# GEOGEBRA Y ESTADÍSTICA: EL CASO DE LA REGRESIÓN Y LA INTERPOLACIÓN POLINOMIAL

***Leydi Yaneth, Herrera Vargas***
lyherrerav@upn.edu.co
*Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)*
***Diana Marcela, Brausín Fandiño***
dmbrausinf@upn.edu.co
*Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)*
***William Alfredo, Jiménez Gómez***
wjimenez@pedagogica.edu.co
*Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)*

***Asunto:*** Uso de recursos didácticos o tecnológicos
***Temática:*** Estadística matemática

## RESUMEN

*Esta comunicación tiene como finalidad exponer las posibilidades que brinda el software GeoGebra en el aprendizaje de conceptos matemáticos, mediante el diseño de aplicativos para la enseñanza y aprendizaje de algunos modelos que describen un conjunto de datos. Esta propuesta surge a partir de las experiencias recogidas en el espacio académico Profundización en matemáticas elementales, de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, en donde se tenía la tarea de diseñar en GeoGebra aplicativos de aprendizaje autónomo relacionados con la interpolación y la regresión. Los estudiantes evidenciaron debilidades en relación a sus conocimientos matemáticos, pero mejoraron notablemente su aptitud para enfrentar nuevas realidades educativas.*

## PALABRAS CLAVE

GeoGebra, Interpolación polinómica, Regresión, Programación.



## INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las tecnologías computacionales, la globalización y la vida moderna permean la realidad, y la escuela no está exenta de esto, lo que sugiere nuevos retos en el ámbito educativo. La sociedad requiere de personas con habilidades y conocimientos necesarios para tomar decisiones y afrontar desafíos que el sistema actual propone. En este sentido, es necesario replantear la forma de aprender y enseñar matemáticas de tal manera que el estudiante desarrolle habilidades que le permitan usar lo aprendido para solucionar problemas; por ello, esta propuesta tiene por objetivo presentar cómo el diseño de aplicativos en GeoGebra permite al programador aprender o afianzar conceptos matemáticos que surgen al realizar este tipo de tareas.

El documento se estructura en tres partes, la primera, relacionada con el marco de referencia, en el que se hace un acercamiento matemático a la definición de interpolación y de regresión, así como su importancia en distintas áreas del conocimiento y además se evidencia cómo el uso de GeoGebra se ha masificado en los últimos años porque brinda múltiples comodidades y ventajas. En la segunda parte, se describe la metodología que se utilizó en el desarrollo de la propuesta, cómo surgió la idea y cómo se ejecutó y al mismo tiempo se muestran las estrategias utilizadas por los autores para elaborar los aplicativos de aprendizaje autónomo. Finalmente, se presentan algunas conclusiones de la puesta en escena de esta propuesta, evidenciando la importancia de GeoGebra en el desarrollo del pensamiento matemático.

## MARCO DE REFERENCIA

Con frecuencia en las ciencias de la ingeniería, ciencias exactas y naturales es necesario diseñar modelos matemáticos que describan conjuntos de datos, obtenidos por observación o experimentación. Así, en estas áreas, dos de los problemas interesantes que se presentan son encontrar valores que por medio de la medición no es posible determinar, y predecir la existencia de otros datos con la aproximación adecuada. Con el propósito de dar solución a estos problemas, se plantea en este documento dos métodos usuales para realizar la búsqueda de estos valores, uno de ellos consiste en determinar una función que pase exactamente por todos los puntos del conjunto (interpolación) y el otro encontrando una función que se ajuste lo mejor posible a los datos (regresión). Consideraremos aquí, únicamente, el caso de la interpolación polinómica de Lagrange y el de la regresión lineal, para lo cual se dará una breve descripción de estos conceptos matemáticos.



### Interpolación de Lagrange

A continuación, se describe el método de interpolación de Lagrange, el cual garantiza que una curva de forma polinómica pase por cada uno de los puntos de un conjunto de datos dado. Para hacerlo, se definen los polinomios básicos y se muestra paso a paso cómo se obtiene dicha interpolación (Douvoba y Guillén (2007).

**Polinomios básicos de Lagrange**

Sean $x_1,\ x_2,\ x_3, \dots,\ x_{j-1},\ x_j,\ x_{j+1}, \dots x_n$ números reales diferentes. Vamos a construir un polinomio $L_j$ de grado $n-1$ tal que $L_j(x_j) = 1$ y $L_j(x_k) = 0$, para todo $k \in [1, n]$ con $k \neq j$.

$$L_j(x) = c\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(x - x_k)$$

Dado que $L_j(x_j) = 1$ , se tiene que

$$1 = c\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(x_j - x_k)$$

De donde,

$$c = \frac{1}{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(x_j - x_k)}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{L_j(x) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}}$$

**Polinomio interpolante en la forma Lagrange**

Sean $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots x_n$ números reales diferentes y sean $y_1, y_2, y_3 \ldots, y_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \ldots, y_n$. Vamos a construir un polinomio $P$ de grado $n-1$ tal que $P(x_k) = y_k$ para todo $k \in [1, n]$. Para esto utilizaremos los polinomios básicos de Lagrange.

Nótese que $y_j \cdot L_j(x)$ es un polinomio que pasa por los puntos $(x_1, 0), (x_2, 0), (x_3, 0), \ldots (x_{j-1}, 0), (x_j, y_j)(x_{j+1}, 0), \ldots, (x_n, 0)$ . Luego, para generar el polinomio interpolante de Lagrange basta con realizar la siguiente suma:

$$\boxed{P(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot L_j(x)}$$

## Regresión

A diferencia de la interpolación de Lagrange, la ecuación de la gráfica de mejor ajuste, no necesariamente pasa por cada uno los puntos del conjunto de datos, solo representa la tendencia general del comportamiento de ellos. Este ajuste puede ser de tipo lineal, potencial, exponencial, polinómico. En este apartado solo mostraremos con detalle el desarrollo del ajuste lineal simple, por el método de mínimos cuadrados, tomado de Montgomery (2006).

**Modelo de regresión lineal simple**

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Los parámetros son desconocidos y se estiman por medio del método de mínimos cuadrados, usando el conjunto de $n$ datos de la muestra $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$,..., $(x_n,\ y_n)$. Es decir, se estiman los parámetros tales que la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores $y_i$ y la línea recta sea mínima.

$$S(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} (\ y_i - (\beta_0 + \beta_i x_i))^2$$

Los estimadores, por mínimos cuadrados, de $\beta_0$ y $\beta_1$, se denotarán $\widehat{\beta_0}$ y $\widehat{\beta_1}$ .

Derivando respecto a $\beta_0$ se tiene que,

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} x_i\right) = 0$$

Aplicando la propiedad distributiva,



$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Despejando $\widehat{\beta_0}$,

$$\widehat{\beta_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - \widehat{\beta_1} \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{y} - \widehat{\beta_1}\bar{x}$$

$$\boxed{\widehat{\beta_0} = \bar{y} - \widehat{\beta_1}\bar{x}}$$

Derivando respecto a $\beta_1$ se tiene que,

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} x_i) x_i = 0$$

Aplicando la propiedad distributiva,

$$\widehat{\beta_0}\sum_{i=1}^{n} x_i + \widehat{\beta_1}\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

Despejando $\widehat{\beta_1}$,

$$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}}$$

$$\boxed{\widehat{\beta_1} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}}$$

La interpolación y del análisis de regresión, son de vital importancia en la práctica de la ingeniería y en diferentes problemas científicos o tecnológicos, para entender y tomar decisiones. Según Gea, Contreras, Batanero y López-Martín (2015), la estadística bidimensional tiene gran importancia en la formación de los estudiantes, puesto que incentiva el surgimiento de nuevos conocimientos sobre la dependencia funcional. Por otra parte, es utilizada como herramienta de investigación en varias de las ciencias experimentales y sociales, así como para la predicción, en gestión, política y economía. En consecuencia, es necesario que el estudiante adquiera competencias de tratamiento de los datos bidimensionales, de tal manera que se apropie significativamente de los conceptos de regresión e interpolación e identifique la diferencia entre ellos, y que evidencie que si los confunde, esto lo puede conducir a graves errores tanto numéricos como inferenciales.



Un recurso que ayuda a los estudiantes a superar las posibles dificultades que surjan en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos como el de la interpolación y la regresión, puede ser la tecnología digital. Según Inzunza y Ward (2015), para el análisis de datos, la tecnología computacional ofrece un potencial importante en cuanto a la posibilidad de hacer cálculos de forma casi inmediata y a la facilidad para elaborar representaciones gráficas. Además, es un recurso que permite reorganizar la mente de quien lo usa, de tal manera que produce cambios estructurales en el sistema cognitivo gracias la interacción que ofrece con distintos tipos de representación de los datos. Según Pea (1987) citado por Inzunsa y Ward (2015), la tecnología computacional se define como “cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente, en el pensamiento, el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas” (p.91).

De acuerdo con Carranza (2011), el constante desarrollo y avance de las tecnologías computacionales permite crear nuevas formas de aprender y de enseñar matemáticas, lo que sugiere un esfuerzo por la innovación en las prácticas educativas. Entre estos desarrollos Carranza (2011) destaca los Sistemas de Cálculo Simbólico [SCS] que son una herramienta de cálculo potente, los Sistemas de Álgebra Computacional [CAS] que permiten cálculos simbólicos y numéricos, los Sistemas de Geometría Dinámica [DGS] que ofrecen la representación gráfica de objetos geométricos y el dinamismo referido a la posibilidad del arrastre. Un software que contiene las dos últimas categorías mencionadas (CAS y DGS) representa una herramienta útil e interesante para nosotros, por lo que se decide usar GeoGebra para el diseño de los aplicativos de los modelos de interpolación y de regresión. GeoGebra es un "procesador geométrico" y un "procesador algebraico" porque combina las representaciones gráficas y simbólicas, ofreciendo ambas de forma simultánea y su nueva clasificación como categoría es Ambiente de Geometría Dinámica [AGD], Carranza (2011).

Según Del Pino (2013), dentro de todas las posibles herramientas existentes para el aprendizaje de conceptos matemáticos, destaca a GeoGebra principalmente porque:

> Es un software libre, gratuito y de código abierto, no requiere de licencias y además se puede ingresar desde Internet. Es multiplataforma. Trabaja en diferentes sistemas operativos ya sea Windows o Linux. Es fácil de usar, existen diferentes formaciones y también cuenta con plataformas virtuales que permiten acceder a cursos gratuitos. Posee diferentes vistas, algebraica, hoja de cálculo, vista gráfica: 2D y 3D (p. 243).



En la actualidad, GeoGebra se ha convertido en una de las herramientas más destacadas en Educación Matemática como lo menciona Jiménez (2018). El impacto de GeoGebra en el ámbito educativo se ha extendido a nivel mundial, y aunque su casa matriz queda en Alemania, en la actualidad, existe una comunidad de más de 30 millones de personas entre docentes, estudiantes, investigadores de universidades, desarrolladores de software, miembros de organizaciones sin ánimo de lucro de todo el mundo, y aficionados al programa, que hacen parte de los distintos institutos de GeoGebra locales dirigidos por el Instituto de GeoGebra Internacional.

Jiménez (2018), realiza la siguiente categorización de los tipos de aplicativos que se pueden realizar con GeoGebra: aplicativos de acompañamiento, de conjetura, calculadoras, evaluativos y de aprendizaje autónomo. Es en estos últimos donde se centra esta propuesta, puesto que proporcionan al estudiante una alternativa dinámica, independiente y diferente para aprender un concepto matemático.

# DESARROLLO DEL TEMA

Esta sección se divide en dos apartados, el primero relacionado con la metodología, donde se relata el proceso por el cual se llevó a cabo la propuesta; y el segundo relacionado con la descripción detallada del problema que ha de desarrollarse.

## Aspectos metodológicos

La idea de realizar esta propuesta surgió durante el desarrollo del espacio académico Profundización en matemáticas elementales I, en el primer semestre académico de 2018, espacio obligatorio de la Maestría en Docencia de la Matemática, ofrecida por la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Este espacio académico tenía un enfoque especial en el uso de Tecnologías Digitales para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, utilizando el software GeoGebra.

Con el propósito de aprender o profundizar en algún conocimiento matemático, los estudiantes reconocían y aprendían a usar las herramientas de GeoGebra, descubriendo así su potencial en el ámbito escolar. Como parte de las tareas finales propuestas y orientadas por el docente, se pidió a los participantes del espacio académico que diseñaran un aplicativo de aprendizaje autónomo, para enseñar específicamente Interpolación de Lagrange o Regresión lineal, polinomial, exponencial o logarítmica. Este trabajo se desarrolló durante tres sesiones y tenía por objetivo principal que los programadores/participantes, además de aprender a usar el software, también se apropiaran de conocimientos matemáticos que emergen al elaborar este tipo de tareas.



Los productos obtenidos al finalizar el semestre, en su mayoría, resultaron ser novedosos, llamativos y funcionales, por lo cual se decidió compartirlos con el gremio docente, y explicar de forma detallada los procedimientos llevados a cabo para su construcción, con el objetivo de invitar a la comunidad educativa a conocer y hacer uso de las herramientas de GeoGebra en pro de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

## Desarrollo de la propuesta

Se muestra paso a paso la construcción del aplicativo Interpolación de Lagrange utilizando GeoGebra y los conocimientos matemáticos que se afianzan o que emergen al realizar este diseño.

1. Antes de iniciar con la creación del aplicativo, los participantes del espacio académico se vieron en la necesidad de estudiar minuciosamente la teoría matemática que involucra los polinomios de Lagrange, su demostración, su algoritmo y su aplicación en distintas áreas del conocimiento. Esto, con el fin de poder elaborar una ruta de programación consecuente que les permitiera obtener la interpolación, en GeoGebra, a partir del conocimiento matemático estudiado.

2. Una vez el estudiante ha entendido cómo funcionan los polinomios de Lagrange, inicia la programación creando en el programa tres listas (Imagen 1), una con los puntos que el usuario desea interpolar, otra con las coordenadas *x* de los puntos y otra con las coordenadas *y*. Para ello usa el comando "*secuencia*", que le permite afianzar el concepto de sucesión matemática y de término *n*-ésimo.

Puntos = {(1, 1), (2, 4), (3, 4), (5, 2), (4, 7), (6, 4)}

$\text{Coorden}_x = \{1, 2, 3, 5, 4, 6\}$

$\text{Coorden}_y = \{1, 4, 4, 2, 7, 4\}$

**Imagen 1.** Creación de lista de puntos
**Fuente.** Creación propia

3. Con el fin de crear una secuencia de secuencias, que contenga los elementos numéricos necesarios para generar los polinomios básicos de Lagrange, se utilizan los comando "*secuencia*" y "*suprime*", relacionados así:

*Secuencia (Suprime (Coorden_x, {Elemento (Coorden_x, i)}), i, 1, n_1*

Donde, se ha llamado *n_1* a la cantidad de puntos con los cuáles se va a llevar a cabo la interpolación.
Estos comandos que generan una matriz (Imagen 2), permiten, a quien los usa, fortalecer su concepto matricial y caracterizar según su posición a los elementos de un arreglo bidimensional numérico.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

**Imagen 2.** Matriz de elementos para construir los polinomios básicos de Lagrange
**Fuente.** Creación propia

4. Posteriormente, se generan tres secuencias (Imagen 3), una con los numeradores de los polinomios básicos de Lagrange, otra con sus respectivos denominadores y la última que contiene a los polinomios. Para hacer la última secuencia, se escribe en la entrada: Secuencia((Elemento(Coorden_y, i)Elemento(Numeradores, i)) / Elemento(Denominadores, i), i, 1, n_1)

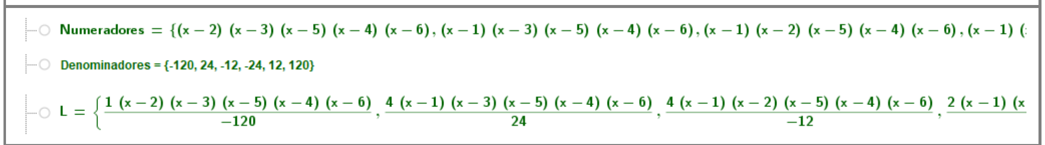


**Imagen 3.** Polinomios básicos de Lagrange

**Fuente.** Creación propia

5. Para generar el polinomio interpolante de Lagrange se deben sumar los polinomios básicos, utilizando el comando "*suma*" el cual favorece en el programador el concepto de sumatoria de una cantidad *n* de datos.
6. Finalmente, se diseña la interfaz del aplicativo (Imagen 4), usando textos, botones y casillas de entrada. Es fundamental, que se vea el polinomio interpolante en el sistema de representación gráfico y algebraico, ya que se trata de un aplicativo de aprendizaje autónomo, por lo que también se observan los polinomios básicos.

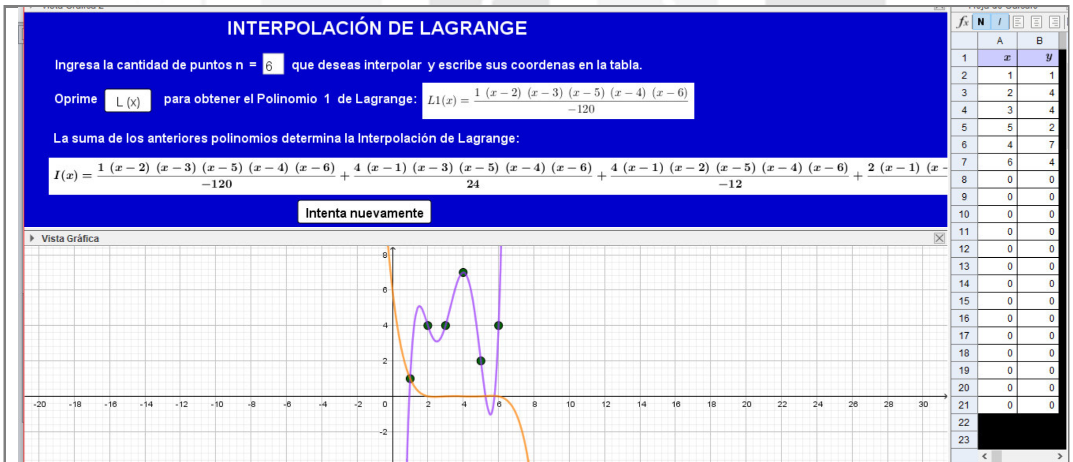


**Imagen 4.** Interfaz del aplicativo

**Fuente.** Creación propia



## Descripción aplicativo regresión

A continuación, se describen los pasos llevados a cabo para la construcción del aplicativo que realiza la regresión lineal, polinómica, exponencial o logarítmica de un conjunto de datos.

1. De forma análoga al aplicativo de ajuste polinómico, se pide al usuario que ingrese (en una casilla de entrada) la cantidad de puntos con los cuales desea hacer el ajuste. Posteriormente, ingresa las coordenadas de cada uno de los puntos en la hoja de cálculo y se crea la lista de puntos para cada coordenada. Estas listas se visualizarán, en la vista algebraica, con los nombres respectivos *Coordenadax* y *Coordenaday*.

2. Haciendo uso de la herramienta que ofrece GeoGebra para ajustar curvas, se realiza la regresión que se quiera enseñar (polinomial, exponencial, logarítmico, polinomial, entre otros), del conjunto de datos ingresado (Imagen 5).

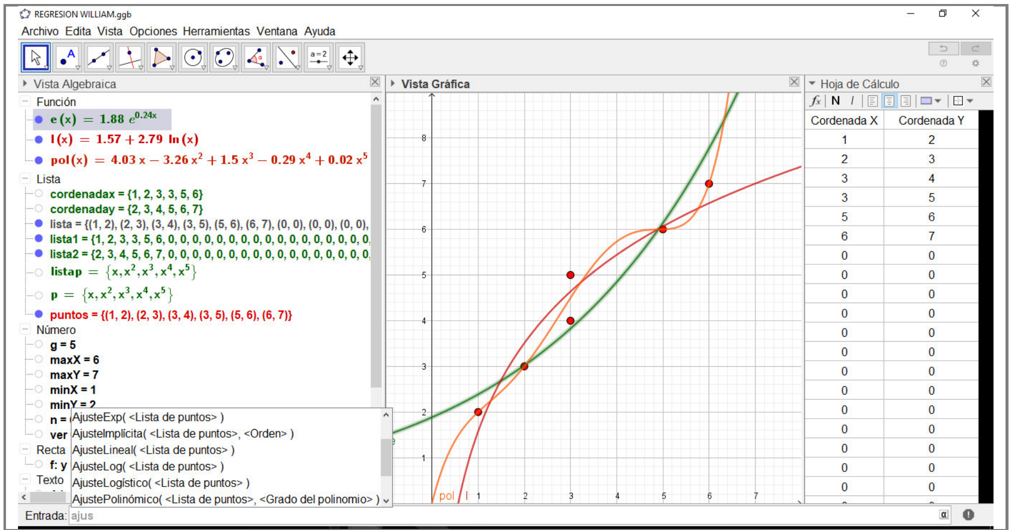

**Imagen 5.** Distintas regresiones del mismo conjunto de puntos

**Fuente.** Creación propia



3. Finalmente, se programa la visualización de la regresión que haya escogido el usuario, por medio de casillas de entrada y botones (Imagen 6).

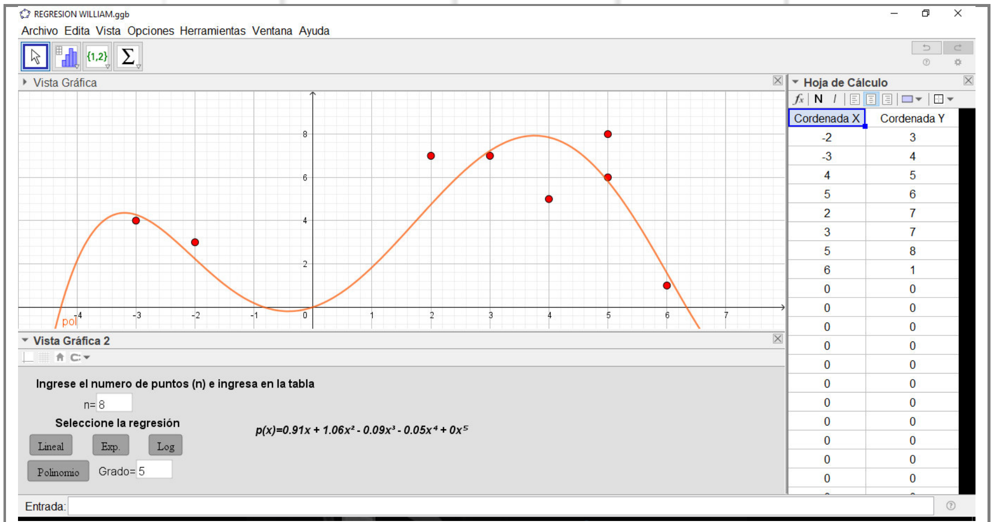

**Imagen 6.** Interfaz del aplicativo

**Fuente.** Creación propia

## CONCLUSIONES

El diseño de este tipo de aplicativos, usando GeoGebra, permite la apropiación y aprendizaje detallado de los conocimientos matemáticos involucrados, en quien realiza la programación, puesto que en su elaboración es necesario un estudio detallado del concepto a programar y un bagaje matemático amplio que no necesariamente se obtiene cuando la persona se limita a usar un algoritmo presentado.

Se invita a toda la comunidad académica a conocer, utilizar e involucrar el software de geometría dinámica GeoGebra en su quehacer educativo, reconociendo que aunque el uso de la tecnología en el aula no es la solución a todos los problemas de la enseñanza, su implementación si permite al estudiante realizar otro tipo de exploraciones que difícilmente se logran con tecnologías tradicionales como el lápiz y el papel.

## REFERENCIAS

Carranza, M. Á. (2011). *Exploración del impacto producido por la integración de un ambiente de geometría dinámica GeoGebra en la enseñanza de los cursos de matemáticas básicas de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia sede Palmira*. (Tesis de Maestría). Palmira: Universidad Nacional de Colombia.

Del Pino, J. (2013). El uso de GeoGebra como herrmienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.* (pp. 243-250). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España.

Douvoba, A., & Guillén, F. (2007). *Un curso de cálculo numérico: Interpolación, Aproximación, Integración y resolución de problemas diferenciales.* Sevilla: Universidad de Sevilla.

Gea, M. M., Contreras, J. M., Batanero, C., & López-Martín, M. (2015). Estadística bidimensional y tecnología en los textos de Bachillerato de Ciencias Sociales. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 555). Alicante: SEIEM.

Inzunza, S., & Ward, S. (2015). Explorando el razonamiento covariacional mediante un ambiente computacional en un curso introductorio de estadística. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX.* (pp. 317 - 325). Alicante: SEIEM.

Jiménez, W. (2018). Categorización de aplicaciones para la enseñanza de las matemáticas escolares: el caso de GeoGebra. *Ciclo de conferencias en Educación Matemática de Gemad.* Bogotá D.C.

Montgomery, D. (2006). *Introducción al análisis de regresión lineal.* México: Compañía Editorial Continental.