Revista digital
Matemática, Educación e Internet
(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).
Vol 18, No 2. Marzo — Agosto, 2018 ISSN 1659 -0643

Abordaje del análisis complejo mediante conexiones con el análisis real

Lorena Salazar S.
lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Universidad Nacional de Costa Rica

Recibido: Mayo, 2017 Aceptado: Octubre 2,2017

Resumen. En este artículo se da una propuesta para introducir conceptos de variable compleja mediante el desarrollo del proceso de conexión entre el análisis real con el análisis complejo. Para su logro se ofrecen actividades que involucran desde conexiones entre lo que sucede entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ como campos, entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ como anillos, hasta comparaciones entre las nociones de límites y derivación (analiticidad) de funciones reales de dos variables y funciones complejas de variable compleja. Algunas de estas actividades se implementaron en un curso introductorio de variable compleja de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, dejando evidencias positivas de que este abordaje permite mejorar la comprensión del análisis complejo por un lado, mientras que refuerza conceptos del análisis real, por otro.

Palabras clave: Variable compleja, análisis real, diseño de tareas, educación matemática.

Abstract. This article presents a proposal to introduce complex variable concepts by developing the connection process between real analysis and complex analysis. For their achievement we designed activities involving connections between $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ as fields, between $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$ as rings, and comparisons between notions of limits and derivation (analyticity) of real functions of two variables with complex functions of complex variables. Some of these activities were implemented in an introductory course of complex variable of the Mathematics Teaching career of the University of Costa Rica, leaving positive evidence that this approach improve the understanding of complex analysis on the one hand, while reinforces concepts of Real analysis, on the other.

KeyWords: Complex variable, real analysis, task design. mathematic education.

1.1 Introducción

La formación inicial de futuros profesores de matemática representa un reto para cualquier docente consciente de la gran responsabilidad que esto involucra, dado que se debe enseñar las matemáticas rigurosas y formales por un lado, mientras que por otro lado, se deben desarrollar competencias necesarias en un futuro docente (uso medida y eficiente de tecnologías, uso de la historia como recurso didáctico, modelización en aplicaciones contextualizadas, manejo de la resolución de problemas como enfoque de enseñanza, análisis didáctico de sus parácticas y otras).

Sin embargo, generalmente los profesores replican modelos de enseñanza que han vivenciado como estudiantes ([5, Fernández, Elortegui y Cabrera (1996)], [20, Solis, Núñez, Contreras, Rittershaussen, Montecinos y Walker (2011)], [11, Godino y Batanero(2008)]). Así por ejemplo, [5, Fernandez et al (p. 333)], caracterizan como el modelo de profesor «transmisor» a aquel docente que enseña siguiendo un esquema muy parecido al que ha estado sometido durante todo su período de formación inicial, incluso desde su época de adolescente. Por otro lado, Solís señala que "los profesores generalmente replican en su quehacer profesional los modelos o estilos de trabajo en el aula que conocieron primero como alumnos y luego como profesores en formación". Para superar esto, cite[Godino y Batanero (2008)]GBb recomiendan que se debe ”(...) integrar la formación matemática de los futuros profesores con la formación didáctica, aplicando el “principio del isomorfismo”, esto es, “la idea de que los profesores en formación deben ser enseñados de la misma manera que se espera que ellos enseñen como profesores”. Los encargados de formar a los futuros docentes de matemática, son modelos a seguir, modelos positivos o modelos negativos y en este último caso, repetir modelos obsoletos de enseñanza, solo logrará replicar los errores.

Ante la necesidad de una teoría que fundamente las practicas de aula, ha surgido en la última década una disciplina propia, Educación Matemática, encargada de estudiar e investigar los fenómenos relacionados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Resultado de esto, a nivel internacional, se ha dado un auge a investigaciones tendientes a mejorar la formación inicial de profesores de matemática, entre ellos [18, Rico, 2004], [3, Ball, Thames y Phelps, 2008]; [12, Hill, Blunk, Charambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008]; [19, Silverman, J. y Thompson, 2008]; [6, Font, 2011]. Por otro lado, han surgido revistas de gran prestigio dedicadas a divulgar dichas investigaciones, así como congresos y reuniones para discutir propuestas y teorías para enseñar la matemática y mejorar la educación de los futuros docentes.

Según [9, Gascón (1988. p.2)], antiguamente se consideraba que la enseñanza de las matemáticas era un arte y que dependía tanto del grado en que el profesor dominara dicho arte como de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por el artista. Esta visión fue evolucionando hasta considerar el aprendizaje de las matemáticas, "como un proceso psico-cognitivo fuertemente influenciado por factores motivacionales, afectivos y sociales."

Históricamente, la formación de los profesores de matemática en las universidades estatales costarricences ha estado sustentada en teorías pedagógicas generales. Sin embargo como señala [10, Godino (2010, p.5)], "(...) aunque se lea a menudo, que G (la teoría general) contenga o implique a todas las teorías específicas E, más bien es al revés. G se obtendría como la parte común (intersección) de todos los E. En otras palabras: dado un conjunto de teorías específicas, se puede extraer de éstas una teoría general con sólo suprimir todas las premisas particulares y dejar las suposiciones comunes a todas las teorías específicas." Así surge la Educación Matematica, una disciplina especializada que estudia los fenómenos específicos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la cual ha empezado paulatinamente a reconocerse en diferentes países.

En Costa Rica, podría decirse que en los últimos años se ha dado una importante apertura y reconocimiento de la Educación Matemática como disciplina científica, al menos dentro del ambiente universitario. Prueba de ello es que han habido importantes reflexiones dentro de las universidades estatales sobre la formación inicial de los futuros docentes de matemática, la cual, en términos generales (con excepción del Instituto Tecnológico de Costa Rica), podría decirse que ha estado históricamente dividida en dos áreas muy marcadas, definidas y lamentablemente muy separadas: la parte pedagógica por un lado y la matemática por otra. Se espera sin éxito, que el estudiante haga una amalgama entre estas dos áreas para así, formar un profesor de matemática para secundaria que tenga competencias no solo en la disciplina como tal, sino que también sea competente en transmitir conocimiento matemático.

Según [2, Arias, Mora, Murillo y Salazar (2011)], refiriéndose a la carrera de Enseñanza de la Matemática en la UCR, los cursos de pedagogía se han caracterizado por ser generalistas, sin conexiones con los objetos matemáticos, dados por profesionales de cualquier área, no necesariamente de matemática, e impartidos en conjunto con futuros profesores de ciencias, estudios sociales, artes, lenguas, música y otras disciplinas, por lo que están desprovistos de contenido matemático. Las clases de matemática por otro lado, se caracterizan por contenidos matemáticamente rigurosos, con una enseñanza de tipo tradicional magistral, donde el docente expone definiciones, teoremas y ejemplos mientras que el estudiante copia de una pizarra, con poca participación lo que lo convierte en un simple receptor pasivo, y posiblemente con muy poco grado de comprensión de los conceptos.

Con el afán de superar estas debilidades, se han dado en los últimos años, un proceso de discusiones, seminarios y reflexiones en torno a la pertinencia de los programas de estudio de las carreras enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de ello es el proceso de autoevaluación realizados en la Universidad Nacional (UNA), la Universidd Estatal a Distancia (UNED) y el Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR), previo a la acreditación de sus carreras. La UCR también realizó un proceso de autoevaluación, pero las debilidades resultaron tan relevantes, que en lugar de continuar con un proceso de acreditación, decidió que se requería una nueva carrera fundamentada en la Educación Matemática (Arias, Mora, y Salazar(2011)). Esta nueva carrera inició en el 2017 e integra cursos de didácticas específicas. Por otro lado en la UNA, también este mismo año, ha iniciado un nuevo plan de estudios con un enfoque por competencias, que también ofrece cursos de didácticas específicas. Por otro lado en el ITCR, se ha dado un importante auge en la investigación en Educación Matemática y en la realización de eventos y espacios de discusión entorno a cómo mejorar la enseñanza de la matemática en el país. (EDEPA, ECAME, CIEMAC). En la UNED, se hacen esfuerzos por incluir algunas de estas tendencias internacionales en los cursos virtuales.

Pareciera que finalmente hay un consenso entre los formadores costarricenses de profesores de matemática, en que no es suficiente con tener abundante conocimiento en la disciplina de matemática, sino que se deben tener competencias en otros quehaceres docentes. [13, Larios y Font (2012, p. 26)] señalan refiriéndose al conocimiento matemático que "(...) hasta hace un par de décadas la visión predominante era que este aspecto era el necesario y (prácticamente) el suficiente para impartir clases de matemáticas en los niveles medio y superior. Con el paso del tiempo ha quedado en evidencia de que esta visión es más bien corta y que este aspecto no es suficiente para llevar a cabo una enseñanza adecuada." Por otro lado, [21, Ponte y Chapman (2008)] señalan que "(...) teachers also need other kinds of knowledge related to the specific issues of mathematics teaching, including planning, conducting instruction in relation to curriculum goals, using tasks and resources, handling classroom discourse and evaluating students".

El divorcio entre las áreas de pedagógía y matemática no es la única fragmentación en la formación de los profesores, sino que también, dentro de la misma matemática, se presenta una división en subáreas: álgebra por un lado, análisis por otro, geometría en otro vértice y rara vez se propician conexiones intencionadas entre ellas. Según la experiencia docente de la autora de este trabajo, los estudiantes no realizan estas conexiones intramatemáticas de forma inmediata, por lo que el profesor debe crear actividades que les faciliten el desarrollo del proceso de conexión.

La propuesta de este documento incluye actividades dentro del aula que buscan incentivar el proceso de conexión intra-matemático, más específicamente entre el análisis real y el análisis complejo, de modo que esto sirva de motivación y apertura a conocimientos nuevos. Es una propuesta dirigida al docente que vaya a enseñar un curso de variable compleja y para el cual algunas de las actividades aquí propuestas le puedan dirigir hacia el desarrollo de los procesos intratemáticos. La hipótesis de esta propuesta se enmarca dentro de una más general,como parte de un proyecto de investigación de la UCR a cargo de la autora de este escrito, que estipula que, si los alumnos en su actividad matemática vivencian procesos metodológicos motivadores, sin menoscabo de la rigurosidad matemática y reflexionan sobre ellos, se logrará una mayor comprensión de los conceptos matemáticos involucrados e influirá de manera positiva en su proceso formativo, dándoles mejores condiciones para desenvolverse en su futura labor docente. Más específicamente, el objetivo de esta experiencia es el siguiente:

> **Objetivo:** Proponer actividades tendientes a desarrollar el proceso de conexión entre el análisis real con el análisis complejo, de modo que se reafirmen los conceptos previos y se dé una apertura a conocimientos nuevos.

1.2 Nociones teóricas

A continuación se hacen referencias a algunos elementos teóricos que fundamentaron esta investigación, a saber procesos de conexión y diseño de tareas.

1.2.1 El proceso didáctico de conexión

La National Council of Teachers of Mathematics [17, (NCTM, 2000)], señala que para lograr una sociedad con capacidad de pensar y razonar matemáticamente, se deben tomar en cuenta tanto estándares de contenidos como estándares de procesos (resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación). El presente estudio se centra en el proceso de conexión, proceso de suma importancia para lograr una formación matemática integral y sólida.

El uso de las conexiones para fundamentar un concepto nuevo en el área de matemática, puede lograrse señalando o enfatizando las diferencias y similitudes entre conceptos nuevos con previos. Según [25, Waisburd (2009, p. 5)] "(...) las ideas originales surgen de establecer nuevas relaciones con ideas existentes, transformando la información establecida o añadiendo detalles a situaciones conocidas, como la codificación, la combinación, la comparación selectiva y requerida en procesos creativos". De modo que desarrollar conexiones entre las distintas áreas de la matemática, desarrolla a su vez la creatividad y posibilita la apertura a conceptos nuevos.

Por otro lado, es importante desarrollar procesos de conexión en los futuros docentes, dado que ellos mismos deberán hacerlo en su futura labor docente. En los fundamentos del Plan de Estudios de Matemática vigente en Costa Rica, se señala que: "(...) aunque las Matemáticas han evolucionado en distintas disciplinas o áreas, han llegado a integrarse con el correr del tiempo. Esta integración es de tal nivel y el flujo de relaciones de un lado a otro es tan grande que no insistir en esas conexiones y ese carácter unificado haría perder la comprensión adecuada de lo que son las Matemáticas. Con esta multiplicidad de conexiones se comprenden mejor los límites y el significado de muchos de los objetos matemáticos." [15, MEP (2012, p. 25)]

El proceso de conexión entre partes de la matemática debe ser introducido en los cursos formales de matemática, para favorecer su comprensión profunda e integradora de todas sus áreas. ¿Pero qué significa comprensión matemática? Según [**?**, (Font, 2007, p. 428)], "(...) se entiende que un objeto matemático se ha comprendido en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas, que permitan producir representaciones externas adecuadas para la resolución de las tareas propuestas en las que dicho objeto sea determinante."
La comprensión de conceptos de variable compleja no se logra fácilmente, por lo que realizar comparaciones selectivas entre las propiedades y conceptos de funciones reales y funciones complejas, es una manera de abordar conocimientos nuevos y reforzar los previos. En la Figura 1.1 se muestran algunas de los aspectos que se espera lograr con estas tareas.

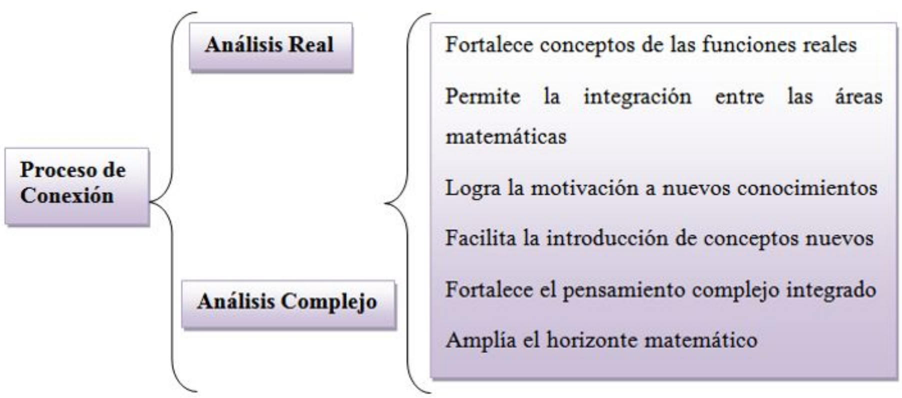

Figura 1.1: Proceso de conexión entre el análisis real y análisis complejo.

Según [22, Salazar (2014)], "(...) una forma de reafirmar conceptos matemáticos, es enseñando la contraparte, las diferencias y similitudes con su opuesto o lo contrario. Además, cualquier concepto puede ser visto como la contraparte de otro, si se la mira desde otro punto de vista. Esta es la base de los contraejemplos matemáticos, fundamentales para llamar la atención del estudiante a aquellos detalles o sutilezas que, de otra manera, podrían pasar desapercibidos". No obstante, la experiencia como docente de la autora de este documento (más de 18 años), indica que estas comparaciones no se logran de manera instantánea en los estudiantes, el docente debe guiarlos a que hagan estas comparaciones y ahondar en ellas de manera profunda. Bajo esta tesis, este trabajo propone reafirmar conceptos del análisis real, por un lado e introducir conceptos de análisis complejo mediante comparaciones guiadas, por otro.

1.2.2 Diseño y secuencia de tareas

En los últimos tiempos ha crecido un interés sobre el diseño de tareas en la formación inicial de profesores como se puede observar en los congresos relevantes del área y en congresos monográficos, como ha sido la celebración de un ICMI Study específico sobre este tema [14, (Margolinas, 2013)], siendo uno de sus focos el diseño de tareas en la formación de profesores.

Según [8, Font (2013, p. 4772)], se entiende por tareas a aquellas situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio,etc.) a los alumnos; siendo estas el punto de partida de la actividad del alumno, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje. De este modo, se propone en este documento una serie de tareas y actividades tendientes a desarrollar el proceso de conexion entre el análisis real y el complejo, y no simplemente introducir este tema, como si este fuera un tema aislado. Con esto se espera lograr motivar a los estudiantes a buscar respuestas a sus propias interrogantes con respecto a las funciones complejas de variable compleja.

Según [8, Font (2013, p. 4772)] "(...) una de las competencias profesionales que debe tener el profesor de matemáticas es la competencia en análisis didáctico de secuencias de tareas, que le permita su diseño, aplicación,valoración y mejora". Así que no solo se pretende que los estudiantes logren asimilar los nuevos conceptos del análisis complejo, sino que también reflexionen sobre la metodología empleada de desarrollar conexiones intra-matemáticas. De modo que al finalizar cada una de las acitividades, se realizó una reflexión del por qué se hicieron y qué se esperaba de ellos, qué se logró y qué no se logró.

Otra de las competencias a desarrollar en esta propuesta es el planteamiento de preguntas por parte de los estudiantes para lograr la motivación en ellos. Las clases de matemática deben ser claras, deben indicar el objetivo, hacia dónde se va, cómo se llegará y por qué. Es importante señalarles esa luz al final del camino, anticipando el resultado al cual se quiere llegar y el que le da sentido a todos los pasos previos necesarios que les conducirá a dicho resultado. De lo contrario, se pueden perder en ese trayecto, perdiendo además el interés por la clase. El planteamiento de constantes preguntas facilita este proceso y esto podría resultar mucho mejor si es el mismo estudiantado quien se plantea sus propias preguntas.

La [17, NCTM (2015)] propone el planteamiento de preguntas deliberadas como una de las ocho prácticas para evaluar y mejorar el razonamiento estudiantil de manera que le dé sentido a ideas y relaciones matemáticas. Recomienda, además, que docentes y estudiantes deben plantearse y responderse preguntas como: ¿Qué matemáticas se están aprendiendo? ¿Por qué esto es importante? ¿Cómo se relaciona esto con lo que ya he aprendido? ¿Hacia dónde se dirigen estas ideas matemáticas?.

1.3 Metodología

Algunas de las actividades aquí propuestas, se implementaron en una muestra de 21 estudiantes del curso MA0610 Introducción a la Variable Compleja de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la UCR. Los contenidos de este curso se dan con formalidad y rigurosidad matemática, se incluyen las demostraciones de los resultados más importantes y se resuelven ejercicios en las clases. Los estudiantes ya conocían los conceptos básicos de las funciones reales tanto en una como en varias variables, puesto que ya habían aprobado dos cursos previos de análisis.

Para lograr el objetivo de la investigación, se les planteó, al inicio de cada tema, un problema detonante o generador de preguntas, que consistió en un enunciado válido en el campo complejo, que provocara impacto y diera origen al planteamiento de preguntas por parte del alumnado, y que además, le resultara motivador, despertando interés por buscar respuestas. Constantemente en el desarrollo de los contenidos se fueron formulando conexiones con el análisis real, vía preguntas y discusión en clases. También se les asignaron tareas como el repasar algunos conceptos de el análisis real antes de iniciar con un tema nuevo de variable compleja.

Se aplicó una prueba escrita al final de las actividades, con el fin de realizar algunas comparaciones con respecto a las evaluacciones previas a las atividades de conexión.

Para la recolección de datos, se acopiaron evidencias escritas por estudiantes (preguntas planteadas, impresiones verbales y resultados de un quiz de evaluación) y se llevó una bitácora de lo acontecido en el aula. Estas evidencias se analizaron con un enfoque cualitativo.

1.4 Propuesta para inducir a conexiones intramatemáticas

En una clase magistral tradicional usualmente se inicia con la definición de los números complejos, para pasar inmediatamente a enunciar y probar las propiedades relevantes de dicho campo. Sin embargo, en esta experiencia se realizaron varias actividades tendientes a motivar a los estudiantes en los nuevos conceptos de variable compleja, mediante conexiones con otras áreas de la matemática, en especial con el análisis real, para lo cual se les facilitó el libro Bartle (2010).

1.4.1 Comparación entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}$ como campos

Se propone iniciar con una actividad que pretende motivar la introducción de el campo de los números complejos. En la implementación, se les facilitó a los alumnos una tabla en la que los estudiantes tenían que comparar entre las propiedades inherentes a los campos más familiares $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Se intenta que los estudiantes reflexionen y hagan comparaciones entre ellos, sobre propiedades de orden, de completitud, si es contable, sobre la densidad, etc para que discutieran en grupos. De todas estas propiedades, la gran diferencia entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ es sin duda la propiedad de completitud de $\mathbb{R}$ o el axioma del extremo superior. Se sugiere iniciar con la diferencia inicial entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, que es el orden. En algunos de los casos no tiene sentido preguntarse aspectos como la densidad y otros relacionados con el orden, sin embargo, la idea de la actividad era que ellos llegaran a esta conclusión.

En este punto es importante recordarles que significa que un conjunto sea ordenado.

Definición 1.1

Un sistema de números G se dice ordenado, si este contiene un conjunto P, que cumple las siguientes propiedades:

a.) $\forall x \in G$, se tiene que $x \in P$ ó $-x \in P$, pero no ambos.

b.) Si $x, y \in P$ entonces $x + y \in P$ y también $xy \in P$.

En este caso se dice que $x > y \Longleftrightarrow x - y \in P$. P es llamado el conjunto de números positivos.

La siguiente actividad, esta intencionada para que el estudiante determine si el conjunto de los números complejos es ordenado o no.

Realice y discuta los siguientes aspectos en grupos de dos personas.

a.) Represente los números complejos $2 + 3\boldsymbol{i}$ y $-3 + \boldsymbol{i}$. ¿Podría establecer una relación de orden entre ellos? Es decir ¿cuál de ellos parece mayor y porqué?

b.) Si existiera un orden en $\mathbb{C}$, halle un conjunto P de positivos como indica la definición.

c.) Si existiera este conjunto $P \in \mathbb{C}$, entonces $z = \boldsymbol{i} \in P$ ó $z = -\boldsymbol{i} \in P$. Use este hecho para determinar si $\mathbb{C}$ es ordenado o no.

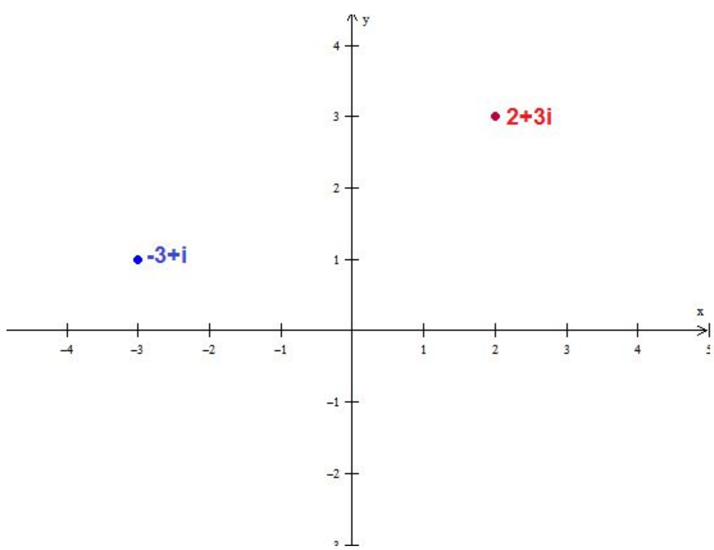

Figura 1.2: No existe un orden en el campo complejo

Algunos de los resultados de la actividad, mostraron lo que era natural de esperar. Algunos estudiantes señalaron que podría pensarse que un número complejo es mayor que otro si este se halla ubicado en el plano complejo más lejos del origen. En la parte (a) indicaron que bajo esta hipotética idea, se debería tener que $2+3i \geq -3+\boldsymbol{i}$ como puede verse en la Figura 1.2. Ante la pregunta de cuál debería entonces ser ese conjunto P de números complejos positivos, señalaron que debería ser aquel conjunto formado por los aquellos números cuya parte real e imaginaria son positivos. En cuyo caso se les pidió indicar el signo que debería entonces tener un complejo como $-3+\boldsymbol{i}$. Se sugiere ir usando la metodología de preguntas para que los estudiantes mismos concluyan o se convenzan de la veracidad o no de sus conjeturas. Después de darse cuenta que tal conjunto de positivos no funciona, se les pidió mostrar en la parte (c), que tal conjunto no puede existir, razonando de la siguiente forma:

Si $z = i \in P$, entonces $z^2 = i^2 = -1 \in P$ y entonces $i \cdot -1 = -\boldsymbol{i} \in P$ por la propiedad (ii), pero eso no puede ser porque solo uno de los dos debe estar en P. Por otro lado si se asume que $z = -\boldsymbol{i} \in P$ se llegara a otra contradicción. Por lo que se concluye que no puede existir tal conjunto P y en consecuencia $\mathbb{C}$ no es ordenado. Es claro que sí existe un orden entre los módulos de los números complejos, dado que $|z| \in \mathbb{R}$.

1.5 Comparación entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$

En un curso de cálculo de varias variables se ven funciones (transformaciones o mapeos) real diferenciables del plano en el plano. Por otra parte toda función del plano $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ se podría asociarse a una función compleja $f(z) = u(x,y) + \boldsymbol{i}v(x,y)$ para $z = x + \boldsymbol{i}y$. A esto le llamaremos la complexificación de la función.

Por otro lado, el sistema de abiertos y cerrados (es decir toda la topología) de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son iguales, pues solo cambia la forma de denotarlos. Entonces es válido preguntarse:

¿Cuál es la verdadera diferencia entre el cálculo real del plano en el plano y el cálculo de funciones de variable compleja?

Geométricamente esta conexión no tiene nada de extraño si se recuerda que hay una relación entre la representación de puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ y en el plano complejo $\mathbb{C}$ como puede verse en Figura 1.3.
La siguiente actividad es hacer que los estudiantes noten que en realidad existe un isomorfismo como anillos entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, dado de la manera más natural por:

$$f(a+b\boldsymbol{i}) = (a,b)$$

Esto se podría utilizar para reafirmar conceptos de estructuras algebraicas. Aquí es momento de realizar otra conexión, y para ello es importante recordar algunos conceptos de álgebra abstracta.

Definición 1.2

Un anillo A es un conjunto con dos operaciones llamadas operaciones de suma y producto, denotadas por $*$ y $\cdot$ tales que:

1. $(A,*)$ es un grupo conmutativo.

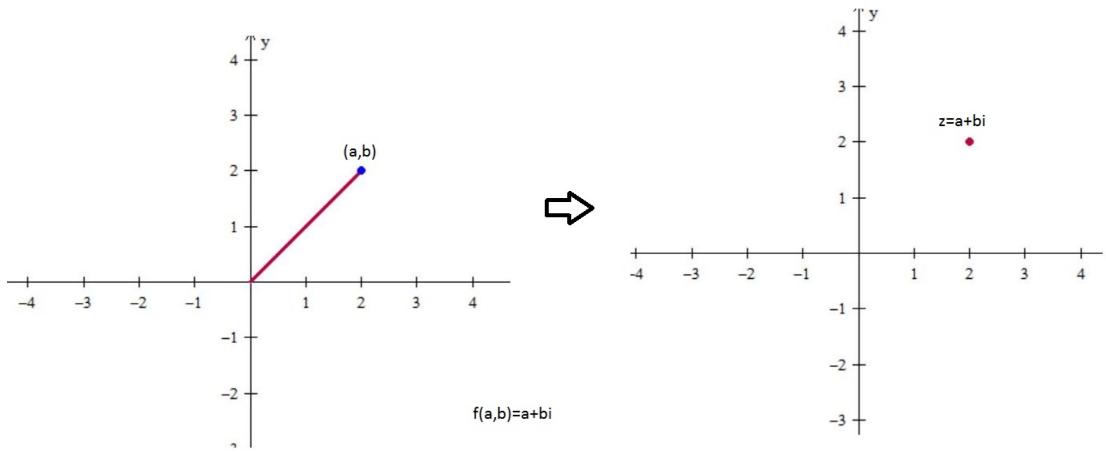

Figura 1.3: Isomorfismo de anillos entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$

2. La operación $\cdot$ es cerrada y asociativa.

3. Las leyes distributivas son válidas, para elementos $a, b, c \in \mathbb{R}$ cualesquiera

$$a \cdot (b * c) = (a \cdot b) * (a \cdot c) \quad \text{y} \quad (b * c) \cdot a = (b \cdot a) * (c \cdot a).$$

Actividad

Recuerde que si $z = a + bi$ y $w = c + di$ son números complejos, se definen las operaciones de suma y producto como:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i, \qquad z \cdot w = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

mientras que en $\mathbb{R}^2$, si $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{w} = (c, d)$ entonces podrían definirse las operaciones siguientes:

$$\vec{u} + \vec{w} = (a + c, b + d), \qquad \vec{u} \cdot \vec{w} = (ac - bd, bc + ad)$$

Pruebe que $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ resultan ser un campo con las operaciones definidas anteriormente. (Observe que el elemento identidad de $\mathbb{R}^2$ es $(1, 0)$ y el inverso multiplicativo de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ es $\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$.

Bueno, ahora en este punto se tienen las condiciones para probar que efectivamente hay un isomorfismo de anillos entre $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{R}^2$. Se debe recordar el concepto de isomorfismo de anillos, para reforzar conceptos previos.

Definición 1.3

Una función h de un anillo $(A,+,\cdot)$ a un anillo $(B,\oplus,\circ)$ se dice ser un homomorfismo de anillos si

$$h(x+y) = h(x) \oplus h(y),\ \forall x,y \in A, \qquad h(x\cdot y) = h(x)\circ h(y),\ \forall x,y \in B,$$

Se puede prescindir de las operaciones y escribir simplemente

$$h(x+y) = h(x)+h(y), \qquad h(xy) = h(x)h(y)$$

donde se sobreentiende que el símbolo $+$ y el producto, se refieren a las operaciones definidas en cada anillo. Un isomorfismo de A en B es un homomorfismo biyectivo entre estos dos anillos. En este caso escribimos $A \cong B$.

Ejemplo 1.1

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(a,b) = a+b\boldsymbol{i}$. Entonces f es un isomorfismo de anillos con las operaciones definidas anteriormente. En efecto veamos primero que es un homomorfismo de anillos.

$$f[(a,b)+(c,d)] = f[(a+c,b+d)] = (a+c)+(b+d)\boldsymbol{i} = f(a,b)+f(c,d)$$

Y ahora con el producto

$$f[(a,b)\cdot(c,d)] = f[(ac-bd,ad+bc)] = (ac-bd)+(ad+bc)\boldsymbol{i} = a(c+d\boldsymbol{i})+b\boldsymbol{i}(c+d\boldsymbol{i}) = f(a,b)\cdot f(c,d)$$

Luego solo resta probar que f es biyectiva, lo cual es evidente de la definición. Por lo tanto tenemos que $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Con esto se está definiendo en el plano, una copia de $\mathbb{C}$, es decir los complejos se pueden escribir con otra notación que no involucra el término i, pero que implícitamente está operando en el producto definido. El caso es que tanto $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{C}$ son objetos matemáticos con una doble estructura: una geométrica y otra algebraica. Desde el punto de vista geométrico, no hay diferencia dado que para definir un espacio métrico (de donde se derivan sus correspondientes topologías) solo se ocupa un conjunto y una métrica, las cuales en el caso de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, son idénticas ya que la norma es la misma y el espacio también. La diferencia es en la estructura algebraica, pues $\mathbb{C}$ es un campo y el $\mathbb{R}^2$ es solo un espacio euclidiano.

1.6 Abordaje para introducir el concepto de límite

Uno de los conceptos fundamentales del análisis, es el concepto de límite. Con este se define la noción de derivada e integración. Si no existe un orden en $\mathbb{C}$, ¿cómo se puede definir el concepto de límite en funciones complejas de variable compleja?. Tradicionalmente simplemente se enuncia una definición formal del concepto de límite complejo, pero en esta actividad se intentó que los estudiantes reflexionaran antes, sobre el mismo.

Es importante recordar la definición de límite de una función real de variable real cuando "x se acerca a un valor fijo c".

Definición 1.4

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $L \in \mathbb{R}$. Se dice el límite de f cuando x se acerca a c es L, y se escribe $\lim\limits_{x \longrightarrow c} f(x) = L$, si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad \partial > 0$ tal que cada vez que $|x - c| < \partial$ se tiene que $|f(x) - L| < \epsilon$.

En $\mathbb{R}$, solo hay dos formas de acercase a c, por la derecha o por la izquierda, y esto equivale a todos lo reales, muy cercanos a c, que son mayores o menores que c. En $\mathbb{C}$ no existe tal derecha o izquierda, y como se vio antes tampoco existen complejos mayores o menores. De modo que para tener una definición homóloga de límite de una función compleja de variable compleja, debe entenderse la expresión $|z - c| < \partial$, como el módulo de las diferencia entre z y c, lo que representa un círculo de radio ∂ con centro en $z = c$.

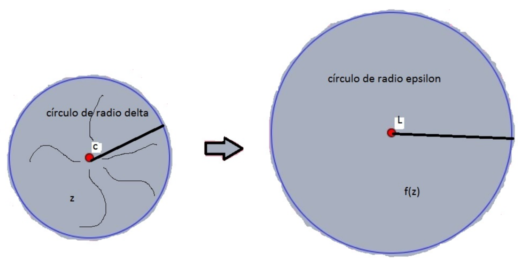

Figura 1.4: Ilustración del concepto de $\lim\limits_{z \to c} f(z) = L$ en el campo complejo

Realice y discuta los siguientes aspectos en grupos de dos personas.

a.) Represente el conjunto $S = \{z : |z - c| < \partial\}$. ¿Podría representar geométricamente este conjunto? ¿Existe un orden entre módulos, porqué?

b.) Podría anticipar lo que podría ser el concepto de límite complejo?

Esto significa que hay infinitas formas de acercarse al complejo $z = c$, que serían todos los posibles caminos dentro del círculo que llegan a $z = c$. Es importante aclarar que como el módulo de un número complejo es un valor real, la diferencia $|z - c|$ es real por lo que tiene sentido compararlo usando el orden de $\mathbb{R}$, con ∂ que es un valor real positivo. Por otro lado la expresión $|f(z) - L| < \epsilon$, indica que las imágenes de f, que son complejas se acercan a L o que están dentro del círculo de radio ϵ con centro en L. De modo que la definición de límite en $\mathbb{C}$ se logra rescatar, manteniendo el sentido de "estar muy cerca de" o de "aproximación", sin necesidad de usar un orden, como se muestra a continuación.

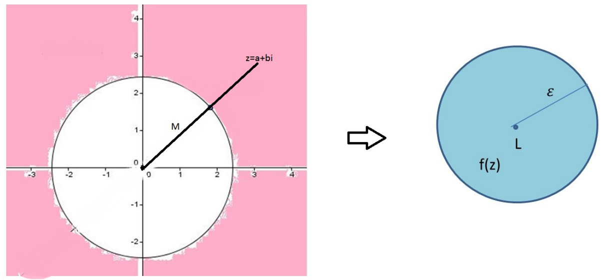

Figura 1.5: $\lim\limits_{z \longrightarrow \infty} f(x) = L$, si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad M > 0$ tal que si $|z| > M \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon$.

Definición 1.5

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de variable compleja y sea $L \in \mathbb{R}$. Se dice el límite de f cuando z se acerca a c es L, y se escribe $\lim\limits_{z \longrightarrow c} f(z) = L$, si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad \partial > 0$ tal que cada vez que $|z - c| < \partial$ se tiene que $|f(z) - L| < \epsilon$.

Observe que estas sutilezas deben ser comprendidas por los estudiante, pues aunque aparentemente tienen la misma simbología, el significado es muy diferente.

1.6.1 Abordaje para introducir límites al infinito

¿Cómo podrá definirse la idea del límites al infinito en $\mathbb{C}$?. Nuevamente haciendo conexiones con la definición de esta idea en el análisis real, es importante recordar al estudiante la definición precisa de tal concepto y de su interpretación.

Definición 1.6

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $L \in \mathbb{R}$. Se dice el límite de f cuando x tiende a ∞ es L, y se escribe $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = L$, si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad B > 0$ tal que cada vez que $x > B$ se tiene que $|f(x) - L| < \epsilon$.

Como puede verse, esta definición involucra el concepto de orden, aspecto que ya se sabe no se puede usar en $\mathbb{C}$, por lo que se puede obviar esta sutileza al igual que en el caso anterior, usando el módulo, quedando una definición similar como la siguiente.

Definición 1.7

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de variable compleja y sea $L \in \mathbb{R}$. Se dice el límite de f cuando z tiende a ∞ es L, y se escribe $\lim\limits_{z \longrightarrow \infty} f(x) = L$, si $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad M > 0$ tal que cada vez que $|z| > M$ se tiene que $|f(z) - L| < \epsilon$.

Claramente la interpretación es diferente a lo que ocurre en $\mathbb{R}$, aunque aparentemente parecen similares las definiciones. Esto significa que cada vez que z esta fuera del círculo de radio M, las imágenes de f se encuentran en el círculo de centro l y radio ϵ.

1.6.2 Abordaje para introducir límites infinitos

Continuando con la misma idea, ¿cómo podría definirse el concepto de que $\lim\limits_{z \longrightarrow c} f(x) = \infty$? Recordando la definición en las funciones reales de variable real se puede adaptar esta misma a las funciones complejas de variable compleja.

Definición 1.8

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $L \in \mathbb{R}$. Se dice el límite de f cuando x tiende a c es ∞, y se escribe $\lim\limits_{x \longrightarrow c} f(x) = \infty$, si $\forall B > 0 \quad \exists \quad \partial > 0$ tal que cada vez que $|x - c| < \partial$ se tiene que $|f(x)| > B$.

Definición 1.9

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de variable compleja. Se dice el límite de f cuando z tiende a c es ∞, y se escribe $\lim\limits_{z \longrightarrow c} f(x) = \infty$, si $\forall B > 0 \quad \exists \quad \partial > 0$ tal que cada vez que $|z - c| < \partial$ se tiene que $|f(z)| > B$.

La siguiente actividad está enmarcada dentro de la estrategia de creacción de problemas, más específicamente dentro de la actividad llamada anticippación de conceptos y definiciones. Se le pide al estudiante que intente definir otros conceptos similares al anterior, y lo ilustre con algún caso específico. No es lo mismo copiar definiciones formales, que intentar definirlas antes, pues así puede entender las sutilezas o detalles que el matemático creador tuvo antes de su formalización.

a.) Dé una definición formal e ilustre con un bosquejo el concepto de $\lim\limits_{z \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$

b.) Dé una definición formal e ilustre con un bosquejo el concepto de $\lim\limits_{z \longrightarrow -\infty} f(x) = L$

c.) Dé una definición formal e ilustre con un bosquejo el concepto de $\lim\limits_{z \longrightarrow -\infty} f(x) = \infty$

d.) Dé una definición formal e ilustre con un bosquejo el concepto de $\lim\limits_{z \longrightarrow \infty} f(x) = -\infty$

1.7 Abordaje para introducir el concepto de analiticidad

El concepto de diferenciabilidad de una función real en un punto difiere sustantivamente de lo que ocurre en $\mathbb{C}$, existen funciones que aparentemente se parecen mucho pero son muy diferentes dependiendo del campo en que estemos. Las siguientes dos actividades intentan generar interés en los estudiantes, que les cause impacto y les motive a buscar respuestas al por qué ocurren estas diferencias entre lo conocido y lo que se intenta enseñar.

A continuación se indican algunas aspectos relacionados a las funciones reales y las funciones complejas. Escriba cualquier pregunta o comentario que le genere cada una de las siguientes afirmaciones.

1. En el análisis real, la derivada de una función en un punto tiene varias interpretaciones. Por ejemplo se puede interpretar como la pendiente de una recta tangente, como una razón de cambio instantánea o como una velocidad, por ejemplo. En el análisis complejo, no se tiene ninguna de estas interpretaciones.
2. Se dice que una función es analítica en un punto x_0, si f tiene una representación en series de Taylor en una vecindad de x_0, mientras que en $\mathbb{C}$, una función es analítica en z_0, si es derivable en z_0 y en una vecindad alrededor de z_0. ¿Por qué esas definiciones en realidad no son tan diferentes?
3. En $\mathbb{R}$, si una función tiene derivada en un punto, no hay ninguna garantía de que sea dos veces derivable en dicho punto, mientras que en $\mathbb{C}$, si un a función es analítica en un dominio D, entonces es infinitamente derivable en todo punto de D.
4. En $\mathbb{R}$ es posible aplicar la regla de L'Hospital varias veces para hallar un límite. En $\mathbb{C}$, si las primeras $n-1$ derivadas de f y g son cero y si $g^{(n)}(z_0) \neq 0$, entonces

$$\lim_{z \longmapsto z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)}$$

A continuación se dan algunos casos con funciones específicas que muestran algunas de las diferencias que se dan entre funciones reales y complejas, tomados del Zill,(2003). Indique cualquier pregunta o comentario que le genere cada una de las afirmaciones planteadas.

1. La función real de variable real $f(x) = x$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$, pero $\widetilde{f}(z) = x = Re(z)$, donde $z = x + \boldsymbol{i}y$, no resulta ser diferenciable un ningún punto.
2. La función real de variable real $f(x) = |x|^2$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$, mientras que la función compleja $\widetilde{f}(z) = |z|^2$, donde $z = x + \boldsymbol{i}y$, resulta ser diferenciable solamente en $z = 0$, por lo tanto $\widetilde{f}$ no es analítica en ningún punto de $\mathbb{C}$.
3. Las siguientes funciones complejas de variable compleja

$$\widetilde{f}(x + \boldsymbol{i}y) = 4x^2 - \boldsymbol{i}y \qquad \text{y} \qquad \widetilde{g}(x + \boldsymbol{i}y) = xy + \boldsymbol{i}(x + y)$$

son derivables en $\mathbb{C}$, pero sus derivadas no pueden obtenerse por medio de las reglas de la suma, producto de derivadas.

Esta actividad generó inmediatamente varias preguntas de los estudiantes, como las que se presentan a continuación:

1. ¿Qué significa ser diferenciable en $\mathbb{C}$?
2. Es muy raro que $\widetilde{f}(z) = |z|^2$ no sea diferenciable si $z \neq 0$. ¿No se deriva normalmente como $(|z|^2)' = 2|z|$?

3. ¿Cuál es la diferencia entre derivabilidad, diferenciabilidad y analiticidad?
4. ¿Cómo se derivan las funciones complejas?
5. ¿Se valen las reglas de la suma, del producto y división en las funciones complejas? ¿Se puede usar la regla de la cadena?
6. ¿Se puede usar la regla de L'Hospital para calcular límites?
7. ¿Y también se usan los resultados de derivación para graficar funciones? Pero, no hay orden en $\mathbb{C}$, así que no se puede decir que si la derivada es positiva, entonces la función crece, verdad?
8. ¿Y hay resultados similares al teorema del valor medio?
9. La definición de derivada en $\mathbb{C}$, parece similar a la dada en $\mathbb{R}$, a qué se debe que una función tan simple como $\widetilde{f}(z) = Re(z)$ ya no sea derivable en ningún punto?
10. ¿Hay diferencia entre derivable y diferenciable?
11. Quiero ver la prueba de que esa función no es derivable en ningún punto.

Todas estas preguntas de los estudiantes generan un ambiente de aula de espectativa, motivación y apertura a conocimiento nuevo. Se establece un terreno fértil para sembrar nuevos conceptos matemáticos.

1.7.1 Interpretación de la derivada compleja

Sea G abierto conexo y sea $f : G \to \mathbb{R}^2$ real diferenciable en $(x_0, y_0) \in G$. Entonces, la derivada de $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ en (x_0, y_0) queda determinada por la matriz jacobiana en (x_0, y_0) dada por:

$$Jf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

La matriz jacobiana representa una transformación $\mathbb{R}$ lineal que resulta ser la mejor aproximación a $f(x_0, y_0)$. Esta misma función la podemos complexificar tomando

$$(x,y) \rightharpoonup z = x + \boldsymbol{i}\, y, \qquad f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \rightharpoonup \widetilde{f}(z) = u(x,y) + \boldsymbol{i}\, v(x,y)$$

El que $\widetilde{f}$ sea analítica en $z_0 \in G \subset \mathbb{C}$ significa que $u(x,y) : G \to \mathbb{R}$ y $v(x,y) : G \to \mathbb{R}$ son real diferenciables en (x_0, y_0) y que entonces podemos hablar de la derivada $\widetilde{f}'$. He ahí una rica conexión que podría realizarse.

Ahora, ¿qué significa $0 \neq \widetilde{f}'(z_0) = \left(\left| \widetilde{f}'(z_0) \right|, Arg(\widetilde{f}'(z_0)) \right)$?. Dé una descripción de como se transforma $\widetilde{f}$ a G en el punto (x_0, y_0). ¿Es esta transformación conforme?

Para ver esto es necesario acudir al siguiente teorema.

Teorema 1.1

Sea $G \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo y sea $\widetilde{f}(z_0)$ continua en G. Sea f compleja diferenciable en $z_0 \in G$ con $f^{'}(z_0) \neq 0$, y sea l una curva diferenciable en z_0 con tangente τ en z_0. Entonces $w = \widetilde{f}'(z)$ mapea l en una curva L que pasa por el punto $w_0 = \widetilde{f}(z_0)$. Ademas L tendrá tangente T en w_0 y se cumple que $T - \tau = Arg(\widetilde{f}'(z_0))$.

Por lo tanto se tiene que $Arg(\widetilde{f}'(z_0))$ da una medida de rotación de cada curva que pasa por z_0. Ahora el significado de $\left|\widetilde{f}'(z_0)\right|$ viene dado por:

$$\left|\widetilde{f}'(z_0)\right| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

donde $|f(z) - f(z_0)|$ representa la distancia entre $f(z)$ y $f(z_0)$ y $|z - z_0|$, la distancia entre z y z_0. De modo que si

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} < 1 \quad \Rightarrow f \text{ se está contrayendo cerca de } z_0,$$

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} > 1 \quad \Rightarrow f \text{ se está expandiendo cerca de } z_0.$$

Por lo tanto $\left|\widetilde{f}'(z_0)\right|$ es una medida de contracción o expansión cerca de z_0.

Teorema 1.2

Sea $G \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto conexo y sea $\widetilde{f} : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ dada por $\widetilde{f}(z) = u(x,y) + \boldsymbol{i}\, v(x,y)$. Una condición necesaria y suficiente para que $\widetilde{f}$ sea diferenciable en $z_0 = x_0 + \boldsymbol{i}\, y_0 \in G$, es que las funciones sean real diferenciables en (x_0, y_0) y cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Según el teorema, $\widetilde{f}'(z_0)$ puede ser representada como:

$$\widetilde{f}'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Con la explicación previa, estas ecuaciones de Cauchy tienen más sentido ahora.

1.8 Consideraciones Finales

Se presentó una secuencia de tareas para desarrollar el proceso de conexión entre el análisis real con el análisis complejo diseñadas con un doble propósito: reafirmar los conceptos previos y dar apertura a conocimientos nuevos. Estas actividades llevaron a la formulación de preguntas por parte de los estudiantes, que facilitaron la introdución hacia el conocimiento nuevo, dado que tenían expectativas de respuesta a sus propias interrogantes. Por otro lado, el grupo de los alumnos con menor rendimiento y actitud poco participativa, mostró mayor frecuencia de intervenciones verbales que antes de la actividad y mostraron mayor atención cuando hubo referencia a sus interrogantes.

Otro aspecto que hay que destacar, es que el rendimiento de los alumnos en la prueba escrita específica de evaluación del tema, después de desarrollar algunas de las actividades propuestas, fue superior al que tuvieron en la prueba de evaluación del contenido estudiado anteriormente.

Se recomienda generar conexiones y comparaciones entre las distintas áreas de la matemática, (álgebra, geometría, análisis real y complejo, análisis numérico, tecnologías) al enseñar contenidos matemáticos. Esto puede resultar una estrategia poderosa para desarrollar pensamiento matemático, puesto que es la forma de reactivar lo que ya conoce el estudiante y dar o preparar el terreno para asentar conocimientos nuevos.

El alumno, como aprendiz, difícilmente tiene los conocimientos suficientes para realizar estas conexiones, por lo que el proceso de conexión entre partes de la matemática, debe ser introducido por el docente desde los primeros cursos formales de matemática, para favorecer su comprensión profunda e integradora de todas sus áreas. En el caso del grupo donde se aplicaron, estas conexiones lograron que el estudiante estuviera más receptivo y motivado que en otras ocasiones donde la autora de este documento lo impartió de la forma tradicional.

Bibliografía

[1] Arias, F., Mora, M., Murillo, S. y Salazar, L. (2011). Informe de autoevaluación del plan de estudios de la carrera Bachillerato en Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica.

[2] Arias, F., Mora, M. y Salazar, L. (2011). Informe para Vicerrectoría de Docencia: Percepción y valoración del funcionamiento de la comisión compartida y de la carrera Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica.

[3] Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

[4] Bartle, R. y Sherbert, D.(2010). Introducción al análisis matemático de una variable. México: Limusa.

[5] Fernández, J.,Elortegui, N. y Cabrera, P. (1996). Qué piensan los profesores acerca de cómo se debe enseñar. Enseñanza de las ciencias, 14 (3), 331-342

[6] Font, V. (2011 a). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 26, 9-25.

[7] Font, V. (2007 b). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de la matemáticas. La Gaceta de la RSME, vol.10.2, 427-442.

[8] Font, V., Adam, M (2013 c). Valoración de la idoneidad matemática de tareas. Actas del VII CIBEM, Montevideo Uruguay. ISSN 2301-0797 4772.

[9] Gascón,J. (1988). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33.

[10] Godino, J. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

[11] Godino, J. D. y Batanero, C. (2008). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. Conferencia Invitada al VI CIBEM, Puerto Montt (Chile), 4-9 Enero 2009.

[12] Hill, H., Blunk, M., Charambous, Y., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction. An Exploratory Study. Cognition and Instruction, 26(4), 430-511.

[13] Larios, V., Font, V., Spíndola, P., Sosa, C., Giménez, J. (2012). El perfil del docente de Matemáticas. Una propuesta. Eureka, 27, 19-36.

[14] Margolinas, C (2013), Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22, (Vol. 1, 581-590). Oxford: ICMI

[15] MEP (2012). Ministerio de Educación Pública (2012). Programas de estudio en Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica.

[16] NCTM (2000). National Council of Teachers of Mathematics. Principles and standards for school mathematics. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics (Trad.Castellana, Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003).

[17] NCTM (2015). National Council of Teachers of Mathematics. De los principios a la acción para garantizar el éxito matemático para todos. ISBN 978-087353-774-2. Editando libros S.A.

[18] Rico,L (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado, 8 (1).

[19] Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. Journal of mathematics teacher education, 11(6), 499-511.

[20] Solís, C.,Núñez,C., Contreras.I, Rittershaussen,S., Montecinos,C. y Walker,H. (2011). Condiciones de la formación práctica de los futuros profesores. Estudios Pedagógicos XXXVII, Nº 1: 127-147.

[21] Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teachers´Knowledge and development In L. English (Ed.), Handbook of International Research in Mathematics Education (pp. 225- 236). New York, NY: Routledge.

[22] Salazar, L (2014). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto y su implementación con futuros profesores de matemática. Revista Paradigma vol XXXV (1) junio 2014 V-2.

[23] Plan de estudios de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática. Universidad de Costa Rica. (2013).

[24] Plan de estudios de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática. Universidad nacional de Costa Rica. (2016).

[25] Waisburd, G.(2009) Pensamiento creativo e innovación. Revista Digital Universitaria. Vol.10 Número 12. Diciembre, 2009.

[26] Zill, D y Shanahan, P. (2003). A first course of complex analysys with applications. Jones y Bartlett. Publishers. Inc. Canada.