



Una construcción alternativa de la curva de sierpinski.

Yair Román Tizapa
yr_tizapa@hotmail.com
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero,
México

Javier G. Mendieta
jg_mendieta@hotmail.com
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero,
México

Isaí Cantor Jiménez
Isaith_c@hotmail.com
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero,
México

Recibido: Mayo 24, 2017

Aceptado: Octubre 10, 2017

Resumen. Waclaw Franciszek Sierpinski, autor de más de 724 trabajos y 50 libros, introdujo en 1915 una curva continua que, como la de Koch, tiene longitud infinita y no tiene tangente en cualquiera de sus puntos, [2]; fue construida con la finalidad de dar un contraejemplo en la formalización del Cálculo [8]; tal curva se conoce, en la literatura matemática, por *Curva de Sierpinski*.

En este trabajo daremos una definición alternativa de la Curva de Sierpinski construida también mediante poligonales, determinaremos el área asociada a su interior en cada una de sus etapas y en la situación límite, y haremos ver que la curva y el triángulo de Sierpinski determinan el mismo objeto geométrico.

Palabras clave: Curva de Sierpinski, Triángulo de Sierpinski, Poligonal, Área asociada a la curva de Sierpinski.

Abstract. Waclaw Franciszek Sierpinski, author of over 724 papers and 50 books, introduced in 1915 a continuous curve, as the Koch curve, have infinite length and has no tangent at any of its points, [2]; It was built in order to give counterexamples in formalizing the calculus [8]; such curve is known in mathematical literature, for *Sierpinski Curve*.

This paper will give an alternative definition of the Sierpinski Curve also built using polygonal, determine the area associated with each of its stages and the limit situation, and we will see that the curve and the Sierpinski triangle determine the same geometric object.

KeyWords: Sierpinski curve, Sierpinski Triangle, Polygonal, Area associated to Sierpinski curve.

1.1 Introducción

Para un entendimiento óptimo en la construcción de la *Curva de Sierpinski* (también nombrada por Mandelbrot, *Curva Punta de Flecha de Sierpinski*), señalemos las propiedades esenciales de las poligonales. La teoría de las poligonales surgió como una primera aproximación a la longitud de las curvas, no obstante la teoría se ha desarrollado para dar cabida a otras ideas y aplicaciones, como en la Geometría Discreta y la Estadística. A finales del siglo XIX y principios del XX los matemáticos, como el italiano Giuseppe Peano (1858-1932), el Bohemio Bernard Bolzano (1781-1848), el alemán David Hilbert (1862-1943) y el polaco Waclaw Franciszek Sierpiński (1882-1969), entre otros, construyeron muchas poligonales con el fin de poner a prueba los conceptos del Cálculo.

Desde nuestra perspectiva, utilizaremos las ideas de la teoría de las poligonales para construir la Curva de Sierpinski mediante las siguientes definiciones.

Se entiende por *poligonal* o *curva poligonal* de n puntos $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, la unión concatenada de los segmentos $q_1q_2, q_2q_3, \dots, q_{n-1}q_n$, tal que el vértice final q_{i-1} del lado $q_{i-2}q_{i-1}$ es el vértice inicial del lado $q_{i-1}q_i$, con $i = 1, 2, \dots, n$; de manera que dos segmentos con un vértice común no pueden pertenecer a la misma recta.

Representaremos una poligonal de n puntos por: $P(q_i)_n = q_1q_2q_3\dots q_{n-1}q_n$; los segmentos que constituyen una poligonal se llaman *lados* de la poligonal, y los extremos de los lados, *vértices de la poligonal*.

Una poligonal es *cerrada* si el vértice final de su último lado coincide con el vértice inicial del primer lado, es decir, $q_1 = q_n$; de lo contrario es *abierta*. Un punto común a dos o más lados se llama *punto de ramificación*. Si un punto es común a dos lados, entonces se dice que la ramificación es de *orden uno*; si es común a tres lados, es de *orden dos*, si es común a n lados, entonces es de *orden $n - 1$* . Un punto que sólo pertenece a un lado y es un extremo se considera punto de ramificación de *orden cero*.

Si cada lado de una poligonal tiene a lo más dos puntos de ramificación de orden uno, se dice que la poligonal es *simple*. Llamamos *longitud* de la poligonal $P(q_i)_n$ a la suma de las longitudes de cada uno

de sus lados, denotada por: $L(P(q_i)_n) = \sum_{k=1}^{n-1} q_kq_{k+1}$.

1.2 Una construcción clásica de la Curva de Sierpinski

Es común construir la Curva de Sierpinski utilizando la idea del Triángulo de Sierpinski; para ello, pensemos en una *región triangular* equilátera ABC , con $AB = 1$. Llamamos a este triángulo el *iniciador* o T_0 . Luego, restemos de T_0 la región triangular abierta T_0^A formada por los puntos medios de los lados de T_0 . Así se obtiene el triángulo ABC , desprovisto de su triángulo central, que es la unión de tres regiones triangulares T_1, T_2 y T_3 , de longitud de lado $1/2$ de AB y que designamos como T_{S_1} , es decir,

$$T_{S_1} = T_0 - T_0^A = T_1 \cup T_2 \cup T_3$$

Posteriormente, de T_1 se resta la región triangular abierta T_1^A , formada por los puntos medios de los lados de T_1 , de esta manera generamos las regiones triangulares T_{11}, T_{12} , y T_{13} cuya longitud de lado es $1/4$ de T_0 . Lo mismo se hace con las regiones triangulares T_2 y T_3 ; en esa forma se obtienen las regiones triangulares $T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{31}, T_{32}$, y T_{33} . Así, se construye la región triangular T_0 desprovista de cuatro regiones triangulares abiertas, T_0^A, T_1^A, T_2^A y T_3^A . (figura 1.1). Este proceso de extracción de regiones triangulares abiertas se repite una y otra vez, es decir, ahora restamos de T_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, las regiones triangular abiertas T_{ij}^A formadas por los puntos medios de los lados de los triángulos T_{ij} . De este modo obtenemos los triángulos T_{ijk} , con $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Bajo esta perspectiva, se construye la sucesión de conjuntos cerrados $\{S_n\}$, de la siguiente forma:

$$T_{S_0} = T_0, T_{S_1} = \bigcup_{j_1=1}^3 T_{j_1}, T_{S_2} = \bigcup_{j_1, j_2=1}^3 T_{j_1 j_2}, T_{S_3} = \bigcup_{j_1, j_2, j_3=1}^3 T_{j_1 j_2 j_3}, \dots, T_{S_n} = \bigcup_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^3 T_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}.$$

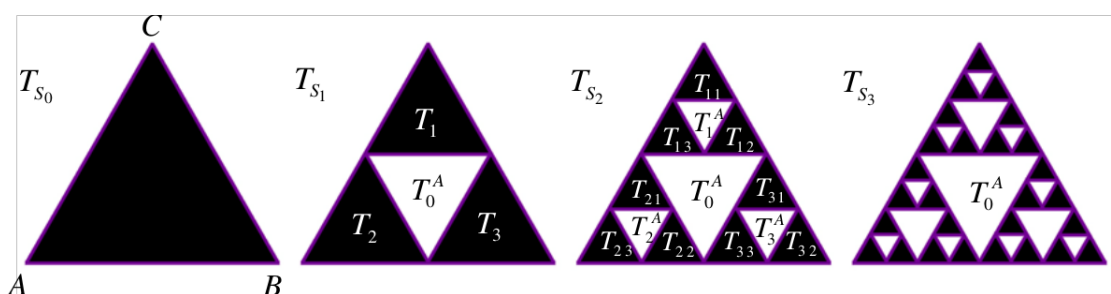


Figura 1.1: El Triángulo de Sierpinski es el límite de una sucesión de conjuntos cerrados y acotados

A los elementos de la sucesión $\{T_{S_n}\}$ se les llama *etapas n-ésimas de construcción del Triángulo de Sierpinski* o *Triángulo de Sierpinski de n-ésimo orden*. Así llegamos a la:

Definición 1.1

El *Triángulo de Sierpinski* o T_{S_∞} es:

$$T_{S_\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{k=1}^n T_{S_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^3 T_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n} \right)$$

Esta ecuación hace ver que el Triángulo de Sierpinski es un objeto geométrico, el cual es la situación límite de un proceso infinito.

Es mediante el *Triángulo de Sierpinski* que podemos construir la Curva de Sierpinski que comúnmente es presentada en los libros de Geometría Fractal. Ante todo, debemos considerar que la *Curva de Sierpinski*, en cualquiera de sus etapas de construcción, es una poligonal abierta y de longitud finita. No obstante, en el paso al límite la situación es otra, la Curva de Sierpinski deja de tener propiedades que la caracterizan como una poligonal y adquiere un comportamiento un tanto extraño, tiene longitud infinita y todos sus puntos son puntos de ramificación.

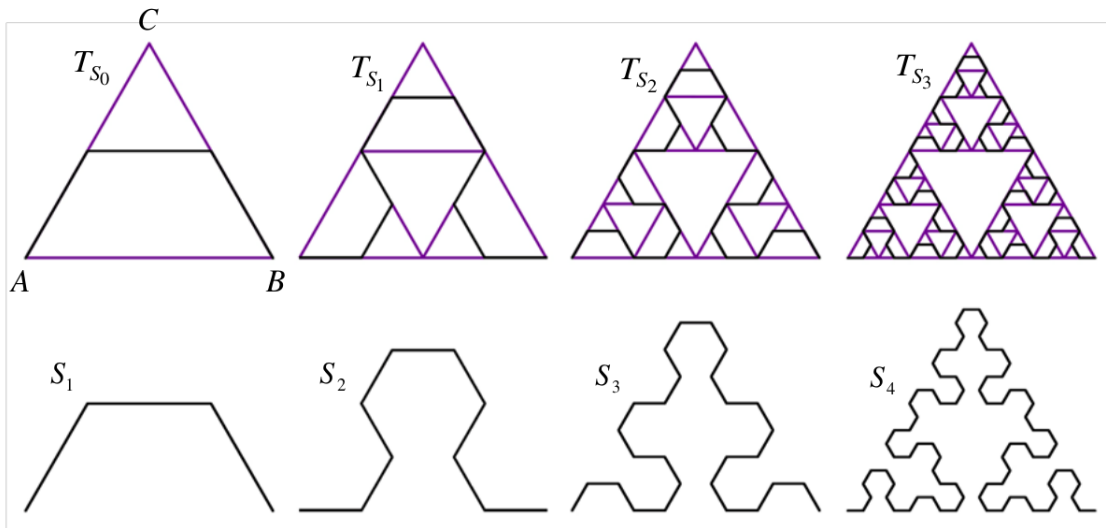


Figura 1.2: La Curva de Sierpinski como el límite de una sucesión de poligonales abiertas y simples

Bajo la perspectiva de una poligonal simple y abierta, constituida mediante giros positivos o negativos de 60 grados, que recorre un lado de todos los triángulos que constituyen las etapas de construcción del Triángulo de Sierpinski, se tiene que la curva de Sierpinski, como situación límite, es una curva sin tangentes en todos sus puntos, y de longitud infinita.

1.3 Contrucción alternativa de la Curva de Sierpinski

Ahora, para una construcción alternativa de la Curva de Sierpinski comencemos por entender qué es el interior de una poligonal abierta, lo haremos para ciertas poligonales que nos interesan específicamente en la construcción de la Curva de Sierpinski.

Definición 1.2

Una región triangular $R(\Delta(ABC))$, es la unión del $\Delta(ABC)$ con su interior; [5].

Definiremos el interior de una poligonal que cumpla con los siguientes requisitos:

- La poligonal $P(q_i)_n$ debe estar contenida en $R(\Delta(ABC))$.
- La poligonal $P(q_i)_n$ debe ser abierta.
- La poligonal $P(q_i)_n$ debe ser simple.
- El punto inicial de la poligonal $P(q_i)_n$ es el punto $A = q_1$ y su punto final es $B = q_n$.

Las poligonales que cumplen con estos cuatro puntos las llamamos poligonales triangulares de tamaño AB , que simplemente se denotará por: P_{AB}^Δ .

Definición 1.3 (Punto interior a una poligonal P_{AB}^Δ).

Diremos que un punto $w \in R(\Delta(ABC))$ es un *punto interior a la poligonal P_{AB}^Δ* , si puede ser unido mediante una poligonal simple y abierta $P(a_i)_m \subset R(\Delta(ABC))$, al segmento AB sin intersectar a la poligonal P_{AB}^Δ y $w \notin P_{AB}^\Delta$.

Definición 1.4

El *interior de la poligonal P_{AB}^Δ* es el conjunto de todos los puntos interiores a la poligonal P_{AB}^Δ , y se denota como $\text{Int}(P_{AB}^\Delta)$, (figura 1.3).

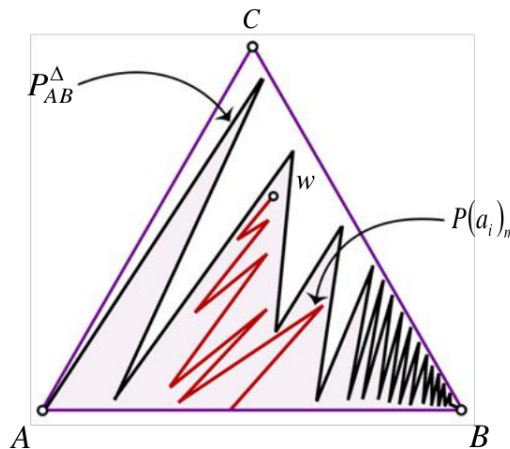


Figura 1.3: El interior de una poligonal P_{AB}^Δ

Bajo estas consideraciones, para una construcción alternativa de la Curva de Sierpinski considérese la *Región Triangular equilátera* $R(\Delta(ABC))$, con $AB = 1$, entonces, la Curva de Sierpinski es la *situación límite* de un *proceso infinito* que consiste en una sucesión, S_k , de etapas de construcción. En la primera etapa de construcción, consideramos los puntos medios q_2 y q_3 de AC y BC respectivamente. Obteniendo de esta manera la poligonal S_1 , llamada, por Mandelbrot, *Terágono*; [2]:

$$S_1 = P(q_i)_4 = q_1q_2q_3q_4 = q_1q_2 \cup q_2q_3 \cup q_3q_4,$$

en donde los puntos $A = q_1$, $B = q_4$, y $P(q_i)_4$ representa la poligonal determinada por los puntos q_1, q_2, q_3, q_4 ; (figura 1.4).

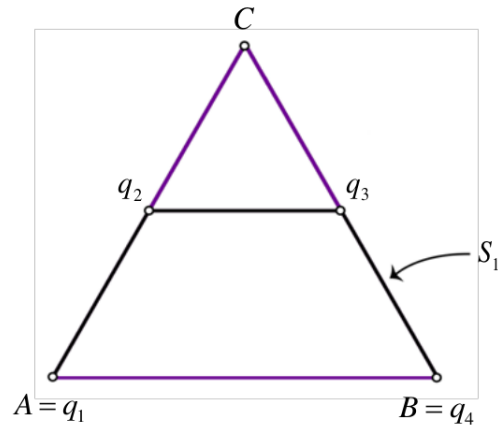


Figura 1.4: La Curva de Sierpinski en la etapa de construcción $k=1$.

Para construir la segunda etapa, S_2 , de la Curva de Sierpinski, consideramos el interior de la poligonal S_1 y sustituimos el lado q_1q_2 de la poligonal S_1 por $(1/2)S_1$, de tal manera que: $q_1 = q_{11}^2$ y $q_2 = q_{14}^2$, en donde $q_{11}^2, q_{14}^2 \in (1/2)S_1 = P(q_{1i}^2)_4$, y $P(q_{1i}^2)_4 \cap \text{Int}(S_1) \neq \emptyset$; en donde los superíndices indican el número de etapa de construcción. Luego, el lado de la poligonal q_2q_3 es sustituido por $(1/2)S_1 = P(q_{2i}^2)_4$, de manera que $q_2 = q_{21}^2$, $q_3 = q_{24}^2$, y $P(q_{2i}^2)_4 \cap \text{Int}(S_1) = \emptyset$. En forma similar q_3q_4 es sustituido por $(1/2)S_1 = P(q_{3i}^2)_4$ de modo que $q_3 = q_{31}^2$, $q_4 = q_{34}^2$ y $P(q_{3i}^2)_4 \cap \text{Int}(S_1) \neq \emptyset$.

En otras palabras, se ha sustituido cada lado del terágono de la primera etapa S_1 por terágonos semejantes y reducidos con factor de contracción $1/2$, es decir, terágonos de longitud de lado la mitad del terágono anterior, de tal forma que el primero está en el interior del terágono S_1 , el segundo en el exterior y el tercero en el interior de S_1 .

Reenumerando los puntos de construcción obtenidos tenemos que:

$$S_2 = P(q_{1i}^2)_4 \cup P(q_{2i}^2)_4 \cup P(q_{3i}^2)_4 = P(q_i)_{10}$$

cuyos lados de la poligonal tienen por longitud $1/4$, (figura 1.5).

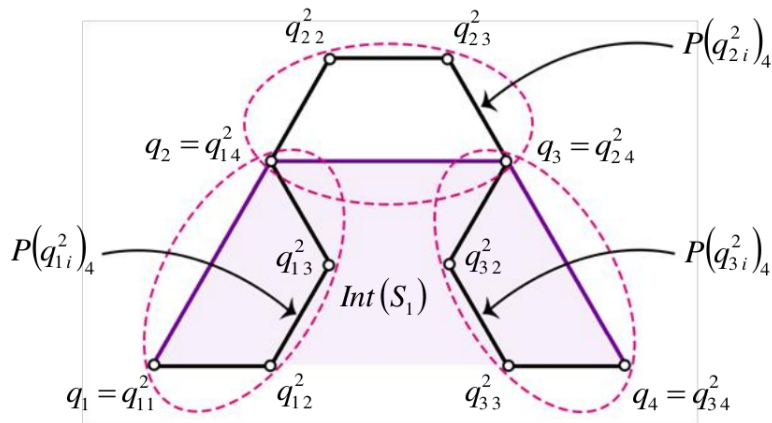


Figura 1.5: La Curva de Sierpinski en su etapa de construcción $k=2$.

Este proceso, que después se convierte en proceso infinito, hace ver que los diferentes terágono de la etapa 2, que se agregan al terágono de la etapa 1 se van alternando uno dentro, otro fuera y uno dentro de su interior; de esa forma se prevé que los terágono de la etapa k que se agregan, para sustituir los lados de la poligonal de la etapa $k - 1$ se van alternando, uno dentro, otro fuera respecto al interior de la poligonal $k - 1$, y así sucesivamente. Sin embargo, hay que considerar que en cada etapa el orden de inicio se cambia, dependiendo de su paridad.

Como se ve, la segunda etapa de construcción de la Curva de Sierpinski, está constituida por 3 terágono, que son: $P(q_{1i}^2)_4, P(q_{2i}^2)_4, P(q_{3i}^2)_4$. El primer terágono tiene un vértice en común con el segundo: $q_{14}^2 = q_{21}^2$, y el segundo tiene un vértice en común con el tercero: $q_{24}^2 = q_{31}^2$, es decir, forman una sola poligonal. No obstante, lo verdaderamente notable de esta etapa, es que el interior del primer terágono tiene intersección con el interior del terágono S_1 de la primera etapa; el segundo terágono no tiene intersección con el interior de S_1 y el tercer terágono tiene intersección con el interior de S_1 .

De manera general; S_k se obtiene al sustituir cada uno de los lados de la poligonal S_{k-1} , por $(1/2)^{k-1} S_1$, donde $S_{k-1} = P(q_j)_n$, $n = 3^{k-1} + 1$ es el número de vértices, y S_{k-1} contiene 3^{k-1} lados de longitud $(1/2)^{k-1}$, de la siguiente manera:

$$q_1 = q_{11}^k, \quad q_2 = q_{14}^k = q_{21}^k, \quad q_3 = q_{24}^k = q_{31}^k, \quad q_4 = q_{34}^k = q_{41}^k, q_5 = q_{44}^k = q_{51}^k, \\ q_6 = q_{54}^k = q_{61}^k, \quad \dots, \quad q_n = q_{n-14}^k,$$

donde $q_n \in S_{k-1}$ y $(q_{n-1i}^k)_4 \in (1/2)^{k-1} S_1 = P(q_{n-1i}^k)_4$, donde el subíndice 4 indica el número de vértices del terágono, los cuales son los puntos de construcción de S_k y cada $P(q_{n-1i}^k)_4 \subset R(\Delta(ABC))$ (figura 1.6).

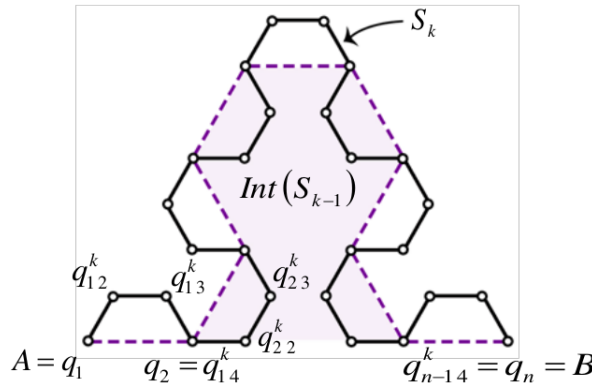


Figura 1.6: La Curva de Sierpinski para $k = 3$.

Si la etapa de construcción S_k es impar, entonces la primer poligonal, $P(q_{1i}^k)_4$, que sustituye el primer lado de S_{k-1} es de la forma: $P(q_{1i}^k)_4 \cap \text{Int}(S_{k-1}) = \emptyset$; en la segunda poligonal que sustituye el segundo lado de S_{k-1} se satisface que: $P(q_{2i}^k)_4 \cap \text{Int}(S_{k-1}) \neq \emptyset$; en la tercera que sustituye el tercer lado de S_{k-1} se tiene que $P(q_{3i}^k)_4 \cap \text{Int}(S_{k-1}) = \emptyset$, y así sucesivamente hasta llegar al $(n - 1)$ -ésimo lado de S_{k-1} que satisface la relación:

$$P(q_{n-1i}^k)_4 \cap \text{Int}(S_{k-1}) = \emptyset.$$

Es decir, en una etapa de construcción impar, cada lado de S_{k-1} es sustituido por la poligonal $P(q_{n-1i}^k)_4$, de tal modo que no debe intersectar el interior de S_{k-1} ; si dicho lado es impar. Si el lado sustituido es par, entonces la poligonal $P(q_{n-1i}^k)_4$ que sustituye el lado par debe intersectar el interior de S_{k-1} (figura 1.6).

Por el contrario, si la etapa de construcción S_k es par, entonces la primer poligonal $P(q_{1i}^k)_4$ que sustituye el primer lado de S_{k-1} tiene que: $P(q_{1i}^k)_4 \cap \text{Int}(S_{k-1}) \neq \emptyset$; en la segunda poligonal que sustituye el segundo lado de S_{k-1} se satisface que: $P(q_{2i}^k)_4 \cap \text{Int}(S_{k-1}) = \emptyset$; en la tercera que sustituye el tercer lado de S_{k-1} se tiene que: $P(q_{3i}^k)_4 \cap \text{Int}(S_{k-1}) \neq \emptyset$; y así sucesivamente hasta llegar al $(n-1)$ -ésimo lado de S_{k-1} se cumple que:

$$P(q_{n-1i}^k)_4 \cap \text{Int}(S_{k-1}) \neq \emptyset.$$

Es decir, si la etapa de construcción es par, entonces cada lado que es sustituido de S_{k-1} por la poligonal $P(q_{n-1i}^k)_4$ debe intersectar el interior de S_{k-1} , si dicho lado es impar. Si el lado sustituido es par, entonces la poligonal $P(q_{n-1i}^k)_4$ que sustituye el lado par no debe intersectar el interior de S_{k-1} (figura 1.5 y figura 1.6).

Así obtenemos S_k (figura 1.7), y reenumerando tenemos que S_k es la unión de 3^{k-1} terágonos cada uno de longitud $(1/2)^{k-1}$ de S_1 , es decir,

$$S_k = P(q_{1i}^k)_4 \cup P(q_{2i}^k)_4 \cup \dots \cup P(q_{3^{k-1}i}^k)_4 = \bigcup_{m=1}^{3^{k-1}} P(q_{mi}^k)_4 = P(q_i)_{3^{k+1}}.$$

De esta manera, obtenemos una sucesión de poligonales: $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k, \dots$. Si $k \rightarrow \infty$ entonces obtenemos la Curva de Sierpinski, definida como:

Definición 1.5

La Curva de Sierpinski es: $S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{m=1}^{3^{k-1}} P(q_{mi}^k)_4$.

La curva de Sierpinski es un caso particular de una familia de curvas que se conocen como curvas de Peano que no tienen tangente en ninguno de sus puntos, a pesar de ser continuas, y cuya longitud es infinita. Una *curva poligonal* $P(q_i)_n$ sin tangente en todos sus vértices q_i puede construirse considerando k transformaciones lineales $T_1, T_2, T_3, \dots, T_k$, de tal modo que: $(T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_k)(q_i) = q_i$, es decir, la suma de todas las transformaciones lineales resulta ser la transformación identidad $I(q_i) = q_i$. Es mediante estas transformaciones que es posible la construcción de otras nuevas transformaciones, F_j construidas mediante las sumas: $F_j = \sum_{i=0}^j T_i$, con $0 \leq j \leq k$, y $F_0 = 0$. Así, es posible la construcción de nuevas poligonales mediante las ya existentes, de tal modo que todos los vértices de la poligonal $P(q_i)_n$ pasan a ser parte de la nueva poligonal y cada uno de sus lados se sustituye por otra poligonal que se obtiene uniendo los vértices dados por la relación: $q_{im+j} = q_i + F_j(q_{i+1} - q_i)$ y $0 \leq i \leq n$.

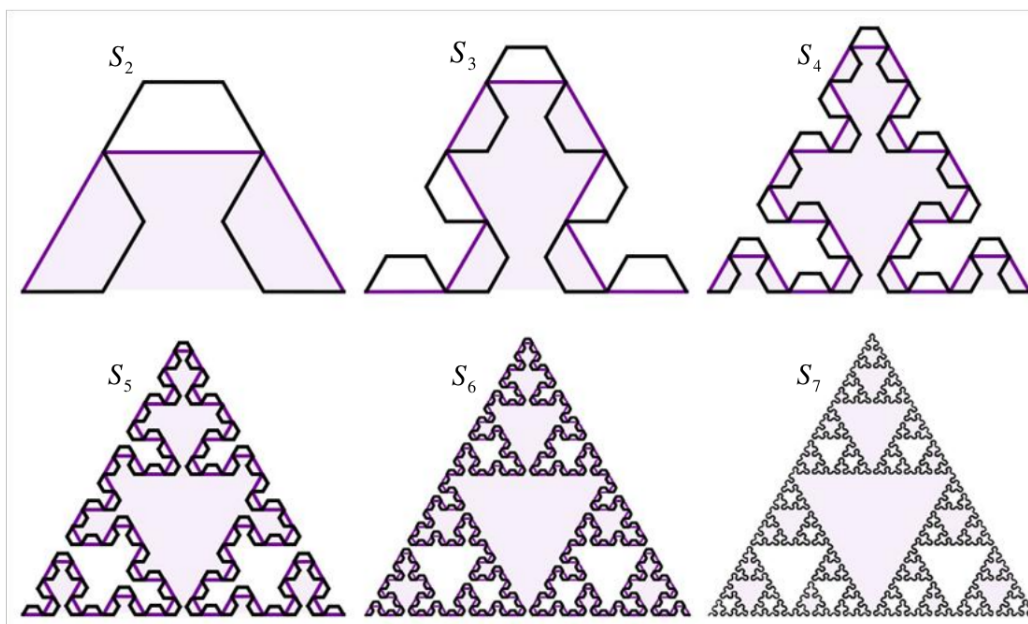


Figura 1.7: Etapas de construcción de la Curva de Sierpinski.

Para el caso específico de la curva de Sierpinski cada lado de la poligonal inicial, $k = 1$, se sustituye por nuevas poligonales que se suceden según los giros a izquierda y derecha, determinados por las sumas de las transformaciones T_i , con lo que se obtiene una nueva poligonal, $k = 2$, en la que cada uno de los vértices de la poligonal inicial pertenece a la nueva poligonal, y así sucesivamente.

1.4 Área asociada al interior de S

Como se ha visto, es posible hablar del interior de una poligonal abierta siempre que ésta determine ciertas condiciones que se conocen como condiciones para las poligonales triangulares de tamaño AB , P_{AB}^{Δ} . Particularmente la Curva de Sierpinski en cualquiera de sus etapas es una poligonal abierta y del tipo P_{AB}^{Δ} , por ello es posible hablar del interior de la Curva de Sierpinski en la etapa k ; asociaremos un área al interior de la Curva de Sierpinski.

Definición 1.6

Llamamos *área de la poligonal* S_1 al área asociada al interior del terágono S_1 , es decir: $A(S_1) = A(\text{Int}(S_1))$. Esto es, como se ve en la Figura 8, el área determinada por la poligonal: $q_1q_2q_3q_4$. En forma similar, llamamos *área de la poligonal* S_2 al área asociada al interior de S_2 , es decir: $A(S_2) = A(\text{Int}(S_2))$; y el área de la poligonal S_3 es el área asociada que determina el interior de S_3 : $A(S_3) = A(\text{Int}(S_3))$, y así sucesivamente, hasta llegar a considerar el área de la poligonal o Curva de Sierpinski de orden k , S_k , determinada mediante la relación: $A(S_k) = A(\text{Int}(S_k))$. Por último, se entiende por *área de la Curva de Sierpinski*: $A(S_{\infty}) = \lim_{k \rightarrow \infty} A(\text{Int}(S_k))$. Esto nos

lleva a considerar que se asocia un área a cada una de las etapas de construcción de la Curva de Sierpinski así como un área a la *Situación Límite*.

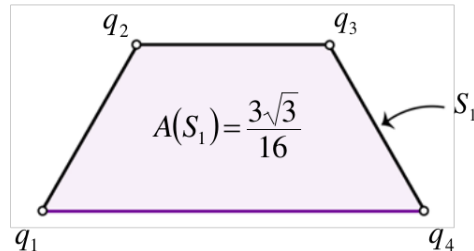


Figura 1.8: Área de la Curva de Sierpinski para $k = 1$

Teorema 1.1

El área asociada al interior de S_∞ es $\frac{3}{20}\sqrt{3}$.

Demostración: No es difícil notar que el área de $A(S_1) = 3\sqrt{3}/16$, si recordamos que $|q_1q_4| = 1$. Para obtener el área de S_2 , se resta el área que determina el terágono $P(q_{1i}^2)_4$ asociado al lado q_1q_2 de S_1 ; después, sumamos el área que determina el terágono $P(q_{2i}^2)_4$ asociado al lado de q_2q_3 de S_1 ; y finalmente, se resta el área que determina el terágono $P(q_{3i}^2)_4$ asociado al lado de q_3q_4 de S_1 (figura 1.9).

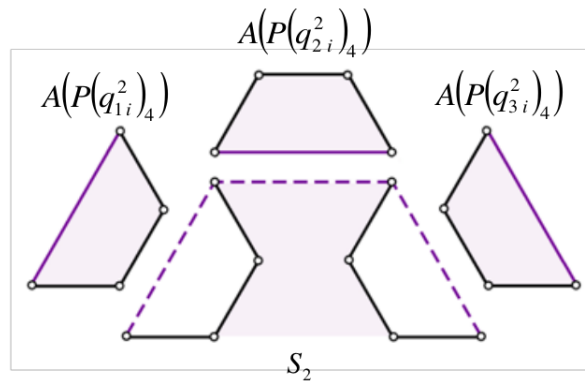


Figura 1.9: Descomposición en Terágonos de S_2 .

Así tenemos que:

$$\begin{aligned} A(S_2) &= A(S_1) - A(P(q_{1i}^2)_4) + A(P(q_{2i}^2)_4) - A(P(q_{3i}^2)_4) \\ &= A(S_1) + \sum_{m=1}^3 A(P(q_{mi}^2)_4) (-1)^m \end{aligned}$$

donde los terágonos $P(q_{1i}^2)_4, P(q_{2i}^2)_4, P(q_{3i}^2)_4$ están dadas por la construcción de S_2 .

El área que determina el terágono $P(q_{1i}^2)_4$ está dada por: $A(P(q_{1i}^2)_4) = (3\sqrt{3}/16)(1/2)^2$, dado que

los terágonos son equivalentes en área, por construcción, entonces:

$$A\left(P\left(q_{1i}^2\right)_4\right) = A\left(P\left(q_{2i}^2\right)_4\right) = A\left(P\left(q_{3i}^2\right)_4\right).$$

Por lo tanto, figura 1.10:

$$\begin{aligned} A(S_2) &= A(S_1) + (-A(P(q_{1i}^2)_4) + A(P(q_{2i}^2)_4)) - A(P(q_{3i}^2)_4) \\ &= A(S_1) + \sum_{m=1}^2 A\left(P\left(q_{mi}^2\right)_4\right) (-1)^m - A\left(P\left(q_{3i}^2\right)_4\right) \\ &= A(S_1) - A\left(P\left(q_{3i}^2\right)_4\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

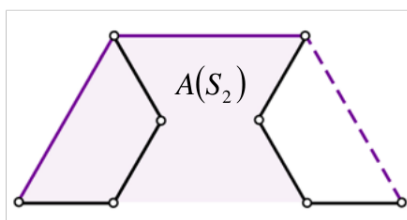


Figura 1.10: Resultado final del conteo del área de S_2

Ahora bien, para determinar el área de S_3 , primero: sumemos el área que determina el terágono $P(q_{1i}^3)_4$ respecto al lado de q_1q_2 de S_2 . Segundo: restemos el área que determina el terágono $P(q_{2i}^3)_4$ respecto al lado de q_2q_3 de S_2 . Tercero: sumemos el área que determina el terágono $P(q_{3i}^3)_4$ respecto al lado de q_3q_4 de S_2 , y así sucesivamente hasta sumar el área determinada por el terágono $P(q_{9i}^3)_4$ respecto al lado q_9q_{10} de S_2 . En esta forma, se descompone una figura en partes para reacomodarla de tal forma que determine la misma área de la segunda figura, lo que se conoce por equidescomponibilidad; [1].

De lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} A(S_3) &= A(S_2) + A(P(q_{1i}^3)_4) - A(P(q_{2i}^3)_4) + A(P(q_{3i}^3)_4) - \dots + A(P(q_{9i}^3)_4) \\ &= A(S_2) + \sum_{m=1}^9 A\left(P\left(q_{mi}^3\right)_4\right) (-1)^{m-1} \end{aligned}$$

donde los terágonos $P(q_{1i}^3)_4, P(q_{2i}^3)_4, P(q_{3i}^3)_4, \dots, P(q_{9i}^3)_4$ están dados por la construcción de S_3 , las cuales son equivalentes en área, entonces:

$$A\left(P\left(q_{1i}^3\right)_4\right) = A\left(P\left(q_{2i}^3\right)_4\right) = \dots = A\left(P\left(q_{9i}^3\right)_4\right)$$

El área que determina el terágono $P(q_{1i}^3)_4$ está dada por: $A(P(q_{1i}^3)_4) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{2^2}\right)^2$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A(S_3) &= A(S_2) + \sum_{m=1}^8 A\left(P\left(q_{mi}^3\right)_4\right) (-1)^{m-1} + A\left(P\left(q_{9i}^3\right)_4\right) \\ &= A(S_2) + A\left(P\left(q_{9i}^3\right)_4\right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{2^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Para determinar el área de S_k consideremos que su construcción depende de si k es par o impar, por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned} A(S_k) &= A(S_{k-1}) + \sum_{m=1}^{3^{k-1}} A\left(P\left(q_{mi}^k\right)_4\right) (-1)^m, \quad \text{si } k \text{ es par} . \\ A(S_k) &= A(S_{k-1}) + \sum_{m=1}^{3^{k-1}} A\left(P\left(q_{mi}^k\right)_4\right) (-1)^{m-1}, \quad \text{si } k \text{ es impar} . \end{aligned}$$

Dado que 3^{k-1} es un número impar, con $k = 1, 2, 3, \dots$, entonces:

$$(*) \left\{ \begin{aligned} A(S_k) &= A(S_{k-1}) + \sum_{m=1}^{3^{k-1}-1} A\left(P\left(q_{mi}^k\right)_4\right) (-1)^m - A\left(P\left(q_{3^{k-1}i}^k\right)_4\right) \\ &= A(S_{k-1}) - A\left(P\left(q_{3^{k-1}i}^k\right)_4\right) \quad \text{si } k \text{ es par} \\ A(S_k) &= A(S_{k-1}) + \sum_{m=1}^{3^{k-1}-1} A\left(P\left(q_{mi}^k\right)_4\right) (-1)^m + A\left(P\left(q_{3^{k-1}i}^k\right)_4\right) \\ &= A(S_{k-1}) + A\left(P\left(q_{3^{k-1}i}^k\right)_4\right) \quad \text{si } k \text{ es impar} \end{aligned} \right.$$

Sustituyendo las áreas de los terágonos en (*) se tiene que el área de S_k está determinada por:

$$\begin{aligned} A(S_k) &= \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 - \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 + \dots + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 (-1)^{k-1} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} (-1)^{k-1} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{16} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $k \rightarrow \infty$, se tiene la situación límite del proceso infinito, [4], $A(S_k)$ y el área asociada a la Curva de Sierpinski está determinada por:

$$A(S) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (-1)^{n-1} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{1}{1 - (-1/4)}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{20} \sqrt{3}.$$

1.5 Caracterización del triángulo y la Curva de Sierpinski.

El Triángulo y la Curva de Sierpinski son la situación límite de procesos infinitos y determinan, en este caso, el mismo objeto geométrico. Por ello tienen las mismas propiedades; no obstante, el área que se ha asociado en este trabajo a la de Curva de Sierpinski es distinta al área asociada al Triángulo de Sierpinski, que es cero, esto es debido a la forma en que se ha asociado el área a las poligonales abiertas.

Para esclarecer la idea de que el Triángulo y la Curva de Sierpinski son el mismo objeto geométrico consideremos lo siguiente:

1. Cada uno de los lados $q_{i_k}q_{i_k+1}$ con $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, de los subtriángulos en cada etapa de construcción del Triángulo de Sierpinski, así como cada lado de cada poligonal obtenida en la construcción de la Curva de Sierpinski, está en razón de $\frac{1}{2^k}$.
2. Dado que la longitud de los lados, $L(q_{i_k}q_{i_k+1})_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, entonces para toda vecindad $V_\lambda(x)$, con $\lambda > 0$ y $x \in T_S$, S se tiene que existe una infinidad de puntos que pertenecen a $V_\lambda(x)$. Así, cada $x \in T_S$, S es un punto de ramificación de orden infinito.
3. La Curva de Sierpinski está constituida por terágono cada uno de los cuales está contenido en los triángulos que determinan la etapa k -ésima del Triángulo de Sierpinski, es decir: $S_1 \subset T_{S_0}$, $S_2 \subset T_{S_1}$, $S_3 \subset T_{S_2}$, \dots , $S_k \subset T_{S_{k-1}}$, ver figura 1.2. Ahora, si consideramos una vecindad $V_\lambda(x)$ que contenga un triángulo de la etapa k -ésima de construcción del Triángulo de Sierpinski entonces se tiene que esta vecindad contiene también a la Curva de Sierpinski en su etapa $k-1$, por ello si $\lambda \rightarrow 0$, entonces la Curva y el triángulo de Sierpinski, determinan el mismo conjunto.

Como se puede notar, los vértices que se van obteniendo en el proceso infinito del Triángulo y la Curva de Sierpinski, pertenecen a la situación límite de estos conjuntos. A medida que $k \rightarrow \infty$, cada uno de los vértices de la Curva de Sierpinski convergen hacia los vértices del Triángulo de Sierpinski; es decir, la Curva de Sierpinski converge hacia al Triángulo de Sierpinski.

4. Para el caso del Triángulo de Sierpinski no es difícil hacer ver que no tiene tangente en cualquiera de sus puntos. Supongamos lo contrario, es decir, que existe una tangente t bien definida en $p \in T_S$, un momento de reflexión nos lleva a considerar cómo es que se obtiene esta tangente t , es decir, debe ser el límite de una recta secante que contiene dos puntos distintos de T_S , digamos p y q ; así se tiene que $\lim_{q \rightarrow p} pq = t$. Por otro lado, también existe un punto q' que no es colineal con p y q simultáneamente, dado que p es vértice de por lo menos un triángulo, de ahí que también se tiene $\lim_{q' \rightarrow p} pq' = t$, lo que constituye una contradicción con el hecho de que la tangente es única.

5. Para el caso de la Curva de Sierpinski, tampoco se tiene tangente para todos sus puntos. Para hacer ver esto, supongamos que p es un vértice de la Curva de Sierpinski, entonces no puede existir una tangente bien definida ahí. Si p no es un vértice entonces tendríamos que considerar que p pertenece algún segmento qq' que constituye un lado de la Curva de Sierpinski, con $q \neq q'$, por lo que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < |q' - q|$, lo cual es una contradicción, por lo tanto el segmento qq' no puede existir en S ; es decir, no existen segmentos rectilíneos de longitud distinta de cero en la Curva de Sierpinski. Ya que en toda vecindad de x existe una infinidad de vértices $x' \in S$, por lo tanto la secante xx' no puede tender a un límite definido cuando x' tiende a x arbitrariamente; de esta manera, la Curva de Sierpinski no tienen tangente en cualquiera de sus puntos.

Los puntos (4) y (5) hacen ver que la Curva y el Triángulo de Sierpinski no tienen tangente en todos de sus puntos.

6. Otra característica que se puede notar en estos conjuntos, es que poseen la misma *dimensión fractal* [2]: $\dim_F(T_S) = \dim_F(S) = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1.585$.

No obstante, el hecho de que dos objetos matemáticos tengan la misma dimensión fractal no significa que sean el mismo objeto, pero hace ver que tienen una característica más en común.

Bibliografía

- [1] Boltianski, V. G. (1981): *Figuras Equivalentes y Equicompuestas*. Mir, Moscú.
- [2] Mandelbrot, B. B. (2012): *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Turquets Editores, Barcelona.
- [3] Mendieta, J. G. (2016), *Geometría: Una reflexión infinita*. Tomo I. Ed. Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- [4] Mendieta, J. G., & Sigarreta, J. M. (2013): *Concepciones sobre el infinito: Un estudio a nivel universitario*. Matemática, Educación e Internet. 13, 1-12.
- [5] Moise, E. E. (1990): *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, (3rd Edition). Pearson. Florida.
- [6] Román Tizapa, Y. (2014). *Aproximación Analítica a la Geometría Fractal* (Tesis de Licenciatura). Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- [7] Sagan, H. (1994): *Space-Filling Curves*. Springer-Verlag, New York.
- [8] Sierpinski, W.(1915): *Sur une curve dont tout point est un point de ramification*.Ed. Prace Mat. Pag. 77–86.
- [9] Gerald A. Edgar. (1993): *Classics on Fractals*. Ed. Addison-Wesley Publishing Co,pany. New York. USA.
- [10] Barnsley, Michael F. (1993). *Fractals Everywhere*. Ed. Morgan Kaufmann. New York. USA.