
Una propuesta para la construcción de sistemas tutoriales inteligentes (STUI) para apoyar a la enseñanza de las matemáticas: proyecto STI para la estadística

Educación Matemática
Vol. 13 No. 1 abril 2001
pp.5-16

Fecha de recepción: Noviembre, 1998

Graciela Bueno,

Colegio de Postgraduados, México

Carlos A. Cuevas V.,

Departamento Matemática Educativa, CINVESTAV, México

ccuevas@enigma.red.cinvestav.mx

Resumen: *En los últimos treinta años, bajo diferentes enfoques de la enseñanza, se han realizado diversos esfuerzos para utilizar el potencial de la computadora en la educación. Sin embargo, queda aún un largo camino por recorrer para lograr obtener software educativo que realmente sea útil para un amplio rango de estudiantes y que cumpla la meta de lograr que el estudiante adquiera conocimientos a través de su uso. Con el objeto de dar un paso hacia adelante en ese sentido, en el presente artículo se introduce una propuesta para una nueva clase de Sistema Tutorial Inteligente (STI), para apoyar la enseñanza de las matemáticas, en el cual se sigue un enfoque de enseñanza de tipo constructivista, buscando que el estudiante, a través de su interacción con el sistema, construya su conocimiento acerca del dominio que se cubre. Se incluyen algunos ejemplos que ilustran cómo se podrían incorporar actividades para la enseñanza de algunos conceptos estadísticos en un STI del tipo propuesto.*

Abstract: *In the last thirty years, under different focuses of the teaching, they have been carried out diverse efforts to use the potential of the computer in the education. However, it is still a long road to walk to be able to obtain educational software that is really useful for a wide range of students and that it completes the goal of achieving the student to acquire knowledge through her use. In order to taking a step forward in that sense, presently article is introduced a proposal for a new class of Intelligent Tutorial System (ITS), to support the teaching of the mathematics, in which a focus of teaching of type constructivist continued, looking for that the student, through her interaction with the system, build her knowledge about the domain that covers. Some examples are included that illustrate how they could incorporate activities for the teaching of some statistical concepts in a ITS of the proposed type.*

Introducción

La forma como se ha realizado la utilización de la computadora en la enseñanza es muy variada, desde el uso de software para uso profesional y lenguajes de programación de propósitos generales hasta la utilización de software diseñado específicamente para la enseñanza. El software que se ha desarrollado con fines educativos es también muy diverso y ha

sido construido bajo diferentes enfoques epistemológicos. En este artículo se propone un nuevo enfoque para la construcción de software de apoyo para la enseñanza de las matemáticas, que combina dos posiciones epistemológicas muy populares en el software educativo actual: la tradicional o sensorio-empirista y la constructivista. Nuestra propuesta se encuentra en una posición intermedia entre el enfoque de un maestro “computacional” que dirige todas las acciones del estudiante e impone sus métodos de solución y un ambiente de enseñanza carente de tutor computacional que da total libertad al estudiante para interactuar con él. Se busca con este enfoque crear ambientes de enseñanza computarizados que propicien que el estudiante construya su conocimiento a través de la realización de actividades propuestas, organizadas, seriadas y evaluadas por un tutor computacional no impositivo. Un sistema tutorial inteligente del tipo propuesta funcionaría como un ayudante del profesor, y no como un sustituto del mismo, que es la posición clásica de los sistemas tutoriales inteligentes (Taylor, 1980; O’Shea y Self, 1983; Chang y Baskin, 1990).

La organización del artículo es como sigue: en la primera sección se presenta una breve descripción de los diferentes tipos de software educativo existentes, señalando sus posiciones epistemológicas y describiendo sus características; en la segunda sección se presenta la propuesta de un nuevo tipo de STI; en la tercera sección se presentan ejemplos de actividades diseñadas para la enseñanza de algunos conceptos estadísticos que se podrían implementar en un STI del tipo propuesto, finalmente en la última sección se darán algunas conclusiones.

1. Software educativo

La idea de mejorar, individualizar, y hacer más eficiente y flexible la enseñanza con una computadora ha dado origen a una gran cantidad de software educativo. Existen muchas clasificaciones del software utilizado con fines educativos (Taylor, 1980; O’Shea y Self, 1983; Hatfield, 1984; Solomon C., 1987; Allison y Hammond 1990; Kaput, 1992; Balacheff, 1994; Cuevas, 1998). En la descripción que sigue se utiliza la clasificación dada por Allison y Hammond (1990) que se basa en el modo de operación del software y clasifica el software construido específicamente con fines educativos en instrucción programada, ambientes de soporte para el aprendizaje y sistemas tutoriales inteligentes. Esta clasificación omite el software científico y de propósito general, no diseñado específicamente con fines educativos pero que se ha utilizado ampliamente en la enseñanza de las ciencias, particularmente en la ingeniería y la estadística.

Instrucción programada. Los primeros sistemas de enseñanza fueron de este tipo, se llamaron sistemas CAI por sus siglas en inglés, Computer Assisted Instrucción, que significa Instrucción Asistida por Computadora y estaban fuertemente influenciados por la teoría conductista desarrollada por Skinner (1986). Muchos de estos sistemas utilizaban la computadora como un dispositivo para transmitir información o “conocimiento” y no eran más que cambiadores electrónicos de hojas de libro. Otros, para enseñar al estudiante aspectos específicos de un dominio, implementaban la idea simplificada de que la adquisición del conocimiento está basada en el binomio estímulo-respuesta definido por Skinner. Este tipo de software incluye los trabajos del mismo Skinner, los trabajos de Ayscough y los de Palmer y Oldehoeft (O’Shea y Self, 1983).

Posteriormente, con el objeto de hacer un uso intensivo de la computadora en la enseñanza, fueron lanzados en los Estados Unidos de América dos programas muy ambi-

ciosos: los proyectos TICCIT y PLATO (Solomon C. 1987; O'Shea y Self, 1983). La mayoría del material educativo desarrollado bajo estos proyectos era bastante rígido en su estrategia de enseñanza y aglutinaba el conocimiento pedagógico y el del dominio. Cabe mencionar la excepción de los programas de matemáticas realizados en la segunda fase del proyecto PLATO por R. Davis en los que, posiblemente adelantándose a su época, planteaba abiertamente la filosofía constructivista en el diseño de lo que se llamó lecciones tutoriales por computadora y que viene a ser el antecedente más inmediato de los STI (Cuevas, 1997).

Recientemente, software más flexible que implementa instrucción programada para cursos específicos ha sido desarrollado, ver Bishop *et al.*, (1992) para una lista de algunos de ellos.

El enfoque epistemológico subyacente en los sistemas de instrucción programada es el tradicional que ve al conocimiento como un objeto, el cual puede ser entregado vía el discurso. Para individualizar la enseñanza se diseña el software con capacidad de ramificación lo que permite al estudiante dirigir su recorrido a través del sistema. Muchos de estos productos eran del tipo de instrucción y práctica. A pesar de que este tipo de software ha sido ampliamente criticado por su rigidez, la mayoría del software educativo comercial es de este tipo.

Ambientes inteligentes de soporte para el aprendizaje. El representante más conocido de estos ambientes, llamados también micromundos, es el proyecto LOGO desarrollado por Feurzeig y Papert (Papert, 1980) y que ha sido ampliamente usado en la enseñanza de las matemáticas. Otros micromundos ampliamente conocidos son el Cabri-Gèometré (Laborde, 1986), actualmente adaptado a la calculadora TI-92, Geometra (Jackiw, 1997) y Voltaville (Glase *et al.*, 1988).

Los micromundos ven a la computadora como un medio a través del cual el estudiante resuelve problemas y están basados en la idea de que el impacto real de la computadora en la enseñanza puede materializarse sólo si el estudiante tiene el control completo sobre ella, sin la interacción del profesor.

La epistemología en los ambientes inteligentes de soporte para el aprendizaje es la constructivista. El aprendizaje es visto como una propiedad emergente que surge a partir de la interacción del estudiante con los materiales de aprendizaje diseñados específicamente para este propósito (Balacheff, 1994; Hoyles, 1994), de ahí que se le dé control completo al estudiante para interactuar con la computadora. La hipótesis más importante es que el estudiante al programar en LOGO adquiere habilidades matemáticas.

La programación en LOGO puede introducir al estudiante a una forma matemática de pensamiento, la cual una vez aprendida facilitará el aprendizaje del álgebra y la geometría (Papert, 1980).

Los supuestos en este enfoque son: 1) a partir de un pequeño conjunto de objetos con operaciones elementales y sencillas para ellos, y reglas que nos dan las clases de operaciones que se pueden realizar y asociar, el estudiante puede construir nuevos objetos cada vez más sofisticados e ir definiendo herramienta más y más compleja para posteriores investigaciones (Balacheff y Kaput, 1996); Balacheff, 1994). 2) Se crea un ambiente en el cual el estudiante puede explorar simultáneamente la estructura de los objetos accesibles, sus relaciones y las representaciones que los hacen accesibles (Thompson, 1985, Hoyles 1993). 3) El aprendizaje de métodos de solución es producido como un efecto colateral de la interacción del estudiante con las herramientas del micromundo que están diseñadas específicamente para sugerir buenas estrategias de solución; y 4) el estudiante es capaz de aplicar el conocimiento adquirido en el micromundo al mundo real.

Sistemas tutoriales inteligentes. En estos sistemas, se implementa un modo de enseñanza flexible a través del uso de algún tipo de mecanismo basado en la evaluación de las respuestas del estudiante a preguntas propuestas por el sistema. Dependiendo de ésta evaluación se decide si presentar al estudiante nuevo material o presentarle material remedial. En el sistema se trata de anticipar todos los errores que el estudiante pueda cometer y se especifica material remedial para cada todas las posibilidades, basado en una idea de lo que pudieron ser las concepciones erróneas que tuvo el estudiante y que causaron el error. Para guiar apropiadamente la interacción del sistema con el estudiante se implementa internamente un modelo de error del estudiante, que se anticipa a todos los posibles errores y aciertos, que el estudiante-usuario podría tener al intentar resolver un determinado problema (Anderson 1986; Burns y Capps, 1988). Existe una gran variación en el nivel de detalle que posee el modelo del estudiante en los diferentes sistemas tutoriales inteligentes. Algunos de los ejemplos de sistemas tutoriales inteligentes más conocidos son: Scholar (Carbolell, 1970), GUIDON (Clamcey, 1979) y los tutores de Geometría y de LISP desarrollados por Anderson (1986 y 1990). Una de las principales características de los sistemas tutoriales inteligentes es la separación que hacen del conocimiento tutorial del conocimiento del dominio que enseñan.

La epistemología en que se basan es la tradicional o sensorio empirista (Aebli, 1995) y tratan de aplicar una didáctica de tipo discursiva. Bajo esta epistemología, el conocimiento se ve como un tipo de facilidad que puede ser entregada, y que se transmite vía el discurso a través de la computadora y la imitación de las buenas soluciones proporcionadas por el tutor.

La intensa investigación que se ha venido realizando en torno a los sistemas tutoriales inteligentes ha dado origen a un amplio espectro de aplicaciones de sistemas tutoriales inteligentes en diversas áreas y con distintos grados de desarrollo en sus componentes.

2. Una nueva clase de sistemas tutoriales inteligentes

Actualmente, es casi un consenso entre los educadores que el estudiante debe construir su propio conocimiento (MTA, 1998). Si la computadora se va a utilizar para mejorar la educación, la anterior idea debería considerarse en el diseño de nuevos ambientes educativos.

La epistemología constructivista desarrollada por Piaget describe la adquisición de conocimiento en el individuo como un proceso continuo de construcción de estructuras cognitivas. Las estructuras cognitivas son sistemas organizados de representaciones mentales de acciones (operaciones) relacionadas por un modo de ejecución y que tienen asociado un resultado esperado. La construcción de nuevas estructuras o modificación de las que se tienen, es iniciada por la aparición de una situación que no puede ser soportada por las estructuras cognitivas con que cuenta el individuo, esto es, por la aparición de una situación desequilibrante. Para construir su conocimiento, el estudiante tiene que involucrarse en algún tipo de actividad que derive hacia la adquisición de una operación. Un concepto puede ser construido a través de la adquisición y conexión de sus operaciones constituyentes y es la organización de grupo de estas operaciones la que la da la flexibilidad para su aplicación en una variedad de situaciones. La flexibilidad alcanzada por la organización de las operaciones en grupos contrasta con la rigidez de los hábitos adquiridos en la educación tradicional.

Este enfoque de la educación es el que se utiliza en los ambientes de soporte para el aprendizaje, pero la apertura de dichos ambientes no garantiza que el estudiante realizará las actividades necesarias para adquirir un concepto en particular y explorará sus relaciones, ni garantiza que el estudiante será capaz de aplicar los conceptos adquiridos en el micromundo hacia el mundo real. Es conveniente que el maestro guíe al estudiante en este proceso de construcción de conocimiento a través de planear y seriar las actividades que podrían llevar al estudiante a interiorizar las operaciones relacionadas a un concepto o noción y consecuentemente a la asimilación del mismo. El maestro puede también ayudar a extender el conocimiento a otros problemas del mundo real y a dar énfasis a ciertos aspectos.

Extrayendo los mejores elementos tanto de los sistemas tutoriales inteligentes como de los ambientes de soporte para el aprendizaje, se propone un sistema tutorial inteligente que en su diseño propone un enfoque de enseñanza de tipo constructivista. Considerando las actuales limitaciones del conocimiento acerca del funcionamiento de la mente, apoyamos la idea de no tratar de desarrollar un sistema de cómputo educativo que sustituya al maestro sino construir uno que sea su aliado en el proceso de enseñanza, una especie de ayudante del maestro, dejando al maestro la responsabilidad de analizar la conducta del estudiante y la toma de decisiones específicas para guiar las actividades del estudiante conjuntamente con el sistema.

Al diseñar sistemas educativos basados en la computadora, nuestra preocupación primaria no ha de estar con una nueva tecnología deslumbradora, ni debemos extraviarnos románticamente por metas expectativas y poco realistas como reemplazar a maestros, libros de texto, o incluso las actividades físicas y sociales de estudiantes a través de la interacción de la estudiante-máquina (Reusser, 1993)

Las principales características que tal sistema tutorial inteligente debería de tener son las siguientes:

- El sistema debería de ser capaz de operar de un modo dual: como un ambiente exploratorio en donde el estudiante pudiera investigar sus ideas acerca de un cierto tema con la ayuda de las herramientas que le proporciona el sistema, y un ambiente tutorial en donde actividades que pueden ayudar al estudiante a construir un concepto se presentan de manera gradual y en cierta secuencia, de una manera similar a como lo haría un maestro real, lo anterior, bajo la concepción de un planteamiento didáctico transparente.
- En el modo tutor de operación el orden de presentación de las actividades sería propuesta por el tutor inteligente del sistema, el cual debe ser flexible y adaptable a las necesidades del estudiante. Dicho orden puede quedar implícito en la organización y agrupación de las lecciones en el tutor, por ejemplo, a través de unidades, lecciones y actividades incluidas en las lecciones.
- El tutor puede proporcionar ejemplos, ejercicios de apoyo y explicaciones para ayudar al estudiante en la realización de las actividades propuestas, si éste solicita ayuda, adaptando de este modo la enseñanza a las necesidades del estudiante. La ayuda que proporcione el sistema nunca sería impuesta. La experiencia docente nos lleva a proponer el uso del principio de ayuda mínima planteado por Aebli (1995).

- En el STI la ayuda podría estar organizada en varios niveles, bajo la idea de que a veces basta con un ligero “empujón” para que el estudiante pueda resolver un problema o realizar una actividad. Si esta primera ayuda no es suficiente, el estudiante puede recurrir al siguiente nivel de ayuda, y así continuar, con explicaciones más detalladas e inclusive ejercicios de menor nivel de dificultad al propuesto. En este sentido el STI no deberá en ningún momento resolver el problema planteado, sino proporcionar ayuda al estudiante para que éste pueda resolverlo.
- El STI puede tener un cierto “modelo de error del estudiante” constituido por una base de datos que contenga mensajes de errores que estadísticamente son más frecuentes de ocurrir para las diferentes actividades que se proponen y que el tutor puede utilizar al detectar un error. Este modelo de error del estudiante desde luego no cubre todas las posibilidades de errores que se pueden cometer, pero esto no es vital para el sistema, ya que en este enfoque el STI no es un sustituto del maestro, sino un compañero que comparte con el maestro la responsabilidad de la enseñanza, y es el maestro quien debe de tomar las decisiones de enseñanza.

Un ejemplo de como puede construirse dicho modelo de error del estudiante se muestra para el caso del cálculo de la media a partir de un conjunto de datos sin agrupar. La fórmula para obtener la media es la siguiente:

$$\text{Media} = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) / n$$

Al tratar de obtener la media el estudiante puede cometer una serie de errores de tipo numérico de entre los cuales los más comunes se podrían clasificar en tres categorías: a) errores que causan una falla al calcular el numerador de la fórmula para obtener la media; b) errores que causan una falla al calcular el denominador de la fórmula para obtener la media; c) errores aritméticos al evaluar el cociente para calcular la media.

Entre los errores de la categoría a) se pueden considerar los siguientes: a.1) sumar una sola vez los valores que se repiten; a.2) haber olvidado considerar un valor en la suma que constituye el numerador de la fórmula para obtener la media; a.3) se cometió un error de localización del punto decimal en alguno(s) de los valores al calcular la suma de los mismos; a.4) se cometió un error aritmético al calcular la suma.

Entre los errores de la categoría b) se pueden considerar los siguientes: b.1) se tuvo una observación cero y no se consideró cuando se contó el número de observaciones; b.2) no se consideraron como distintas observaciones los valores repetidos, aquí se pueden tener a su vez dos casos, b.2.i) no se sumaron todas las apariciones de valores repetidos, y b.2.ii) se sumó sólo una vez las apariciones de valores repetidos; b.2.iii) se olvidó dividir entre el número de datos.

Entre los errores de la categoría c) se pueden considerar los siguientes: c.1) se cometió al menos un error aritmético al obtener el numerador; c.2) se cometió un error aritmético al calcular la división.

Los errores anteriores pueden combinarse creando un árbol de posibles errores muy grande e incluso en algunos casos imposible de discernir. En general, el árbol de posibles errores que podría cometer el estudiante puede ser tan grande que resulte inmanejable en muchos casos, complicando innecesariamente al tutor. Evidentemente los errores son más fáciles de detectar, independientemente del medio, si el problema se divide o dosifica adecuadamente. Por ello, en la propuesta de ITS que se hace, los problemas se dosifican o si el problema propuesto es muy complejo¹ este se subdivide en subproblemas cuya solución nos de la solución al problema. El modelo de error del estudiante sólo considera los errores más comunes. Para el ejemplo descrito serían los detallados en las categorías a), b) y c).

- En el modo tutor, para cada concepto a enseñar a través del STI se deberá de plantear una serie de actividades cuyo propósito es guiar al estudiante para que a través de sus acciones adquiera aquellas operaciones (acciones interiorizadas) involucradas en el concepto. Es la responsabilidad del diseñador del STI identificar tales operaciones y conectarlas siguiendo la idea de su organización en grupos. Así las actividades propuestas deben contemplar la realización de operaciones directas e inversas, adicionando a lo anterior diversas formas de solución con el fin de promover la asociatividad de las propias operaciones; en este sentido se propone seguir el modelo didáctico de Aebli. La motivación para la realización de las actividades debería de ser la solución a problemas planteados por el tutor que sean de interés para los estudiantes de acuerdo a su nivel escolar y social. En síntesis, esta propuesta lleva consigo una tarea de investigación tanto en psicología cognitiva como en teoría didáctica. En este sentido coincidimos con Reusser (1993) quien propone a la computadora como una herramienta cognitiva
- El STI pondría a la disposición del estudiante las herramientas incluidas en el sistema para las actividades propuestas en el modo tutor, para que el estudiante trabaje con el sistema en el modo exploratorio. Así el estudiante podría investigar *ad libitum* las operaciones relacionadas con los conceptos y podría aplicarlas a conjuntos de datos provenientes de problemas planteadas por el propio estudiante.
- El diseño de las actividades debería contemplar, en lo posible, el uso de los cuatro sistemas de representación más utilizados en matemáticas: aritmético o numérico, algebraico o simbólico, gráfico, y real o físico, intentando, en la medida de lo posible, que cada vez que se realice una actividad en uno de los registros, esta se vea reflejado en los diferentes registros involucrados, además de plantear ejercicios que promuevan la articulación entre ellos.

El ambiente de aprendizaje con las características arriba mencionadas es un tutor inteligente ya que en uno de sus modos de operación, el modo tutor, las actividades del estudiante con el sistema son dosificadas y organizadas de un modo similar al que sería

¹ La complejidad del problema depende del nivel de estudios del estudiante y del grado taxonómico de complejidad del mismo problema.

proporcionado por un maestro experimentado (tutor); esto se logra a través de incorporar conocimiento tutorial al sistema. En este sentido, más que buscar la inteligencia en el tutor lo que se desea es contribuir al desarrollo de la inteligencia en el estudiante. Es inteligente porque es capaz de resolver problemas y contestar preguntas de su dominio (Grandbastein, 1992; Balacheff, 1994), y es de tipo constructivista, no sólo por las facilidades proporcionadas por el sistema para que el estudiante realice actividades en el modo exploratorio, sino también porque su diseño es compatible con la idea de que el estudiante construya su conocimiento a través de la interiorización de actividades y la organización de operaciones en estructuras flexibles, esto es, en estructuras cognitivas. Una primera experiencia en esta dirección ha sido dada en el STI "LIREC" (Cuevas, 1994), para la enseñanza de la línea recta, el cual ha comprobado su eficacia al ser utilizado en el sistema tradicional de enseñanza (Cuevas, 1996).

3. Algunas actividades para un sistema tutorial inteligente en estadística

En esta sección se ilustra con dos ejemplos la forma como el enfoque de actividades que de acuerdo al modelo didáctico previamente establecido y anteriormente señalado puede desarrollarse o aplicarse en un sistema tutorial inteligente. Los ejemplos hacen referencia a dos de los conceptos básicos en la estadística descriptiva, la moda y la media. Sin embargo, la aparente simplicidad de los conceptos, hace que sean tratados generalmente de manera superficial por los maestros, por ello, es frecuente que los estudiantes no entiendan la esencia de dichos conceptos y hagan un mal uso de ellos (Torma, 1995).

Las actividades presentadas pueden ser utilizadas por el estudiante de manera independiente para construir sus propias ideas acerca de las medidas de tendencia central y son seriadas sólo cuando el sistema es utilizado en modo tutor.

Actividades propuestas para el concepto de Moda. Las actividades propuestas al estudiante para la adquisición del concepto de moda podrían ser las siguientes:

1) Presentación de problemas sencillos e interesantes para el educando, en los que surja de manera intuitiva la necesidad de localizar el valor más frecuente como solución al problema propuesto. Por ejemplo, se podría plantear al estudiante la siguiente situación:

Un distribuidor de calzado de dama desea adquirir varios modelos de calzado para vender en un mercado itinerante. Como no desea quedarse con el calzado que no se venda, por ser de número (talla) no común, planea adquirir varios modelos pero sólo de lo(s) número(s) más comunes. Para conocer los números que le conviene comprar realiza una encuesta entre un grupo de mujeres que regularmente asisten al mercado, ¿qué debería hacer con los datos que obtenga para resolver su problema?.

Se espera que el estudiante, como resultado de su interés por resolver el problema, se de cuenta de la necesidad de contar con un número representativo de un conjunto de datos del tipo de la Moda. El nombre "Moda" asociado al número encontrado como solución del problema y la definición tradicional de la misma, se darían al estudiante después de que éste hubiera resuelto el problema y hubiera solicitado al tutor la evaluación de su respuesta y constituye una parte de la actividad tutorial del sistema. Diferentes problemas

de creciente grado de dificultad serán presentados al estudiante a solicitud del mismo, hasta que el propio estudiante considere que ha entendido el concepto.

2) Una vez reconocida la importancia de una medida de tendencia como la moda, se procede a plantear una actividad para su obtención numérica. Se plantean problemas en donde se solicita localizar la moda, aclarando que se busca con ello el valor más frecuente del conjunto de datos. Los problemas se presentarían en un orden de creciente grado de dificultad tanto para conjuntos de datos dados de manera explícita como para conjuntos de datos dados de forma agrupada. Se indicaría en forma de mensaje la expresión de la fórmula para la obtención de la moda. Con ello se espera que el estudiante adquiera un grado aceptable en el cálculo de este valor en problemas rutinarios.

3) Para practicar la operación directa de obtención de la moda e inducir la reflexión sobre su relación con los valores individuales en el conjunto de datos que representa, se propone una actividad en la que para un mismo problema se presentan variaciones ligeras del conjunto de datos, como pueden ser: incrementar o disminuir el valor de uno o más datos que no coinciden con la moda, agregar uno o dos datos más que pueden o no coincidir con la moda, eliminar uno o dos datos que pueden o no coincidir con la moda, agregar algunos datos de modo que la moda cambie, agregar o eliminar algunos datos de modo que haya dos modas, etc. Se solicite al estudiante que obtenga la moda para cada una de las variantes y que analice por qué en unos casos la moda cambia y en otros no. Después de haber completado satisfactoriamente estas actividades para conjuntos de datos listados explícitamente se propondrán actividades similares para conjuntos de datos agrupados. Esto es con el propósito de crear situaciones adidácticas en el sentido que Brosseau (1997) da al mismo con el fin de lograr la interiorización del concepto.

4) Con el fin de hacer notar que el valor de la moda es independiente del número de datos que se tiene, se propone una actividad en la que se solicite la obtención de la moda para varios conjuntos de datos que poseen el mismo valor de la moda, y que coinciden en la mayoría de sus datos pero tienen 5, 4, y 3 datos agregados o eliminados. A continuación se solicita nuevamente la operación de obtención de la moda para varios conjuntos de datos muy distintos pero que tienen igual valor de la moda. Finalmente, se solicita la obtención de la moda para conjuntos de datos muy parecidos pero que tienen diferentes valores de la moda. Estas actividades se plantean para conjuntos de datos listados en forma explícita y posteriormente para conjuntos de datos agrupados.

5) Para inducir la adquisición de la operación inversa a la obtención de la moda se plantea una actividad en donde se propone un valor de la moda y se solicita al estudiante proporcione tres conjuntos de datos diferentes que posean ese valor de la moda. Se solicita primero proporcione los conjuntos de datos listando de manera explícita sus elementos y posteriormente se solicita proporcione conjuntos de datos expresados en forma agrupada.

6) Con el objeto de promover, en el alumno, la articulación entre las diversas representaciones del concepto matemático ilustrado, se propone al estudiante que construya el diagrama de barras (histograma) y localice el valor de la moda en el despliegue gráfico de un conjunto de datos. La actividad se repetiría con distintos conjuntos de datos dados tanto en forma explícita como agrupada. También se propone la repetición de las actividades 3 y 4, pero ahora solicitando también la localización gráfica de la moda. En las actividades, el tutor haría comentarios acerca de la forma del gráfico para los casos de una y dos modas. Se exhibiría simultáneamente el valor numérico, la localización gráfica y la expresión matemática de la moda. Para promover la articulación entre las representaciones, no es suficiente con lo anterior es necesario proponer actividades que nos lleven de una representación a

la otra y viceversa. Así se solicitaría primero al estudiante que proponga cambios en el conjunto de datos, sea éste dado en forma de conjunto o agrupada, y se mostraría el efecto que sus cambios producen en la representación gráfica. Posteriormente, se solicitará al estudiante haga cambios en la representación gráfica del conjunto de datos y se mostrará el efecto que tal cambio produciría en el conjunto de datos dado en la representación en forma de conjunto o agrupada. Los efectos de los cambios que haga el estudiante se podrían mostrar de inmediato, conforme el estudiante vaya realizando sus cambios, o hasta que éste haya completado sus cambios y solicite ver el efecto en la otra representación.

8) Posterior a la realización de las actividades diseñadas para los conceptos de la mediana y la media, se proponen actividades que relacionen estas tres medidas tanto en la representación numérica como en la gráfica, y que relacionen la forma de la distribución de los datos con las diferentes posibilidades de localización de las tres medidas de tendencia central.

Para promover la asimilación del concepto de media y mediana y desviación estandar se han elaborado una gran cantidad de actividades. Todas ellas bajo el esquema didáctico descrito en la páginas anteriores. Por la brevedad que debe conservar este artículo sólo se ha descrito en detalle parte de las actividades mediante el cual se introduce al estudiante el concepto de la moda:

Conclusiones

Un sistema tutorial inteligente para apoyo en la enseñanza de las matemáticas y basado en una epistemología constructivista se ha propuesto. Este sistema difiere de los STI tradicionales en dos puntos fundamentales: 1) no pretende sustituir en forma total al profesor, 2) no incluye un modelo de estudiante para el sistema. Este enfoque de sistema computacional educativo podría ser aceptado por los maestros, que verían en el sistema no a un sustituto que se opone a su labor, sino como a un colaborador que le apoya y facilita sus tareas educativas. De hecho como se comprobó en el antecedente más inmediato LIREC (Moreno, 1996), es posible descargar parte considerable del tiempo frente a grupo en el sistema sin merma del aprendizaje. Por otra parte, el STI Tutorest, es una propuesta para introducir a la computadora en el aula. Aunque existen diversas formas de introducir a la computadora en el aula, verbigracia: micromundos; uso de manipuladores simbólicos; enseñanza-aprendizaje de ciertos lenguajes de computación para la adquisición de habilidades matemáticas, nuestra propuesta es diferente a ellas en muchos sentidos, sin embargo creemos que una propuesta no invalida a otra, por el contrario creemos que se complementan al ser todas alternativas de campos de investigación importantes que de alguna forma nos ofrecen en la computadora una valiosa herramienta que nos auxilia en el difícil problema de la enseñanza de las matemáticas

Nuestro trabajo en el diseño de este modelo de sistema conlleva a una investigación en psicología cognitiva y a proponer una teoría didáctica, en lugar de tratar de establecer una teoría del conocimiento como los sistemas tradicionales intentan al proponer un modelo de estudiante.

En la implementación de la enseñanza, con un enfoque de tipo constructivista, de tan solo un concepto matemático simple, hay una gran cantidad de trabajo e investigación involucrado. Entre estas actividades podemos anotar las siguientes: 1) Proponer problemas ricos en el análisis de conceptos matemáticos e interesantes para los alumnos, 2) reconocer las operaciones involucradas en cada concepto particular, 2) identificar las relaciones entre operaciones reconocidas; 3) definir las actividades que se sugerirán al estu-

diente para inducirlo a interiorizar las operaciones involucradas en el concepto; 4) definir las actividades que podrían inducir al estudiante a reconocer las conexiones entre las operaciones; 5) definir actividades para la adquisición del concepto en diferentes sistemas de representación, si los hubiera, por ejemplo, simbólico y gráfico; 6) en caso de existir varios sistemas de representación, diseñar actividades en los que las acciones en uno se reflejen en los demás y exhibirlos de manera simultánea, etc..

Finalmente tenemos la firme creencia que el desarrollo de ambientes computacionales como el propuesto, ayudan al estudiante a construir estructuras cognitivas alrededor de conceptos centrales en dominios específicos lo que evidentemente podría ser de gran utilidad tanto para el profesor como para el estudiante.

Referencias

- Aebli, H. 1958. *Una Didáctica Fundada en la Psicología de Jean Piaget*. Edit. Kapelusz S.A., Buenos Aires.
- Aebli, H. 1995. *Doce Formas de Enseñanza: Una Didáctica Basada en la Psicología*. 2a. Edición. Marcea S. A. de Ediciones. Madrid. España.
- Allison, L. and N. Hammond. 1990. "Learning Support Environments: Rationale and Evaluation". *Computers Education* 15, No. 1-3: 137-143.
- Anderson, J. and B. Reiser. 1986. "The LISP Tutor". *Byte* 10:159-175.
- Balacheff, N. 1994. "Artificial Intelligence and Real Teaching". In *Learning Through Computers: Mathematics and Educational Technology*. C. Keitel and K. Ruthvens, eds. Springer Verlag, Berlin, 131-158.
- Bishop, P. M. Beilby and A. Bowman. 1992. "Computer Based Learning in Mathematics and Statistics". *Computers Education*, 19, No. ½: 131-143.
- Brousseau, Guy. 1997. "Theory of Didactical Situations in Mathematics". Edited and Traslated N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield. Kluwer Academic Publishers.
- Carbonell, J. R. 1970. "Mixed-Initiative Man-Computer Instructional Dialogues". BBN Rep. N. 1971. Bolt Beranek and Newman, Inc., Cambridge, Mass.
- Chan, Tak-Wai; Baskin, Arthur B. (1990). Learning Companion System., edited by Claude Frasson, Gilles Gauthier: "Intelligent Tutoring System": at the crossroad of artificial intelligence and education: Ablex Publishing Corporation. Norwood, New Jersey, USA.
- Clancey, W. J. 1979. "Transfer of Rule-Based Expertise Through a Tutorial Dialogue". Rep. N. STAN-CS-769. Computer Science Dept., Standford University, Ca.
- Cuevas, C. A. 1994. "Sistema Tutorial Inteligente LIREC". Tesis Doctoral. Depto. Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.
- Cuevas, C. A. 1996. "Sistemas Tutoriales Inteligentes". *Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa*. Editor F. Hitt. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cuevas C. A. 1998. "Hacia una Clasificación de la Computación en la Enseñanza de las Matemáticas". *Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa II*. Editor F. Hitt. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V.
- Glase, R., K. Raghavan and L. Shauble. 1988. "Voltaville, a Discovery Environment to Explore the Laws of DC Circuits". In *Proceedings of the ITS-88 Conference* (Montreal, Canadá).
- Grandbastien, M. 1992. "Intelligent Tutoring Systems on Scientific Subject: Are Prototypes Ready for Broad Experimentation?". *Computer Education*, 18 No. 1-3: 63-70.
- Jackiw, Nicholas (1991-97), The Geometer's Sketchpad, Dynamic Geometry for Windows, version 3.0. Visual Geometry Project. Ed. Key Curriculum Press.
- Hatfield, L. Larry. (1984) Computers in Mathematics Education, 1984 Yearbook. Edited by Viggo P. Hansen and Marilyn J. Zweng. National Council of Teachers of Mathematics. USA.
- Kaput, J. 1992. "Technology and Mathematics Education". In *Handbook of Research on*

- Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* D. A. Grouws, ed. MacMillan Publishing Co., New York, 515-556.
- Laborde, J. M. 1986. "Proposition d'un Cabri-géomètre, Incluant la Notion de Figures Manipulables". *Sujet d'année Spéciale ENSIMAG*, France.
- Lemeris, T. 1990. "Integrating LOGO in the Regular Mathematics Curriculum". In *Proceedings of the PME-XIV Conference* (México): 267-272.
- O'Shea, T. and J. Self. 1983. *Teaching and Learning with Computers: Artificial Intelligence and Education*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
- Papert S. 1980. *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York Basic Books, New York.
- Reusser, K. 1993. "Tutoring Systems and Pedagogical Theory: Representational Tools for Understanding, Planning, and Reflection". In: *Problem Solving. Computers and Cognitive Tools*. S. P. Lajoie & S. J. Derry, eds. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, N. J..
- Skinner, B. F. 1986. *Sobre el Conductismo*. Ed. Orbis, Barcelona, España.
- Solomon, Cynthia (1987). *Entornos de Aprendizaje con Ordenadores; Una reflexión sobre teorías del aprendizaje y la educación*, Paidós España.
- Taylor, Robert P. (1980). *The Computer in the School*. Teachers College Press. USA
- Torma, C. 1995. "Dificultades del Alumnado Respecto a la Media Aritmética". *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Num. 5, Año II, Julio, España.