# ANÁLISIS DE UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA DE LA NOCIÓN DE LÍMITE FUNCIONAL CON HERRAMIENTAS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Ángel Contreras de la Fuente, Manuel García Armenteros, Carmen Sánchez Gómez
Universidad de Jaén

***Resumen***

*Se aplican algunas nociones teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Contreras, Font, 2006) al análisis de una experiencia de enseñanza del concepto de límite funcional con estudiantes de bachillerato. Los procesos de enseñanza – aprendizaje se modelizan en este marco teórico como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional) con sus respectivas trayectorias y estados potenciales. En este trabajo centramos la atención en la dimensión epistémica mostrando algunos conflictos semióticos y limitaciones en el significado institucional implementado.*

***Abstract***

*In this paper some theoretical notions of the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction (Godino, Contreras, Font, 2006) are applied to analyse a teaching experience of the functional limit to secondary school students. In this theoretical framework the teaching and learning processes are described as a multidimensional stochastic process compose by six sub-processes (epistemic, teaching, learning, mediational, cognitive and emotional), and their trajectories and potential states. In this paper we focus our attention in the epistemic dimension showing some semiotic conflicts and limitations in the institutional implemented meaning.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones sobre el límite de un función son numerosas en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, como lo muestran los trabajos realizados a nivel internacional y nacional. Desde marcos teóricos diferentes, se han realizado memorias de doctorado sobre la enseñanza-aprendizaje del límite de una función en los niveles pre y universitarios. En nuestro país, por ejemplo, Sánchez (1997) lo estudió desde la perspectiva de la teoría de los obstáculos epistemológicos; Espinoza (1998) aplicó la teoría antropológica de lo didáctico; Blázquez (1999) utilizó el método de la epistemología genética. Recientemente, en otros países, investigadores como Szydlik (2000), Williams (2001), Schneider (2001), Mamona-Downs (2001), Mell (2003) y Przenioslo (2004) han utilizado el APOS u otras teorías psicológicas en el estudio del límite.

Por otra parte, la investigación en Didáctica de las Matemáticas relativa a los procesos de instrucción matemática es una temática que últimamente está tomando un interés creciente. Así nos lo confirman, por ejemplo, artículos como los de Leutenegger (2000) –sobre el método clínico aplicado a la observación del aula–, Sensevy, Mercier y Schubauer-Leoni (2000) –donde se describe el trabajo de regulación llevado a cabo por un profesor en el aula– y Hache (2001) –un método de descripción de las tareas y actividades de la clase–. En trabajos recientes sobre el enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento matemático (Godino, Contreras y Font, 2006) se han introducido diversas nociones teóricas orientadas al análisis de procesos de instrucción matemática, las cuales apoyadas en el modelo epistemológico y cognitivo que caracteriza a dicho enfoque.(Godino, 2002) permite describir y explicar algunos fenómenos relativos a los significados institucionales implementados en dichos procesos.

Esta Comunicación se propone entrar en la problemática descrita, aportando datos pertenecientes a una memoria de tesis en elaboración acerca del proceso de instrucción correspondiente a la enseñanza del límite de una función en estudiantes de primero de Bachillerato. Primeramente, se hace un breve introducción al marco conceptual; posteriormente, se describe la trayectoria epistémica del proceso de estudio correspondiente mediante la cual se caracteriza el significado efectivamente implementado. Por último, se extraen algunas conclusiones acerca de las limitaciones de dicho significado, así como la presencia de algunos conflictos semióticos potenciales.

Concretamente, los objetivos de la Comunicación son: Describir la metodología de la puesta en práctica del significado institucional implementado en cuanto a la trayectoria epistémica; desarrollar la trayectoria epistémica correspondiente a una clase de matemáticas de primero de bachillerato; detectar los conflictos semióticos presentes en dicho proceso de estudio. Estos objetivos forman parte del objetivo siguiente de la tesis: Caracterización del significado institucional implementado para un proceso de instrucción matemático en la institución primero de bachillerato.

## 2. MARCO CONCEPTUAL

### *2.1. El significado institucional implementado*

Dentro de los significados institucionales, la realidad del aula, esto es, las interacciones del profesor con los estudiantes y entre éstos, conducen a aquél a seleccionar determinadas prácticas, introducir otras nuevas, abordar conceptos relacionados, etc. Es decir, interesa definir el *significado institucional implementado* como el sistema de prácticas, operativas y discursivas, que tienen lugar realmente en el aula de matemáticas, las cuales se constituyen en la referencia para el estudio de los alumnos y la evaluación de sus aprendizajes (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006).

### *2.2. Los procesos de instrucción matemática*

La aleatoriedad de todo proceso de instrucción conduce a que, por mucho que se planifique, siempre aparecen elementos no previstos que alteran las trayectorias, sobre todo debido a la adaptación a la realidad escolar que todo profesor ha de hacer. Solamente, observando el desarrollo instruccional es posible describir las trayectorias muestrales empíricas. A continuación, se desarrolla la primera de las trayectorias muestrales citadas (epistémica), basándose en los datos aportados por la observación en el aula de una lección sobre el límite de un función en primero de bachillerato.

## 3. TRAYECTORIA EPISTÉMICA

El EOS distingue seis categorías de entidades primarias como constituyentes de los sistemas de prácticas: lenguaje, situaciones, acciones, conceptos, proposiciones y argumentos. La trayectoria epistémica es la distribución en el tiempo de estos componentes en un proceso de estudio. Distinguiremos en ella, por tanto, seis estados posibles, según el tipo de entidad que se estudia en cada momento.

E1: *Situacional*: se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas.

E2: *Actuativo*: se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas.

E3: *Lingüístico*: se introducen notaciones, representaciones gráficas, etc.

E4: *Conceptual*: se formulan o interpretan definiciones de los objetos puestos en juego.

E5: *Proposicional*: se enuncian e interpretan propiedades.

E6: *Argumentativo*: se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

Estos estados se suceden a lo largo del proceso instruccional relativo a un tema o contenido matemático.

El análisis de la trayectoria epistémica de un proceso instruccional permitirá caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad onto-semiótica. Para analizarla, su desarrollo o crónica será dividido en unidades de análisis de acuerdo a las distintas situaciones-problemas (o tareas) que se van proponiendo. Llamaremos *configuración epistémica* al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación-problema[1]. Se trata, por tanto, de un segmento de la trayectoria epistémica. El análisis epistémico será la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. Dentro de cada configuración se definen unidades de análisis más elementales según los estados de la trayectoria, que llamamos *unidades epistémicas*. Las distintas oraciones que componen la crónica de un proceso de estudio son numeradas correlativamente para su referencia y las denominamos *unidades naturales* de análisis.

En la tabla 1 se muestra la trayectoria epistémica de una parte del proceso de estudio sobre el "Límite de funciones" (Anexo).

**Tabla 1**

| Unidad Natural | Configuración Epistémica (tiempo) | Unidad epistémica | Descripción | Estado |
|---|---|---|---|---|
| 1-2 | CE1 (23.10) | 1 | Idea intuitiva de límite en el infinito, por medio de tablas de valores o a partir de gráficas | E1: Situacional |
| 3 | | 2 | Introducción de la notación de límites en el infinito | E3: Lingüístico |
| 4 | | 3 | Cálculo en mas infinito y menos infinito | E2: Actuativo |
| 5 | | 4 | Dicta un ejemplo | E1: Situacional |
| 6-15 | | 5 | Resolución en más infinito | E2: Actuativo |
| 16-19 | | 6 | Resolución en menos infinito | E2: Actuativo |
| 20 | | 7 | Planteamiento del cálculo del vértice de una parábola | E1: Situacional |
| 21-23 | | 8 | Resolución del vértice de la parábola | E2: Actuativo |
| 24 | | 9 | Plantea la curvatura de la parábola | E1: Situacional |
| 25 | | 10 | Resolución de la curvatura | E2: Actuativo |
| 26-31 | | 11 | Relación entre cálculo del límite y gráfica de la función | E2: Actuativo |
| 32 | CE2 (3.15) | 12 | Planteamiento de cálculo de límites a partir de la gráfica | E1: Situacional |
| 33-36 | | 13 | Resolución | E2: Actuativo |
| 37 | CE3 (7.22) | 14 | Planteamiento del cálculo de límites en más infinito a partir de la fórmula | E1: Situacional |
| 38-46 | | 15 | Resolución | E2: Actuativo |
| 47 | | 16 | Definición intuitiva de límite | E3: Lingüística |

[1] Si bien el origen de la configuración será una situación-problema, en algunas circunstancias puede ser más operativo tomar en consideración otro de los estados potenciales de la trayectoria para delimitar la configuración epistémica.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | E5: Proposicional |
| 48 | | 17 | Planteamiento del cálculo de límites en menos infinito a partir de la fórmula | E1: Situacional |
| 49-50 | | 18 | Resolución | E2: Actuativo |
| 51 | | 19 | Planteamiento de coincidencia de límites | E1: Situacional |
| 52 | | 20 | Resolución mediante contraejemplo | E2: Actuativo |
| 53 | CE4 (2.35) | 21 | Dictado de un ejercicio | E1: Situacional |
| 54-55 | | 22 | Resolución | E2: Actuativo |
| 56-59 | CE5 (3.05) | 23 | Propuesta de ejercicios | E1: Situacional |
| 60 | CE6 (3.48) | 24 | Comentario de resolución | E1: Situacional |
| 61-64 | | 25 | Definiciones de límite en un punto y límites laterales | E4: Conceptual |
| 65-66 | CE7 (1.34) | 26 | Propuesta de ejemplo de límites laterales | E1: Situacional |

De las siete configuraciones epistémicas identificadas se comentan las dos primeras.

*Configuración epistémica 1.*

El proceso de estudio se inicia con un estado "situacional" en el que se plantean el objeto matemático límite de un función en el infinito. Por medio de un ejemplo de función, cuadrática, se realiza un planteamiento intuitivo para la resolución de los límites en más infinito y menos infinito.

Se utilizan en el discurso tres tipos de lenguajes: analítico, numérico y gráfico, buscando la emergencia del concepto límite de una función en el infinito. Asimismo, se calcula el vértice de la parábola y su curvatura. Las acciones seguidas han sido las siguientes: del lenguaje analítico, al numérico y de éste al gráfico.

Para el éxito de la tarea, el tipo de actividad matemática requerida en el ejemplo, basándose en el conocimiento escolar de gráficas de funciones, es el recuerdo e interpretación de la gráfica de una función, con el fin de analizar el comportamiento de la misma según valores de x y su *tendencia* a los infinitos.

La realización de la tarea requiere una acción de modelización, lo que implica establecer una correspondencia entre dos sistemas de prácticas: el ligado a la interpretación gráfica de unas funciones y el correspondiente al objeto límite de función como resultado del comportamiento gráfico de las mismas. Es decir, se trata de una función semiótica de tipo epistémico, donde la expresión sería el planteamiento gráfico y el contenido sería el objeto límite de función.

*Configuración epistémica 2.*

En esta configuración la situación planteada corresponde al paso del lenguaje gráfico al analítico. Sin embargo, se está presuponiendo que el estudiante realiza intuitivamente este paso de modo natural cuando es muy posible que los estudiantes interpreten erróneamente dicho paso. Aparecen aquí dos conflictos semióticos potenciales al eludirse dos funciones semióticas, la primera la que nos lleva desde la expresión: gráfica de la función hasta el contenido (conjunto de valores que toma la misma, por medio de una tabla de valores); la segunda la que nos conduce desde la expresión: lenguaje numérico al contenido (lenguaje analítico).

El paso del lenguaje gráfico al analítico directamente elude el lenguaje numérico, lo cual conduce al conflicto semiótico de no saber el tipo de valores que se han de dar. Expresiones del tipo *sube mucho* (unidad 34) y *baja mucho* (unidad 35) pueden llevar al estudiante a creer que cualquier conjunto de valores de la variable dependiente es válido, dejando sin aclarar lo que significa valores tan grandes o tan pequeños como queramos. Desde esta perspectiva, en esta parte del discurso de la clase se está produciendo el conflicto semiótico correspondiente a la ausencia de las dos funciones semióticas citadas anteriormente.

## 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha utilizado una de las recientes ampliaciones del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS) en cuanto a la identificación de fenómenos didácticos en un proceso de instrucción matemática, concretado en una clase de primero de bachillerato sobre el límite. El proceso ha sido abordado detectando conflictos semióticos, producto de la ausencia de ciertas funciones semióticas (entre los lenguajes gráfico, numérico y analítico).

El análisis que se ha realizado, basándose en el ejemplo de límite de funciones ha permitido mostrar que la determinación de los significados institucionales finalmente implementados en una clase de matemáticas (que describimos aquí como una secuencia de configuraciones epistémicas) es el resultado de complejas interacciones entre el saber, el profesor y los alumnos. Es evidente que los significados personales de los estudiantes estarán condicionados por los significados institucionales implementados en la clase. Reconocer las limitaciones de dichos significados y los conflictos semióticos potenciales de la interacción didáctica es una condición necesaria para mejorar la idoneidad epistémica y cognitiva (Godino, Contreras y Font, 2006) de los procesos de estudio matemático.

En esta Comunicación se aporta una metodología de análisis nueva, respecto a los trabajos sobre el límite de una función citados en la bibliografía, del proceso de estudio de una clase real. Se tienen en cuenta las interacciones profesor-estudiantes, utilizando un modelo epistemológico y cognitivo para la educación matemática, el cual permite detectar fenómenos didácticos, en términos de complejidad ontosemiótica implicada en los procesos de estudio de contenidos matemáticos específicos, tales como la ausencia de ciertas funciones semióticas que conducen a conflictos semióticos potenciales.

**Reconocimientos**:
Trabajo realizado en el marco del Proyecto de Investigación MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC. Ministerio de Ciencia y Tecnología. Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica.

## REFERENCIAS

BLÁZQUEZ, M.S. (1999), *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales,* Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid.

ESPINOZA, L. (1998), *Organizaciones Matemáticas y Didácticas en torno al objeto límite de funciones*. Tesis Doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

GODINO, J.D. (2002), Un enfoque semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactiques en Mathematiques,* Vol. 22, nº 22, pp. 237-284.

GODINO, J. D., CONTRERAS, A., Y FONT, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 26 (1) (en prensa).

HACHE, CH. (2001), L'univers mathématique proposé para le professeur en classe, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 21/1.2, pp. 81-98.

LEUTENEGER, F. (2000), Construction d'une clinique pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 20/2, pp. 209-250.

MAMONA-DOWNS, J. (2001), Letting the intuitive bear on formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence, *Educational Studies in Mathematics*, 48, pp. 259-288.

MEEL, D. (2003), Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comprensión de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE, *RELIME*, Vol. 6, nº 3, pp. 221-271.

PRZENIOSLO, M. (2004), Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university, *Educational Studies in Mathematics*, 55, pp. 103-132.

SCHNEIDER, M. (2001), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques. A propos d'un enseignement des limits au secondaire. *Recherches en didactiques des mathématiques*. Vol. 21, nº 1.2, pp. 7-56.

SÁNCHEZ, C. (1997), *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

SENSEVY, G. ; MERCIER, A. y SCHUBAUER-LEONI, M.L. (2000), Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 20/3, pp. 263-304.

SZYDLIK, J.E. (2000), Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 31. Nº 3, pp. 258-276.

WILLIANS, S.R. (2001), Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 32, Nº 4, pp. 341-367.

**ANEXO**

Se incluye una selección de episodios de una de las clases observadas sobre la enseñanza de la noción de límite funcional en un curso de Bachillerato.

<u>Unidad de análisis1: Idea intuitiva de límite de función.</u>

1. Profesor: Vamos al tema 9, es el 2º, buscar pág. 202, es nuestro tema (da igual el número que pongáis)

El título se lo cambiamos. No el del libro. Límite de funciones. Continuidad. Desde la pág. 203 hasta la pág. 218 incluida nos habla de sucesiones y límites de sucesiones. Ya lo vimos el año pasado (sólo las progresiones) nos centraremos en límites de funciones. No vamos a ver límites de sucesiones.
Entonces empezaremos por ....., deberíamos saber lo de esas páginas.
Veremos alguna idea de límite de sucesiones pero no calcularemos límites de sucesiones.
Hay que traer siempre el libro.
2. Profesor: Empezamos la 1ª pregunta: "Idea intuitiva de límite a través de tablas de valores o a partir de gráficas de funciones"
Como es la primera vez que veis límites voy a daros una idea de lo que es esto. Es una cosa nueva.
Vamos a calcular límites que luego no vamos a usar (con tablas) sí preguntaré con gráficas.
A partir de la gráfica lo entenderéis mejor.
Hoy será extraño que lo entendáis, dentro de tres días sí.
3. Profesor: Dicta la pregunta. Como primer apartado 1.1 Límites en el infinito. A partir de ahora vamos a calcular (escribe en la pizarra) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y dice:
Lim se lee “límite”; una flecha se lee “tiende a”; y todo “límite de f(x) cuando x tiende a más infinito (o cuando x tiende a menos infinito)”.

4. Profesor: Esta expresión $x \to +\infty$ es la primera vez que la vemos. Le damos valores 100, 1000, 10000, .... y vamos a avanzar a la derecha de x con valores cada vez más grandes (hace la tabla de valores para una f(x) genérica). Y cuando $x \to -\infty$ le damos valores –100, -1000, -10000, ... (cada vez más pequeños) y dice: ¿Qué ocurre con las imágenes de f(x) cuando $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$?

5. Profesor: Dicta el ejemplo 1. Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ...
6. Alumno: pregunta cómo hacerlo.
7. Profesor: "yo lo dicto pero vosotros escribís $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$" y escribe en la pizarra
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, *f(x)* = $x^2+3$, y hace la tabla de valores en vertical y dice: nosotros ponemos

| x | f(x) |
|---|---|
| | |

Y los libros para ahorrar espacio ponen

| | |
|---|---|
| x | |
| f(x) | |

8. Profesor: Y ahora vamos a darle valores grandes a la x: 10 (es todavía pequeño), 100, y dice a los alumnos "no creo que necesitéis calculadora".

9. Alumno (Alumno 1): da los primeros valores de f(x)
10. Alumna (Alumna 2): da los otros valores de f(x)

11. Profesor: si no lo veis claro le damos más valores a la tabla.
¿Estamos viendo qué le ocurre a las imágenes?
¿Se acercan a algo?

12. Alumnos (en grupo): que tienden a infinito

13. Profesor: ¿Aceptamos que esos valores tienden a más infinito?

14. Alumnos (en grupo): sí

15. Profesor: hemos calculado por 1ª vez un límite y este límite vale más infinito.
16. También se pedía $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ pero lo vamos a calcular en otra tabla dando valores cada vez más pequeños pero negativos –10, -100, -1000, -10000, -100000, ...

17. El profesor pregunta los valores de f(x) y los alumnos en grupo contestan simultáneamente dando todos los valores de la tabla, y el profesor los va escribiendo. Cuando completa la tabla dice: Por primera vez hemos calculado a través de una tabla $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y el resultado es…
18. Alumnos (en grupo): más infinito.
19. Profesor: mirar a la pizarra, y escribe $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
20. ¿Podéis calcular el vértice de $f(x) = x^2 + 3$?

21. Alumno (Alumno 1): no se puede.

22. Profesor: ¿no se puede? Conocéis una fórmula, el vértice es V(0,3) ¿sí o no?

23. Alumnos (en grupo): sí

24. Profesor: ¿es cóncava o convexa?

25. Alumna (Alumna 2): es convexa

26. Alumno: (Alumno 3) sigue diciendo las imágenes de –1, -2, -3, y otro alumno (Teófilo) da (-1,4)

27. Profesor: mejor que peor tenemos el dibujo de la función, escribe $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y dice: trato de deciros gráficamente lo de antes.
¿aparte de escribir me estáis oyendo?

28. Alumnos: sí

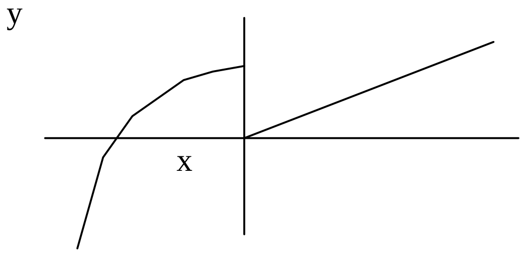
29. Profesor: en la gráfica la función se va hacia arriba sin límite porque no está acotada superiormente. ¿Cuál es una cota inferior?

30. Alumno (Alumno 4): (0,3)

31. Profesor: pido un número no un punto, el 3, el 2, el 2,8, ...., pero a lo que íbamos: ¿Qué ocurre a la función si x tiende a valores cada vez más grandes? ¿Cuál es el recorrido? ¿Cuál es el tope de esta función? La función se va hacia arriba.

Unidad de análisis 2: Límites de una función conocida su gráfica.

32. Profesor: Otro ejercicio. Os voy a pedir lo siguiente: Calcula (una alumna pregunta ¿lo copiamos?) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ siendo f(x) la función cuya gráfica se acompaña, dibuja




y dice: ahí tenéis el dibujo, copiarlo;
33. Profesor: Ahora voy a ver si lo entendéis, calcularlo, si tardáis más de lo que yo espero (un tiempo prudente) lo diré yo.
34. Profesor: Hay que ver qué hace la función cuando x va hacia la derecha, vemos que sube mucho, luego $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
35. Profesor: Como ahora miramos la x a la izquierda, vemos que f baja mucho, luego $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
36. Profesor: Necesito que gráficamente sepáis calcular límites.