

DESARROLLANDO PENSAMIENTO COMBINATORIO Y PENSAMIENTO ALGORÍTMICO EN EL AULA DE CLASE

Tulia Esther, Rivera

trivera@uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Yazmin, Cote Contreras

rubi.yas@hotmail.com

Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Shirley Johana, Toloza Peña

johanatolozaaah@hotmail.com

Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Asunto: Uso de recursos didácticos o tecnológicos

Temática: Combinatoria

RESUMEN

El trabajo describe tres recursos para la enseñanza de técnicas de conteo que se pueden concebir como novedosos dado que se salen del formato tradicional de los recursos propuestos en libros de texto. El análisis realizado desde nuestra perspectiva como futuros profesores de matemáticas permite recomendar su uso ya que encontramos que no sólo apoyan el desarrollo del razonamiento combinatorio sino también la incorporación del pensamiento algorítmico que agrupa habilidades como: especificar y delimitar un problema, sistemáticamente considerar todos los casos posibles, identificar la secuencia de acciones que implementadas recursivamente determinan el algoritmo solución, incorporar las técnicas de conteo para generalizar y comunicar la solución usando un lenguaje apropiado.

432

PALABRAS CLAVES

Pensamiento combinatorio, Pensamiento algorítmico, Didáctica de la probabilidad.

INTRODUCCIÓN

Desde su origen, la probabilidad ha estado ligada al juego. Así, la primera referencia que se encuentra sobre Teoría de probabilidad se remonta a 1654 cuando el Caballero de Meré se intriga por estudiar la ocurrencia del doble seis al lanzar 24 veces un par de dados, preocupación que le transfiere a Pascal. Desde entonces, los temas de probabilidad han estado ligados a este tipo de contextos, por esto no es sorprendente hallazgos como los de Batanero (2000) quien encontró que la mayoría de las aplicaciones mostradas en el

estudio de la probabilidad se refieren al campo de los juegos de azar. Pero más allá de ser coherentes con su origen histórico, el uso de los juegos de azar para enseñar temas de probabilidad se explica por las posibilidades que ofrecen para abordar desde una actividad concreta, ideas claves bajo un ambiente lúdico que resulta altamente motivador para los estudiantes de todas las edades, incluyendo el nivel superior.

No obstante, la principal razón del estudio de la probabilidad es que la inmensa mayoría de fenómenos de nuestro entorno son de tipo aleatorio y sin excepción deberíamos estar preparados para interactuar con ellos. Para lograrlo, los juegos de azar se han constituido en el laboratorio ideal donde entrenamos a nuestros estudiantes para luego si abordar el análisis de situaciones reales. En este sentido, por ejemplo siguen siendo los juegos de azar el recurso que nos permiten ejemplificar de manera sencilla, condiciones difíciles de validar en nuestro entorno como la simetría que supone la equiprobabilidad.

De otro lado, en el sistema escolar colombiano la preparación para hacer cálculo de probabilidades se inicia desde el primer conjunto de grados de básica primaria (1° a 3°) para los cuales se sugiere iniciar el estudio de eventos cotidianos desde un enfoque probabilístico, pero medidos en una escala cualitativa; más adelante se retoma en 8°-9° grado, etapa donde se hace explícita la actividad de cálculo de probabilidades para eventos simples usando diferentes recursos como listados, diagramas de árbol y técnicas de conteo.

Con el interés de cualificar la enseñanza de las ideas básicas en probabilidad proponemos tres actividades no tradicionales que pueden ser utilizadas para introducir las técnicas de conteo y su aplicación en un proceso de toma de decisiones al jugar.

MARCO DE REFERENCIA

Pensamiento probabilístico

En la literatura es más común encontrar trabajos que dan cuenta de la importancia del pensamiento o razonamiento probabilístico y de sus sesgos que de una caracterización del mismo. En este sentido, León y Gualteros (2016) citan a Landín y Sánchez (2010) y Sánchez y Valdez (2013) como autores que han avanzado en el tema y han propuesto una clasificación con cuatro niveles para caracterizar las formas de razonamiento, ilustrando su uso en dos escenarios particulares como son, la distribución binomial y el uso de los tres enfoques de probabilidad. También se encuentran trabajos que abordan otros casos particulares como es el razonamiento probabilístico condicional. En cuanto a la investigación sobre razonamiento probabilístico general, Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares (1998) indican que éste ha sido tema de investigación entre los psicólogos

quienes han intentado describir y explicar las diferencias a la hora de tomar decisiones bajo ambientes de incertidumbre, en personas con o sin formación en temas de probabilidad, para ello utilizan enfoques de la teoría cognitiva y procesamiento de la información.

La relevancia de desarrollar pensamiento probabilístico se ubica en gran medida en superar el efecto que las intuiciones ejercen en esta forma de razonamiento. Por ejemplo, Hernández, Yumi y Silva (2010) afirman que la importancia de la enseñanza de la probabilidad y el desarrollo del razonamiento probabilístico se explican por la necesidad que tenemos de enfrentar el azar en la vida cotidiana y mejorar las intuiciones de los estudiantes, su investigación les permitió concluir sobre el uso de juegos para crear conciencia en los participantes de la necesidad de ir más allá de la observación y la intuición a la hora de interactuar con probabilidad. También, Serrano, et al. (1998) investigaron la presencia de razonamientos incorrectos en probabilidad, ocupándose de los tres que a su juicio son los más importantes: la heurística de la representatividad, el sesgo de equiprobabilidad y el enfoque en el resultado aislado, particularmente es en este último caso cuando se menciona la ausencia de pensamiento combinatorio como causa de este error.

Pensamiento combinatorio

En matemáticas discreta, combinatoria se refiere al conjunto de técnicas para estudiar los posibles arreglos o subconjuntos seleccionados a partir de un conjunto dado que satisfacen ciertos criterios de tipo y de tamaño. Aunque en el sistema escolar estos temas están en relación exclusiva con la clase de probabilidad en la cual se abordan las fórmulas de combinación y permutación, progresivamente tendrán más aplicación en otras áreas dentro y fuera de las matemáticas.

Cuando se habla de pensamiento combinatorio, este puede ser considerado como una dimensión del pensamiento probabilístico y a este respecto, Piaget y Inhelder (1951) citados por Navarro, Batanero, Godino (1996), afirman que si el sujeto no posee capacidad combinatoria, no es capaz de usar la idea de probabilidad salvo en casos de experimentos aleatorios elementales.

Pensamiento algorítmico

La matemática discreta es una rama de las matemáticas que tiene como objeto de estudio las estructuras matemáticas no continuas, su estudio incluye temas de lógica, teoría de conjuntos, combinatoria, probabilidad, teoría de gráficas y en los últimos años se han incluido los algoritmos computacionales. En su forma más simple, un algoritmo hace referencia a un conjunto de instrucciones que indican el paso a paso para resolver un problema iterativamente. No obstante, en ciencias de la computación el concepto ha

evolucionado y además de hacer cálculos hoy día se incluye el procesamiento de datos y el razonamiento automático.

De otro lado, los investigadores en enseñanza de matemáticas discretas han introducido el término pensamiento computacional para referirse a las habilidades que debe poseer un científico de la computación (Liu & Wang, 2010), y como una dimensión de éste, ubican el pensamiento algorítmico; en particular, Futschek (2006) caracteriza este pensamiento por el uso de habilidades como: construir y entender algoritmos, analizar problemas, especificar un problema en forma precisa, identificar las acciones básicas que son adecuadas ante un problema dado, pensar en todos los casos posibles tanto normales como especiales para un problema dado, mejorar la eficiencia de un algoritmo y construir nuevos algoritmos que resuelvan un problema ojalá en forma creativa.

Sin lugar a dudas, un ciudadano de este siglo debe poseer todas estas habilidades como parte de su cultura, no en vano la sociedad del siglo XXI empieza a vislumbrar el impacto que tendrá la inteligencia artificial en las próximas décadas y en el entorno académico internacional, vemos una tendencia a optar por programas en ciencias de los datos que integran elementos de estadística y computación.

DESARROLLO DEL TEMA

Aspectos metodológicos

Este trabajo se fundamenta en la revisión del material bibliográfico para enseñar temas de probabilidad, disponible en nuestro entorno de práctica como estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. La actividad se realizó en el marco del curso de Didáctica de la Probabilidad e incluyó dos etapas, la primera etapa fue de revisión del material utilizado y la segunda de búsqueda de nuevos recursos de enseñanza en el sentido que éstos se apartarán de los contextos típicos usados en los libros de texto.

La primera revisión nos llevó a la misma conclusión de Serradó, Azcárate y Cardeñoso (2006) acerca de los libros de texto y materiales curriculares que son usados como soporte para el profesor, éstos son insuficientes y en algunos la visión de los conceptos es parcial, por ejemplo, en nuestro medio se limitan al enfoque clásico de probabilidad y actividades tradicionales con monedas, dados, ruletas, balotas o cartas.

Desarrollo de la propuesta

A continuación, se describen tres recursos que proponemos para ser utilizados en el abordaje de varias ideas básicas en probabilidad, sin embargo, aquí nos enfocamos en su uso en relación con las técnicas de conteo.

Recurso 1. Rompecabezas de aritmética verbal

Descripción del juego

Este juego consiste en asignar valores a las letras para hacer que la suma sea correcta (Imagen 1).

$ \begin{array}{r} \text{FOUR} \\ + \text{FIVE} \\ \hline \text{NINE} \end{array} $
Imagen 1. Cryptarithm
Fuente. Pleacher (2018). Recuperado de https://www.pleacher.com/mp/puzzles/mathpuz/cryp8.html

Análisis de posibilidades didácticas

En la búsqueda de la solución deben surgir ideas claves como:

- La restricción entre los valores de R y O teniendo en cuenta los sumandos y la suma debajo de ellos.
- El carácter impar de N.
- Sabiendo que N es un número impar se debe analizar la paridad de U y V.
- Una vez se hallan los valores sujetos a restricciones, se deben considerar las permutaciones entre los números restantes.
- La solución esperada al problema es que puedan concluir que hay 72 variaciones, pero de estas sólo 36 son resultados diferentes pues los demás sólo difieren en las permutaciones entre U y V.
- Como se puede observar llegar a esta solución general no solo requiere del uso de permutaciones, se requiere vincular algunas propiedades de los números enteros.


Se sugiere acompañar la actividad incluyendo preguntas como ¿Cuál es la estrategia para tener éxito con este tipo de problemas, por dónde empezar?, ¿La solución a este tipo de problemas es única?, ¿Podemos hacer que este problema tenga solución única?

Recurso 2. CLUE - ¿Quién es el culpable?

Descripción del juego

Este es un juego de mesa poco popular en nuestro país Colombia, aunque se encuentra disponible en el mercado. El objetivo del juego es encontrar al culpable del asesinato del dueño de la mansión en la que concurrían 6 invitados quienes parecen tener alguna motivación para cometer el crimen. El ganador será aquel jugador que acierte el nombre del asesino, el lugar y el arma utilizada. La base del juego son 29 cartas tal como se presentan en la Imagen 2.

El juego inicia escogiendo al azar una carta de cada tipo, excepto dentro de la categoría de pistas, las tres se guardan dentro de un sobre y esta será la respuesta al misterio. Luego las demás cartas son repartidas entre los jugadores quienes irán avanzando por un tablero según sea el puntaje sacado al lanzar un dado, en el dado, una de sus caras es la que posibilita pedir una pista. Hay algunas reglas que acompañan el juego que omitiremos pues no influyen en el análisis estadístico a mostrar.

	<p>¿Cuáles son las tres mejores primeras pistas</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Pistas</th> <th>Nº de casos</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Si me salen un sospechoso, un arma y un lugar</td> <td>200</td> </tr> <tr> <td>Si me salen tres sospechosos</td> <td>162</td> </tr> <tr> <td>Si me salen tres armas</td> <td>162</td> </tr> <tr> <td>Si me salen tres lugares</td> <td>216</td> </tr> <tr> <td>Si me salen un sospechoso y dos armas</td> <td>180</td> </tr> </tbody> </table>	Pistas	Nº de casos	Si me salen un sospechoso, un arma y un lugar	200	Si me salen tres sospechosos	162	Si me salen tres armas	162	Si me salen tres lugares	216	Si me salen un sospechoso y dos armas	180
Pistas	Nº de casos												
Si me salen un sospechoso, un arma y un lugar	200												
Si me salen tres sospechosos	162												
Si me salen tres armas	162												
Si me salen tres lugares	216												
Si me salen un sospechoso y dos armas	180												
<p>Imagen 2. Cartas del juego CLUE en su versión comercial, el acertijo se arma a partir de considerar 6 sospechosos, 6 armas y 9 lugares Fuente. Creación propia</p>	<p>Imagen 3. Ejemplo de análisis que se espera haga el jugador para lograr reducir el espacio muestral del problema y avanzar en la solución al misterio Fuente. Creación propia</p>												

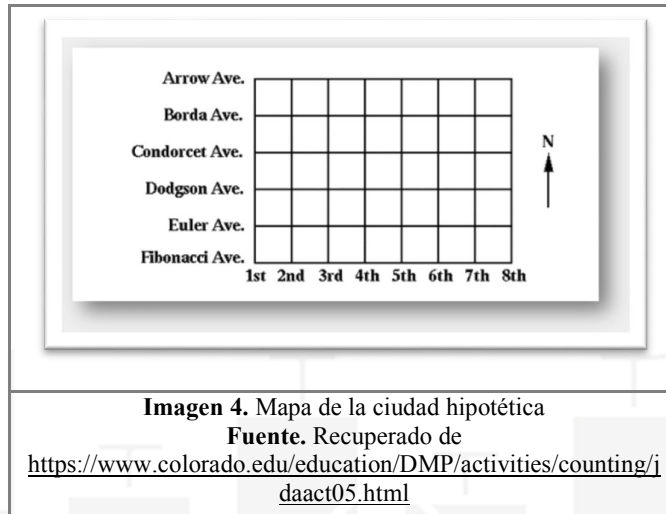
Análisis de posibilidades didácticas

El juego permite ilustrar además del concepto de espacio muestral, todas las reglas de conteo básico: regla del producto, combinaciones y permutaciones, adicional a que permite abordar un contexto de toma de decisiones a fin de adoptar una estrategia de juego, dadas las cartas que el azar le haya otorgado. Se sugiere acompañar la actividad con preguntas tales como ¿Cuántas soluciones hay para el misterio que propone el juego?, ¿Qué características tiene la mejor terna posible asignada a un jugador? (Imagen 3), Dada una terna en particular, ejemplo 2 nombres y un lugar, en el momento que pueda pedir una pista, ¿Cuál sería la pregunta más adecuada?

Recurso 3: *Getting there from here*

Descripción del problema

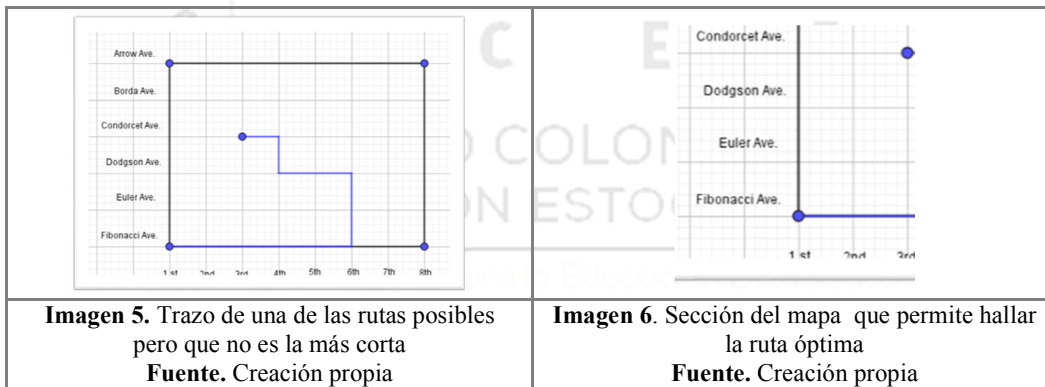
Este recurso hace parte del proyecto en Matemáticas Discreta de la Universidad de Colorado desarrollado por un grupo de educadores matemáticos que se reunió con el objetivo de integrar nuevos elementos a la enseñanza de la matemática escolar. La Imagen 4 presenta el mapa de una ciudad hipotética en la cual se define el siguiente problema, “Un mensajero de bicicletas tiene que ir de una esquina a otra de una ciudad. Si el mensajero toma la ruta más corta y viaja sólo por las calles, ¿Cuántas rutas diferentes puede tomar el mensajero para ir de un lugar a otro?”.



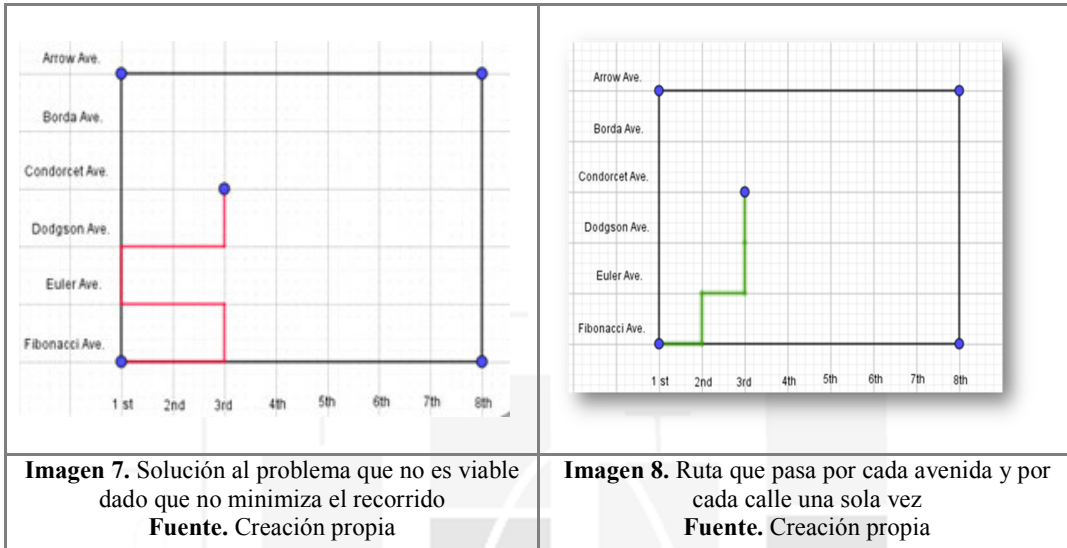
Análisis de posibilidades didácticas

Las ideas claves surgen a medida que se da solución a este problema. Inicialmente se debe determinar un punto de partida y un punto de llegada, como se puede observar en el mapa (Imagen 4) las avenidas y calles han sido denotadas, entonces tomaremos el punto ubicado en la *Fibonacci Ave.* Con 1st como el punto de partida y la intersección de la *Condorcet Ave* con 3rd como el punto de llegada.

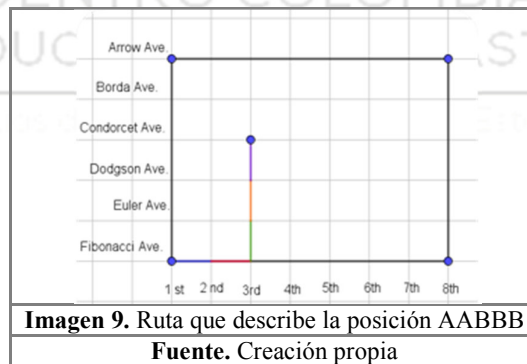
Luego de haber definido el punto de origen y el de llegada se procede a trazar las diferentes rutas que permiten llegar de un punto al otro y a determinar sus longitudes, entonces pueden darse casos como el descrito en la Imagen 5.



Tras examinar ésta y otras rutas aún más largas debe surgir la idea que las rutas más cortas se enmarcan dentro de una cuadrícula que contiene sólo 4 avenidas y 3 calles (Imagen 6). Así, el punto de análisis ahora son los posibles trayectos en la nueva cuadrícula dado que rutas como la que se muestra en Imagen 7 se deben descartar en la búsqueda de cuál o cuáles son las más cortas.



Del análisis anterior, se debe notar que las rutas ideales serán aquellas que crucen una sola vez por cada calle y una sola vez por cada avenida (Imagen 8). Se concluye que rutas con la característica anterior son las más cortas, entonces el problema se traslada a hallar cuántas rutas de este tipo se pueden trazar en esta cuadrícula. Para hacer más fácil el conteo y la presentación de la solución, es conveniente definir una notación para cada movimiento, por ejemplo, A puede representar el movimiento de una cuadra hacia la derecha, y B el movimiento de una cuadra hacia arriba, que son los únicos movimientos requeridos pues sus equivalentes en direcciones contrarias alargan la ruta. En este orden de ideas, la ruta de la Imagen 8 corresponde a la notación ABABB y la secuencia AABBB correspondería a la ruta mostrada en la Imagen 9. Finalmente, la respuesta al problema ha quedado reducida al uso de la fórmula para contar permutaciones con repetición a partir del conjunto $\{A, A, B, B, B\}$.



Como se observa, este es un recurso muy completo pues pone a prueba muchas habilidades del razonamiento matemático y permite avanzar en el pensamiento algorítmico. En este sentido, se recomienda conducir la actividad hasta llegar a la generalización de la respuesta, es decir, dados cualquier punto de partida y cualquier punto de llegada. Se sugiere la posibilidad de aumentar la complejidad del problema introduciendo variantes como restringir los movimientos que puede hacer el mensajero o colocar un parque en la zona central del mapa, pues esto hace que se reduzca el número de soluciones y podría llegarse incluso a un escenario con solución única; también podría ampliarse la cantidad de calles y avenidas para una posible generalización de la solución.

CONCLUSIONES

La búsqueda y análisis de nuevos contextos para la enseñanza de las técnicas de conteo llevó a encontrar recursos versátiles que además de potenciar el pensamiento combinatorio complementan la formación en matemáticas bajo un ambiente lúdico. De otro lado, examinar problemas propios de las matemáticas discretas develó la importancia del desarrollo de las habilidades propias del pensamiento algorítmico desde la formación en Matemáticas en básica primaria. A este respecto, admitiendo que según la organización curricular vigente este compromiso lo adquiere el profesor de Tecnología e Informática, vemos posible integrar esta área con temas de probabilidad, algebra y matemáticas en actividades como las propuestas, para así optimizar el tiempo del que se dispone.

440

En cuanto al potencial de los recursos presentados todos permiten ilustrar el uso de técnicas de conteo pero demandan un proceso previo de interpretación de un contexto, la delimitación del problema a abordar y finalizan con una actividad de generalización de la solución (*Cryptarithm* y *Getting there from here*) o el diseño de una estrategia de juego (CLUE) por esto recomendamos su utilización.

REFERENCIAS

- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15, 2-13. Recuperado de <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/BLAIX.pdf>
- Futschek, G. (2006). Algorithmic thinking: The key for understanding computer. *ISSEP*, 159-168. Recuperado de https://publik.tuwien.ac.at/files/PubDat_140308.pdf
- Hernandez, H., Yumi, V., & Silva, M. (2010). El uso de juegos para la promoción del razonamiento probabilístico. *Revista iberoamericana de educación matemática*, 24, 69-83.
- León, C. A., & Gualteros, N. A. (2016). Niveles de desarrollo del pensamiento aleatorio para la probabilidad frecuencial (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.
- Liu, J., & Wang, L. (abril, 2010). Computational thinking in discrete mathematics. *Conference in Second International Workshop on Education*

- Technology and Computer Science (ETCS)*, 1. DOI: 10.1109/ETCS.2010.200
 Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/224135803_Computational_Thinking_in_Discrete_Mathematics
- Navarro, P., Batanero, C., & Godino, J. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 8, 26-39. Recuperado de <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/RAZON.pdf>
- Pleacher, D. (2018). Mr. P's Math Page. Colorado, EU. Recuperado de <https://www.pleacher.com/mp/puzzles/mathpuz/cryp8.html>
- Serradó, A., Azcárate, P., & Cardeñoso, J. (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Tarbiya*, 38, 91-112
- Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J., & Cañizares, M. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 10, 7-25. Recuperado de <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/heurísticas.pdf>