TRES PROBLEMAS CLÁSICOS DE PROBABILIDAD CONTEMPORÁNEOS

Tulia Esther, Rivera Flórez
trivera@uis.edu.co
Universidad Industrial de Santander (Colombia)
María Paula, Martínez Ravelo
pfmr09@hotmail.com
Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Asunto: Estadística y probabilidad como disciplinas
Temática: Probabilidad

RESUMEN

Los problemas clásicos de probabilidad siguen estando vigentes en el siglo XXI. Vistos cronológicamente, esta colección de enunciados permiten establecer los hitos históricos que han marcado el desarrollo de la teoría de probabilidad, desde las sociedades del siglo XVI hasta nuestros días. Aunque la colección denominada como problemas clásicos suele estar conformada por cerca de 20 enunciados formulados entre 1564 y 1975, una revisión bibliográfica permitió complementar dicho listado con problemas formulados o que han sido resueltos posterior a estas fechas. En este trabajo se presentan tres de estos problemas: El coleccionista de cupones, La paradoja de Parrondo y Las malas compañías, además de describirlos se presentan elementos claves de sus solución analítica o simulada.

PALABRAS CLAVE

Problemas clásicos de probabilidad, Didáctica de la probabilidad, Simulación de problemas de probabilidad.

INTRODUCCIÓN

Los problemas clásicos de probabilidad suscitan un efecto interesante en el resolutor, al menos así lo hemos comprobado en nuestra experiencia personal a nivel de educación superior. Su éxito como recurso didáctico podría radicar en que en su solución se mezclan factores como su complejidad teórica, un contexto histórico y en algunos de ellos su carácter contraintuitivo. Bajo la denominación de problemas clásicos de probabilidad se ubica una colección de cerca de 20 problemas que han sido formulados a través de un período de la historia (1564-1975), los más conocidos son presentados cronológicamente en la siguiente línea de tiempo (Gorroochurn, 2016).

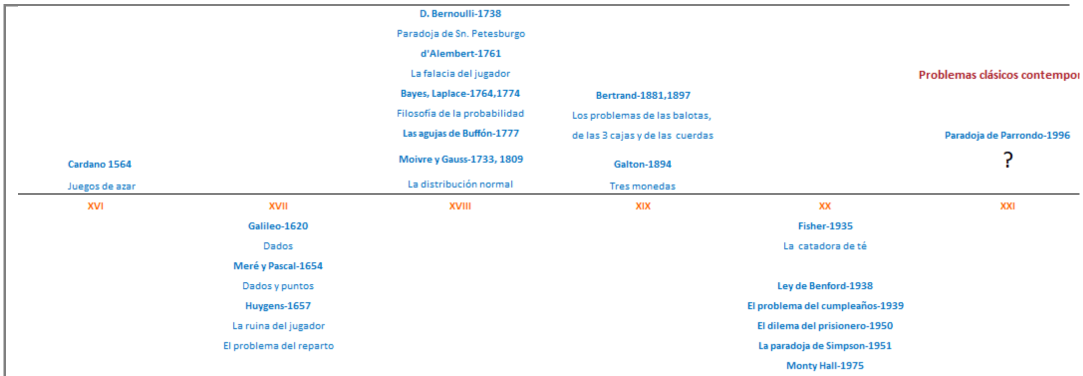

Diagrama 1. Línea de tiempo que permite ubicar la fecha (año-siglo) en que la historia registra la formulación de los problemas clásicos de probabilidad
Fuente. Creación propia

Hoy día, la solución analítica a estos problemas no es tarea complicada dado que se cuenta con diversos elementos teóricos necesarios para abordarlos en forma eficiente. La revisión bibliográfica permitió confirmar que los problemas clásicos de probabilidad cuentan con una cantidad importante de trabajos donde se aborda su solución desde una perspectiva analítica, de hecho, hacer un seguimiento a las diferentes soluciones es muy interesante pues es recorrer la historia de la teoría de probabilidad. No obstante, dadas las condiciones del momento, la incorporación de un enfoque de simulación para este tipo de problemas es incipiente según Huerta (2015 a).

De otro lado, los problemas clásicos de probabilidad han sido analizados también como recurso didáctico por parte de algunos autores entre ellos Batanero, Contreras, Díaz y Arteaga, (2011), Huerta (2015b), Batanero, Contreras y Díaz (2011), quienes orientan sus investigaciones en consolidar el conocimiento pedagógico del futuro profesor. Este trabajo propone algunos problemas de probabilidad que catalogamos de modernos o contemporáneos y muestra la solución analítica o experimental con el fin de seguir incentivando su estudio y resaltar las posibilidades que cada uno de estos enunciados ofrece a los profesores de probabilidad.

MARCO DE REFERENCIA

La solución de problemas de probabilidad ha sido ampliamente investigado desde diferentes perspectivas, en nuestro caso tomamos a Cerdán y Huerta (2007) citados por Huerta (2015) quienes postulan dos categorías en cuanto a tipos de problemas en probabilidad, la primera considera el tipo de datos y la relación entre ellos, allí ubican a los problemas ternarios de probabilidad condicional, de otro lado según la actitud del resolutor definen tres categorías:

a) Problemas resolubles por asignación: asigna probabilidades a partir de la información disponible y responde la pregunta.

b) Problemas resolubles por cálculo de probabilidades: parte de las probabilidades conocidas para hallar las desconocidas, utiliza relaciones de tipo aditivo y multiplicativo.
c) Problemas resolubles por simulación: debido a que no se cuenta con un modelo teórico casi siempre porque los cálculos involucrados son complejos o porque no se tiene experiencia para interactuar con ese tipo de situación.

También, se advierte sobre la posibilidad de que los problemas de probabilidad se puedan resolver de diferentes maneras acorde al nivel de interpretación, experiencia y formación en el tema.

Resolución de problemas de probabilidad vía simulación

El término hace referencia a la solución de un enunciado sin usar una deducción basada en teoría de probabilidad sino aquella que se observa por remplazar el experimento aleatorio en estudio por otro equivalente, probabilísticamente hablando, en el cual el resultado a cada realización del experimento equivalente se halla mediante el uso de un generador de números aleatorios que sigue la distribución de probabilidades de los resultados del experimento en estudio; por ejemplo, el estudio usual del género para un grupo de recién nacidos puede abordarse vía simulación a través del lanzamiento sucesivo de una moneda balanceada donde cara puede asociarse con el resultado femenino y sello para el complemento, o podría usarse un dado balanceado y asociar la mitad de sus resultados con femenino y el resto a masculino.

En cuanto a la enseñanza de la resolución de problemas de probabilidad vía simulación, Huerta (2015c) menciona dos metodologías, la primera, formulada por Shaughnessy (1983) y la otra es la de Bryan (1986). Particularmente nos identificamos más con la primera cuyo objetivo es que los estudiantes transiten desde la conjetura al modelo pasando por la experimentación y la simulación, proceso que involucra los siguientes pasos:

1. Modelar el experimento con elementos para los cuales las probabilidades son conocidas: monedas, dados, pirinolas, generador de números aleatorios, etc.
2. Repetir el experimento un número suficiente de veces.
3. Recolectar, organizar y analizar los datos
4. Calcular probabilidades u otros resultados experimentales (Ejemplo: las frecuencias).
5. Concluir a la luz de los resultados experimentales.

Finalmente llama la atención que Huertas (2015) denomina a estos métodos como de lápiz y papel y es entendible dado que su formulación no hace mención explícita a la necesidad de contar con software para implementar las simulaciones. Consideramos que este enfoque manual puede funcionar en los primeros niveles del sistema escolar pero resultaría inadmisible no incluir tecnología en etapas posteriores.

DESARROLLO DEL TEMA

Aspectos metodológicos

Los resultados a mostrar fueron recolectados a través de una revisión bibliográfica que incluyó tanto textos escritos, como páginas web. La consulta tuvo como propósito ampliar la colección de problemas clásicos de probabilidad, más allá del famoso problema de Monty Hall (1975). Aunque no hay un listado consolidado, nosotros hemos seleccionado dos ampliamente referenciados (El coleccionista de cupones y la Paradoja de Parrondo) y un tercero que representa una clase de problemas más modernos basados en casos judiciales reales.

Desarrollo de la propuesta

A continuación presentamos tres problemas de probabilidad que han sido formulados recientemente o que dado el interés que suscitan aún siguen siendo estudiados.

Coleccionista de cupones

La versión original y más común del problema está planteada en términos de coleccionar cupones, sin embargo utilizaremos aquí la figura de premio. Suponga que hay uno de seis premios en cada caja de su cereal favorito. Si usted compra de a una caja a la vez, ¿cuántas cajas de cereal se espera sean necesarias para tener la colección completa de premios?

Solución analítica

Un primer camino podría ser definir la variable aleatoria *Y*: # de cajas que se deben comprar hasta tener la colección completa, la cual asume valores *y=6, 7, 8,*…. De esta forma la deducción de la distribución de probabilidad para *Y* supondría hallar:

P(Y=6) = P(Se obtiene la colección completa y no hay ningún premio repetido)
P(Y=7) = P(Se obtiene la colección completa pero hay un premio repetido)
P(Y=8) = p(Se obtiene la colección completa pero hay uno o dos premios repetidos)
:
:

El cálculo de probabilidades podría hacerse adoptando un enfoque de problemas de ocupación y utilizando un modelo multinomial de la siguiente manera:

$$P(Y=7) = (el\ premio\ repetido\ es\ el\ primero\ o\ el\ premio\ repetido\ es\ el\ segundo\ o\ ....premio\ repetido\ es\ el\ sexto) = \frac{7!}{2!1!1!1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^7 + \frac{7!}{1!2!1!1!1!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^7 + \cdots + \frac{7!}{1!1!1!1!1!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^7$$

La estrategia conduce a encontrarse con sumas que cada vez tienen más términos, pues se deben considerar las diferentes variantes en cuanto a premio repetido, de esta forma se hace difícil encontrar una expresión general en términos de la variable Y y el número de premios repetidos. Por lo anterior basaremos nuestra solución en el planteamiento de Mostellar citado por Wilkins (1999), solución que nos atrevemos a catalogar como la más sencilla. El punto de partida es concebir el experimento como una secuencia de etapas o partes y usar la distribución geométrica en cada una de ellas de la siguiente forma:

Sean P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 y P_6 los premios de la colección, y N_i el número esperado de cajas para tener un premio diferente en la i-ésima compra.

Parte I:

Dadas las condiciones del experimento, en la primera compra siempre se obtiene un premio, es decir que $N_1 = \frac{6}{6}$.

Parte II:

Supongamos que en la primera compra se obtuvo uno de los premios podría ser el P_3 (el subíndice no tiene nada que ver podría ser cualquier otro), nos preguntamos cuántas cajas de cereal habrá que comprar para conseguir un premio diferente, que también podría ser cualquiera, usemos en este caso P_1, es decir que estamos pensando en los resultados:

$$P_3P_1 \; P_3P_3P_1 \; P_3P_3P_3\, P_1 \ldots \; P_3P_3P_3 \ldots P_3P_1$$

Definamos la variable, N_2: # de cajas que hay que comprar para obtener un premio diferente al primer premio obtenido. Es evidente que bajo las condiciones del problema, N_1 puede asumirse como variable geométrica con parámetro $p=5/6$ y entonces se tiene que su valor esperado es: $E[N_2] = \frac{1}{5/6} = \frac{6}{5}$

Parte III

Partiendo ahora de que ya se tienen dos premios diferentes, P_3 y P_1, nos preguntamos cuántas cajas de cereal habrá que comprar para conseguir un premio diferente a los dos que ya se tienen, el nuevo premio podría ser P_5, es decir que los resultados a considerar ahora serían:

$$P_3 \; P_1\mathbf{P_5} \qquad P_3 \; P_1P_1\mathbf{P_5} \qquad P_3 \; P_1P_1P_1\,\mathbf{P_5} \; \ldots \; P_3 \; P_1P_1P_1 \ldots P_1\mathbf{P_5}$$

Definamos ahora la variable, N_3: # de cajas que hay que comprar para obtener un premio diferente al segundo premio obtenido. Nuevamente consideramos a N_3 como variable geométrica pero ahora con parámetro $p=4/6$, su valor esperado es:

$$E[N_3] = \frac{1}{4/6} = \frac{6}{4}$$

Lo anterior muestra que la solución al problema estaría dada por la expresión:

E[# De cajas que hay comprar para tener la colección completa] $= N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = \frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14.7$

Se debe aclarar que aunque el origen del problema data de 1708, el reto de resolverlo no ha perdido vigencia y en las diferentes soluciones dadas se han ido incorporando los elementos teóricos del momento, entre las más recientes el uso de la teoría de valores extremos de una distribución (Holst, 2001;), la convergencia a una Poisson (Moriarty & Neal, 2008) y el uso de cadenas de Markov (Ferrante & Saltalamacchia, 2014).

Solución vía simulación

La solución requiere solo de un generador de números aleatorios que siga un modelo uniforme entre 1 y el número de premios de la colección, en este caso 6. En Excel, la función ALEATORIO.ENTRE (1;6) permite simular la compra de cajas hasta tener la colección completa con sólo repetir esta instrucción hasta que se tengan todos los premios, así en la primera simulación (Imagen 1), tras comprar 17 cajas se obtuvieron los premios 6, 1, 5, 3, 2, 4, es decir, se completó la colección.

B3 =ALEATORIO.ENTRE(1;6)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1																				
2	No. Simulación						Premio obtenido en cada compra													No. Cajas compradas
3	1	6	1	6	5	3	6	5	1	2	5	5	6	3	1	5	6	4		17
4	2	5	1	1	5	5	4	2	3	1	3	6								11
5	3	6	3	3	5	4	6	1	1	6	4	3	5	3	5	4	2			16
6	4	1	3	6	2	1	1	5	5	5	1	5	4							12
7	5	1	2	6	2	2	5	6	3	4										9
8	6	1	4	2	5	4	1	4	1	3	3	6								11
9	7	5	3	6	4	4	3	1	4	5	1	6	4	3	3	3	6	2		17
10	8	5	5	2	1	2	2	1	2	1	6	1	2	6	4	3				15
11	9	1	1	6	3	4	3	2	3	1	5									10
12	10	2	2	2	4	2	1	6	5	4	2	3								11
13																			Suma	129
14																			Promedio	12,9
15																				
16																				

Imagen 1. Solución vía simulación en Excel, al problema del coleccionista de cupones.
En cada línea aparece en rojo cada premio diferente obtenido y los espacios en blanco indican que el experimento terminó dado que ya se obtuvo la colección completa
Fuente. Creación propia

Después de hacer varias simulaciones se calcula el número de cajas compradas en cada una de estas y luego se promedia dividiendo entre el número de simulaciones realizadas. El ejemplo a continuación, muestra que tras hacer 10 simulaciones concluiríamos que en promedio, 13 cajas de cereal deben ser compradas para tener la colección completa.

Obviamente 10 no es el número ideal de repeticiones del experimento para lograr ver la aproximación al valor esperado teórico.

La paradoja de Parrondo: Perder+Perder=Ganar

Parrondo (2014) propone considere dos juegos en los cuales se juega contra la banca, sean estos A y B cuyo funcionamiento es como se muestra en la Imagen 2, cada vez que lanzamos una moneda desbalanceada y cae cara, ganamos. En el Imagen 3 se describe el comportamiento de la ganancia media de los dos juegos tanto para realizaciones independientes de los juegos (A corresponde a la línea verde y B a la línea roja), la estrategia aleatoria (línea azul claro) o el uso de rachas combinadas (línea amarilla oscuro) que representa a la secuencia AAABB. De los resultados obtenidos vía simulación estadística se observa que jugar usando las estrategias A y B por separado es una pésima decisión, pero usar una estrategia combinada, es decir alternarlas, conduce a observar una alta ganancia.

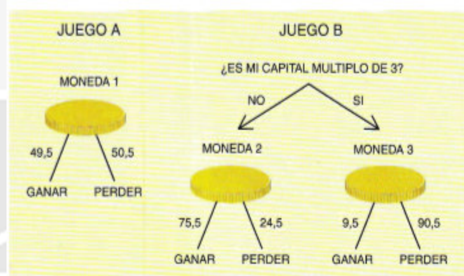

Imagen 2. Descripción de los dos juegos base de la paradoja
Fuente. http://nadaesgratis.es/anxo-sanchez/ganar-perdiendo-la-paradoja-de-parrondo-y-sus-aplicaciones

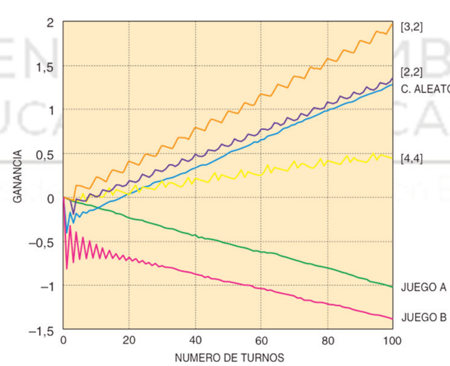

Imagen 3. Resultados vía simulación para la ganancia media obtenida al usar diferentes estrategias, en este caso [3,2] indica que se jugó AAABB
Fuente. http://nadaesgratis.es/anxo-sanchez/ganar-perdiendo-la-paradoja-de-parrondo-y-sus-aplicaciones

La idea de estudiar el efecto de combinar dos estrategias perdedoras nació de la simple curiosidad del autor, no obstante cuenta hoy con varias aplicaciones en el sector financiero y en biología para el estudio de bacterias y virus.

Las malas compañías

El pueblo contra Collins.

> En 1964 una mujer mayor, que caminaba de regreso a su casa por la zona de San Pedro en Los Ángeles, fue asaltada por detrás por una joven rubia con cola de caballo que le robó el bolso. La joven salió huyendo y fue vista poco después subiendo a un coche amarillo conducido por un hombre negro con barba y bigote. Las investigaciones de la policía condujeron a la detención como sospechosa de una tal Janet Collins, que era rubia, peinaba cola de caballo y se le relacionaba con un varón negro con barba y bigote, que era poseedor de un coche amarillo (Corberán & Montes, 2000, p.207).

El problema plantea cómo cada una de las partes involucradas en un juicio utilizó estamentos probabilísticos para favorecer su posición en relación con la culpabilidad de la sospechosa capturada.

Posición del fiscal:

Dado que no tenía evidencias físicas ni testigos confiables en contra de la sospechosa, éste presentó al juicio la Tabla 1 y a partir de ella él cálculo un estamento probabilístico así:

Asumiendo independencia:

$$P(AA \cap HB \cap MCC \cap MR \cap VNB \cap PIC) = p = 1/12.000.000$$

Ante este pequeño valor concluyó que ante la baja posibilidad de encontrar una pareja que cumpliera con todas las características, el tener una de esas parejas capturadas implica que ellos son culpables.

Característica/Notación	Probabilidad
Automóvil amarillo (AA)	1/10
Varón con bigote (HB)	1/4
Mujer con cola de caballo (MCC)	1/10
Mujer rubia (MR)	1/3
Varón negro con barba (VNB)	1/10
Pareja interracial en coche (PIC)	1/1000

Tabla 1. Incidencia en la ciudad de los Ángeles de las características de los sospechosos
Fuente. No se referencia la fuente de los datos.

Posición del abogado defensor de la pareja capturada:

La apelación presentada ante la corte de California afirmaba que el razonamiento probabilístico utilizado en el juicio era incorrecto y engañosos, por ello se procedió a usar los datos de la Tabla 1 con miras a cimentar una duda razonable sobre la culpabilidad de sus clientes:

Se asume que en la localidad hay *n* parejas y entre estas la probabilidad de que una pareja comparta todas las características que los inculpan es p=1/12.000.000. A partir de esta información definió unos eventos y calculó otras probabilidades como se indica:

A = {Entre las n parejas existen al menos dos con iguales características}
B = {Entre las n parejas existe al menos una con iguales características}
C = {Una sola pareja posee las características}
D = {Entre las n parejas no existe ninguna con iguales características}

Como $A \subset B$, $P(A \cap B) \leq P(A)$, y así el cociente que compara las probabilidades de ocurrencia de A y B quedaría expresado como:

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B)$$

Esta última expresión, será la evidencia clave para la defensa ya que en este contexto, ésta representa la probabilidad de que existan al menos dos parejas con iguales características dado que hay una, los inculpados.

Luego, el cálculo de $P(D) = (1\text{-}p)^n$, de ahí se halla la probabilidad del complemento,

$$P(B) = 1 - P(D) = 1 - (1\text{-}P)^n$$

Luego, para hallar P(A) utiliza el hecho que $B = A \cup C$ y en consecuencia

$$P(A) = P(B) - P(C)$$

de donde despeja y halla que $P(C\,) = p(1\text{-}p)^n\,\text{-}1$ pero según el experimento, cualquiera de las n parejas podría ser, entonces:

$$P(C\,) = n\,[p\,(1\text{-}p)^n\,\text{-}1]$$

Finalmente halla las probabilidades

$$P(A) = P(B) - P(C) = 1 - (1\text{-}P)^n - n[p\,(1\text{-}p)^n\,\text{-}1]$$

y tabula P(A|B) para diferentes valores de n:

n	P(A|B)
1.000.000	0.040
2.000.000	0.078
5.000.000	0.187
10.000.000	0.347

Tabla 2. Cálculo de la probabilidad que haya otra pareja con las características dado que ya se tiene capturada una de estas según diferentes tamaños de población. **Fuente.** http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=257

El defensor terminó mostrando cómo entre más población haya habrán más parejas y así la probabilidad de que hubiese otra pareja con las características similares a Janet Collins y su amigo también aumenta (Tabla 2). De esta forma, el abogado defensor consiguió su objetivo y la pareja salió libre tras haber sustentado la base de una duda razonable.

De esta forma se muestra cómo la evidencia estadística es considerada en un juicio, es este uno de los escenarios de donde pueden salir los problemas clásicos de probabilidad de estos tiempos. Cabe advertir que de la implementación mostrada surgen varios interrogantes relacionados con la confiabilidad de los datos utilizados, por citar dos casos, ¿Cómo se hallaron los valores de probabilidad de la Tabla 1, en especial los que no parecen tener un registro oficial, ejemplo probabilidad de observar un varón con bigote?, de otro lado revisando el histórico de población encontramos que para 1965 se pronosticaba una población de 7.048.000 habitantes para la ciudad de Los Ángeles, surge entonces la duda, ¿cómo estimar *n*, es decir cuántas parejas heterosexuales podrían haber en ese momento en esta ciudad?, Montes (2003) discute además los supuestos de independencia asumidos entre llevar barba y bigote y una posible distracción del jurado ante la forma en que el fiscal presentó la información.

CONCLUSIONES

Los problemas clásicos de probabilidad siguen siendo una herramienta importante a la hora de enseñar probabilidad. Para los más antiguos, su solución hoy día es trivial pero en los demás casos, resolverlos sigue siendo todo un reto. Dentro de la categoría que proponemos, es decir problemas clásicos contemporáneos se pueden ubicar varios problemas que han sido formulados recientemente o siendo antiguos se siguen planteando soluciones a la luz de la teoría de probabilidad moderna. De otro lado en relación con el uso de la simulación para resolver problemas de probabilidad, la sencillez en la implementación contrasta con la complejidad de las soluciones analíticas, su escasa utilización sorprende, pues en cualquier que sea el enfoque del curso que se imparte, controvertir las intuiciones iniciales e irse aproximando a una respuesta conforme se aumenta el número de simulaciones debe explotarse como recurso didáctico. Finalmente, la alternativa analítica es importante porque requiere explorar dentro de los elementos teóricos en probabilidad disponibles, a diferencia de los problemas de libro de texto, en los problemas clásicos la estrategia no se limita a usar los valores dados en la ecuación apropiada, incluso en los más modernos hay múltiples abordajes con diversos niveles de sofisticación pero igualmente válidos.

REFERENCIAS

Batanero, C., Contreras, J., Díaz, C., & Arteaga, P. (2011) Paradojas en la historia de la probabilidad como recurso didáctico. En P. Lestón, (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 939-949). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de http://www.ugr.es/~jmcontreras/thales/1/TalleresPDF/TallerParadojas.pdf

Batanero, C., Contreras, M., & Díaz, C. (2011). Experiencias y sugerencias para la formación probabilística de los profesores. *Paradigma*, 32(2). Recuperado de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Paradigmanuevo.pdf.

Corberán, A., & Montes, M. (2000). Perversiones y trampas de la probabilidad. *La Gaceta de la Real Sociedad de la Matemática Española*. *3(2)*, 198-229. Recuperado de http://gaceta.rsme.es/vernumero.php?id=28.

Ferrante, M., & Saltalamacchia, M. (2014). The coupon collector's problem. *MATerials MATemátics*. *2,* 1-35. Departamento de Matemáticas Universidad de Barcelona. Recuperado de http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2014/v2014n02.pdf

Gorroochurn, P. (2016). Classic problems of probability. New Jersey, USA: Jhon Wiley & Sons.

Holst, L. (2001). Extreme value distributions for random coupon collector and birthday problems. *Extreme,* 4(2), 129-145. Royal Institute of Technology. Stockholm, Sweden. Recuperado de https://doi.org/10.1023/A:1013921125928.

Huerta, P. (2015a). La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación. *Actas de las segunda jornadas virtuales de didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria*, 2, (pp. 52-68). Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España. Recuperado de http://bdigital.ipg.pt/dspace/bitstream/10314/2357/1/Jos%C3%A9Alexandre1.pdf

Huerta, P. (2015b). La resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 105-119). Alicante: SEIEM.

Huerta, M. (2015). La manera de resolver problemas de probabilidad por simulación. Segundas Jornadas virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Recuperado de http://www.estadis.net/3/actas/PON/04.%20La%20manera%20de%20resolver%20problemas%20de%20probabilidad%20por%20simulación.pdf.

Montes, F. (2003). Ley y probabilidad. Las Matemáticas y sus aplicaciones en el mundo económico y social. Conferencia en UIMP, Santander. Recuperado de https://www.uv.es/montes/mat_omni/UIMP2003.pdf

Moriarty, J., & Neal, P. (2008). The generalized coupon collector problem. *Applied Probability Trust, 45*, 621–629. Universidad de Manchester. Recuperado de http://www.maths.manchester.ac.uk/~goran/research-reports/psrr09-2008.pdf

Parrondo, J. M. (29 diciembre, 2014). Ganar perdiendo: la paradoja de Parrondo y sus aplicaciones [Mensaje en un blog]. Nada es gratis. Recuperado de http://nadaesgratis.es/anxo-sanchez/ganar-perdiendo-la-paradoja-de-parrondo-y-sus-aplicaciones.

Wilkins, J. L. M. (1999). Cereal box problem revisited. School Science and Mathematics, *99*(3), 193-195. Recuperado de http://mste.illinois.edu/reese/cereal/res/cerealWilkins.pdf.