones son funciones y reciben el nombre de v.a. y función de probabilidad, respectivamente. De esta manera, se pretende introducir al estudiante en el estudio de nuevos conceptos probabilísticos, a saber el de v.a. y su vínculo directo con la función de probabilidad. Cabe aclarar, que en el contexto en que fue diseñada la situación, la palabra apoderado hace referencia a la persona que integra la comunidad escolar, que tiene el poder de representar y ser responsable de un estudiante, en un establecimiento educacional específico al cual pertenece este último.

Para el análisis de datos se empleó el método de análisis de contenido (Flick, 2004) para identificar las dificultades que emergen tras analizar los conceptos matemáticos y representaciones elegidas por los estudiantes para resolver el desafío. La simplificación

de contenidos a categorías es de acuerdo a algunos elementos de la TSD respecto a la primera y segunda situación del desafío, pues es donde el estudiante tiene un mayor rol protagónico.

En la situación de acción el procedimiento se realiza a partir de la identificación preliminar de elementos conceptuales que pueden contribuir a la resolución del desafío. Estos conceptos matemáticos posibilitaron establecer cuatro categorías de análisis (Tabla 1). El reconocer por parte de los estudiantes estos elementos, cuando realizan una lectura comprensiva del desafío, da cuenta cómo se interiorizan con este en la situación de acción.

Situación	Categoría	Descripción	Concepto matemático
Acción	C1: El estudiante identifica el espacio muestral asociado al experimento.	El estudiante determina todos los elementos del conjunto A como una colección de elementos, representado por ejemplo $A = \{\text{apoderado1}, \dots, \text{apoderado 30}\}$	Experimento aleatorio y espacio muestral
	C2: El estudiante clasifica los elementos del espacio muestral según la característica del problema.	El estudiante agrupa los elementos del espacio muestral según la cantidad de estudiantes que posee un apoderado.	Partición de un conjunto y sucesos compuestos
	C3: El estudiante identifica que los elementos del conjunto C son probabilidades.	El estudiante identifica los cuatro elementos del conjunto C y expresa la probabilidad de ocurrencia de cada suceso.	Definición clásica de probabilidad: asignación de probabilidad.
	C4: El estudiante identifica que la relación entre los conjuntos A y B está representada en la tabla dada.	Es estudiante afirma que el conjunto B está representado en la primera fila de la tabla y el conjunto A en la segunda fila.	Función: dominio y recorrido.
Tabla 1. Categorías de análisis en la situación de acción Fuente. Creación propia			

La situación de formulación se procede con base en el reconocimiento de las posibles estrategias de resolución del desafío. Se determinaron tres posibles estrategias de resolución, que hicieron posible establecer seis categorías de análisis (Tabla 2).

Situación	Categoría	Descripción	Estrategia de
Formulación	C5: El estudiante identifican y registran en lenguaje natural la relación entre los conjuntos A y B	El estudiante expresa en lenguaje cotidiano la característica o cualidad que permite vincular a cada suceso (elemental) con un valor numérico.	Estrategia 1: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje
	C6: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos A y B en lenguaje figural	El estudiante utiliza un diagrama sagital o esquema en el que representar los conjuntos A y B y relaciona cada elemento del conjunto A (suceso elemental) con único elemento de B (valor de la variable $\{1,2,3,4\}$)	Respuesta experta: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje figural (diagrama sagital o esquema)
	C7: El estudiante representa la relación entre en los conjuntos A y B en lenguaje tabular.	El estudiante realiza una tabla de valores donde la primera columna corresponde al número de estudiantes y la segunda columna al número de apoderados.	Estrategia 2: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular

	C ₈ : El estudiante identifican y registran en lenguaje natural la relación entre los conjuntos B y C	El estudiante expresa en lenguaje cotidiano la correspondencia que permite asignar a cada valor de la variable aleatoria un valor de probabilidad.	Estrategia 1: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje natural
	C ₉ : El estudiante representa la relación entre en los conjuntos B y C en lenguaje figural	El estudiante utiliza un diagrama sagital o esquema en el que representar los conjuntos B y C y relaciona cada elemento del conjunto B (valor de la variable aleatoria {1,2,3,4}) con único elemento de C (valor de probabilidad)	Respuesta experta: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje figural (diagrama sagital o esquema)
	C ₁₀ : El estudiante representa la relación entre los conjuntos B y C en lenguaje tabular	El estudiante realiza una tabla de valores donde la primera columna corresponde al número de apoderados y la segunda columna a la probabilidad asociada.	Estrategia 2: Representar la relación entre los conjuntos en lenguaje tabular
Tabla 2. Categorías de análisis en la situación de formulación Fuente. Creación propia			

Desarrollo de la propuesta

Las respuestas de cinco grupos de estudiantes organizados como: G₁ (5 estudiantes), G₂ (5 estudiantes), G₃ (4 estudiantes), G₄ (3 estudiantes) y G₅ (5 estudiantes), fueron clasificadas en las diez categorías expuestas anteriormente (Tabla 1 y Tabla 2). Cabe mencionar que este proceso se realizó a partir de estrategias dadas por grupos de alumnos, posterior a que fueron planteadas algunas devoluciones por parte del docente.

En la situación de acción, inicialmente cuatro grupos (G₁, G₂, G₃ y G₅) identificaron como espacio muestral la cardinalidad de los cuatro sucesos elementales que lo conforman (cantidad de apoderados según número de estudiantes matriculado) (Imagen 2), observándose la identificación y la partición incorrecta del espacio muestral.

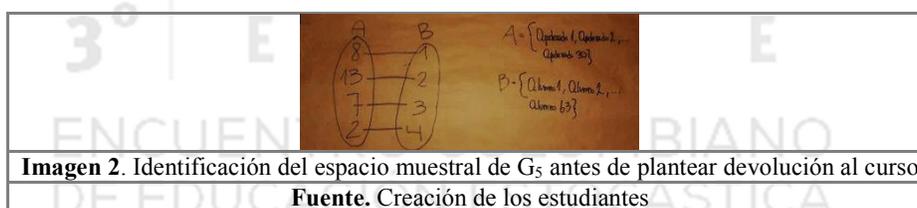
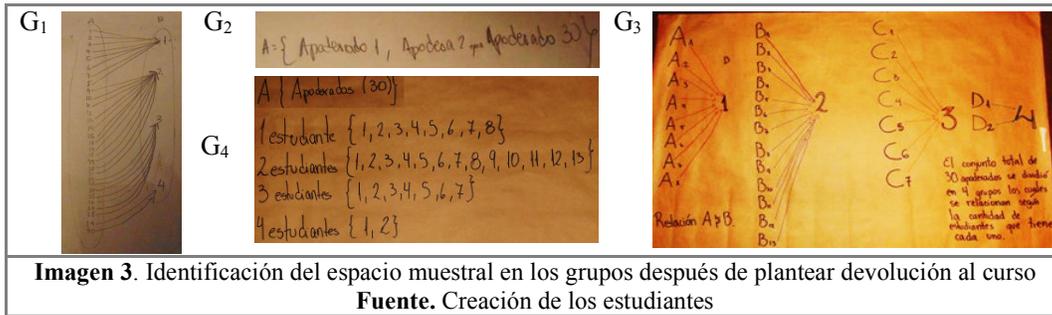


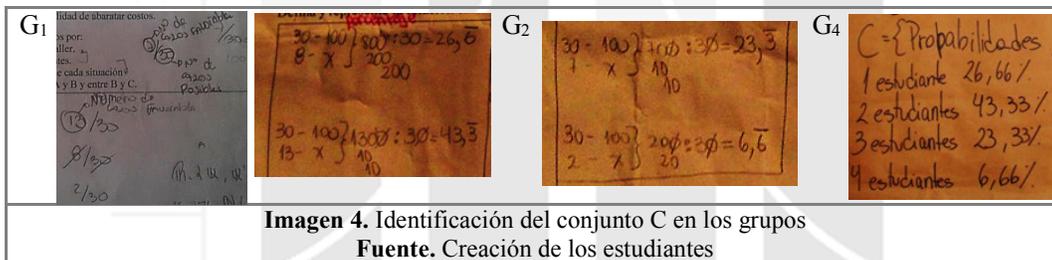
Imagen 2. Identificación del espacio muestral de G₅ antes de plantear devolución al curso

Fuente. Creación de los estudiantes

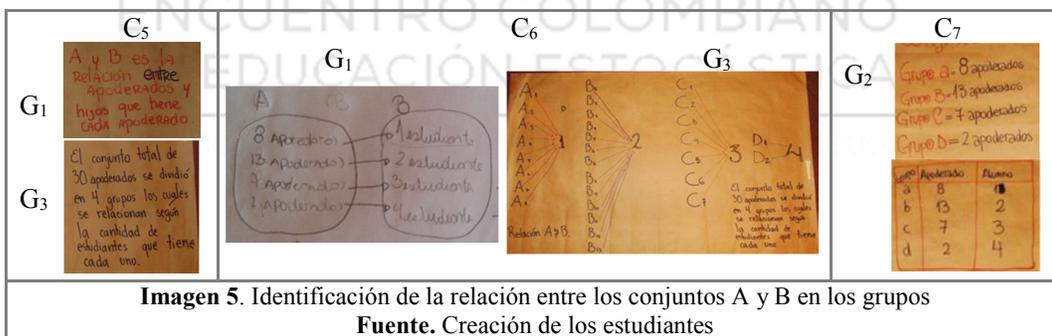
Después de realizar la devolución prevista en el plan de clase, fue posible clasificar a cuatro grupos en la categoría C₁, aunque dos de ellos (G₁ y G₄), identificaron el espacio muestral asociado al experimento como una colección de números (Imagen 3). Subyace una dificultad para identificar el espacio muestral del experimento aleatorio.



Además en la situación de acción, solo tres grupos (G_1 , G_2 , G_4) identificaron que el conjunto C está compuesto por las probabilidades de los sucesos elementales y las determinaron, clasificándolos en la categoría C_3 . Dos grupos (G_2 y G_4) representaron las probabilidades a través de porcentajes y un grupo (G_1) como cociente entre el número de casos favorables del suceso y número de casos posibles (Imagen 4).



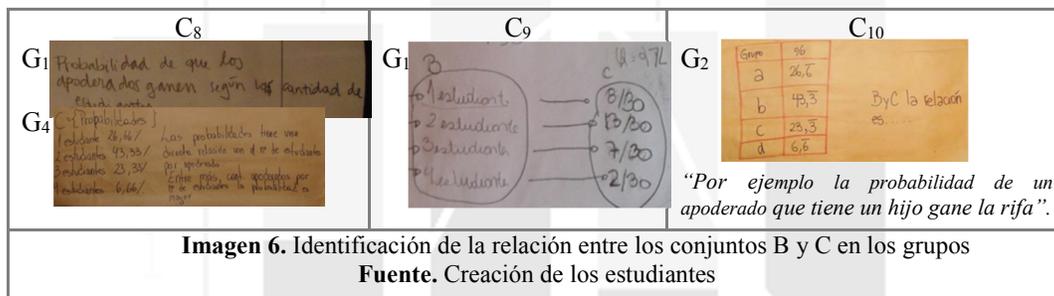
En la situación de formulación, solo tres grupos (G_1 , G_2 , G_3) identificaron en el desafío la v.a., y dos de ellos (G_1 y G_3) representaron la relación entre los conjuntos A y B en lenguaje natural (C_5) y lenguaje figural (C_6) a través de un diagrama sagital o esquema. Además solo un grupo (G_2) representó dicha relación a través de una tabla (C_7), como se muestra en la Imagen 5.



También en la situación de formulación, sólo tres grupos (G_1 , G_2 y G_4) reconocieron la función de probabilidad asociada a la v.a., y dos de ellos (G_1 y G_4) representaron la

relación entre los conjuntos B y C en lenguaje natural (C_8). Además el grupo G_1 representó la relación en lenguaje figural mediante un diagrama sagital (C_9) (Imagen 6). Es importante destacar que la respuesta del grupo G_2 , Imagen 6 (derecha), fue clasificada en la categoría C_{10} , ya que se identificaron en ella elementos de la estrategia 2, como el hecho de que una de las columnas de la tabla corresponde a la probabilidad, aunque en la tabla representaron la función compuesta entre el espacio muestral y la probabilidad.

De esta manera, en la situación de formulación, fue posible identificar una dificultad asociada a aplicar el concepto de función real en el contexto de probabilidad. Particularmente, se observó dificultad en relacionar el recorrido de la v.a. con el conjunto de probabilidades que ésta toma en cada uno de sus posibles valores.



CONCLUSIONES

El estudio presentado muestra que el desafío propuesto admite diversas estrategias de resolución y se aprecia una tendencia en los resultados en relación a confirmar la presencia de dificultades reportadas previamente en la literatura relacionada con la comprensión de la v.a. En particular, los alumnos de 2° grado de secundaria estudiados al enfrentarse a una situación didáctica sobre v.a., presentan dificultad en identificar elementos del espacio muestra, como también se evidencia en el trabajo de Batanero (2001). Además, inicialmente se aprecia dificultad en la construcción de la partición del espacio muestral, señalada por Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán y Zamora (2011).

Del mismo modo, se constata la dificultad asociada a aplicar el concepto de función real en el contexto de probabilidad, señalado por Jiménez y Rupin, (2013). En particular se observó dificultad en relacionar el recorrido de la v.a. con el conjunto de probabilidades que ésta toma en cada uno de sus posibles valores (Ruiz, 2006). Si bien existen investigaciones previas que reconocen la dificultad en la comprensión de la v.a. como función real, parece ser que estas no conectan estas dificultades con el análisis de los potenciales tipos de registros usados por los estudiantes y los obstáculos intrínsecos asociados a estos, como en este trabajo.

En relación a construir tablas, Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán y Zamora (2011) afirman que se genera un obstáculo cuando los estudiantes agrupan los elementos del espacio muestral en subconjuntos excluyentes para generar una partición. Persiste la idea de que la relación que se busca establecer se da en términos de los valores de la v.a. con los cardinales de los subconjuntos correspondientes de la partición. Acerca de los diagramas sagitales en la representación de la partición, generan dificultades, ya que lo que se ilustra en ellos son la correspondencia si acaso la relación de dependencia entre magnitudes o variables (Fernández, Andrade, Montañez, Beltrán & Zamora, 2011).

Respecto a la superación de algunas dificultades identificadas, proponemos para la identificación del espacio muestral, plantear problemas contextualizados y utilizar dos tipos de representaciones, lenguaje figural (diagrama de árbol) y lenguaje tabular (tabla matricial), que permitan identificar las posibilidades en una situación (Álvarez, Espinoza, Méndez, Peña & Torres, 2016). Además consideramos reformular la situación didáctica propuesta, particularmente definir el conjunto C: Conjunto de posible ocurrencia que un apoderado tenga 1, 2, 3 o 4 estudiantes inscritos en el taller.

Finalmente, es posible concluir que el desafío diseñado es una buena situación didáctica, la que permitió al profesor abandonar su rol de comunicador del saber y a los estudiantes construir su propio conocimiento como una experiencia grupal y colaborativa, con la cual el docente podrá conectar el saber institucional. De esta forma, la proyectamos como un recurso valioso para profesores en ejercicio o formación, que tengan la tarea de enseñar este concepto.

REFERENCIAS

- Álvarez, N., Espinoza, N., Méndez, E., Peña, M., & Torres, F. (2016). *Espacios muestrales estocásticos* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de los Andes. Colombia.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. New York: Springer.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Fernández, F., Andrade, L., Montañez, J., Beltrán, J., & Zamora, S. (Junio, 2011). *Hacia una posible aproximación comprensiva de la variable aleatoria*. Comunicación presentada en la XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (XIII CIAEM), Recife, Brasil.
- Flick, U. (2004). *Introducción a la Investigación Cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.
- Heitele, D. (1975). Un punto de vista epistemológico sobre las ideas fundamentales estocásticas. *Estudios de la educación en matemáticas*, 6, 187-205.

- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Cd. de México: McGraw-Hill.
- Jiménez, L., & Rupín, P. (2013). *Matemática 2° Medio Guía didáctica del docente*. Santiago: Ediciones SM.
- MINEDUC. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media*. Santiago: autor.
- Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza, *Enseñar matemática en el nivel inicial y primer ciclo de EGB: Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Paidós.
- Pérez, B., & Parraguez, M. (2013). Construcciones mentales de los conceptos aleatorios y determinista a partir de la regresión lineal. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 589-598. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria* (Tesis de maestría no publicada). CINVESTAV-IPN. México
- Vásquez, C., & Alsina, A. (2014). Enseñanza de la probabilidad en educación primaria. Un desafío para la formación inicial y continua del profesorado. *Números*, 85, 5-23.