¿División o clasificación? O como P puede ser T

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Fecha de recepción: Julio, 1998

Educación Matemática
Vol. 13 No. 1 abril 2001
pp.17-30

Pedro Huerta,
Universitat de València, España
Departamento de Didáctica de la Matemática
Manuel.P.Huerta@uv.es

Resumen: *Uno de los procesos matemáticos en el que se implican los estudiantes en las clases de matemáticas es el proceso de clasificar objetos matemáticos. En las clases de geometría el proceso de clasificación suele darse en términos de lo que la lógica llama división y que no es otra cosa que una clasificación disjunta de las distintas clases que agrupan a esos objetos. Por otra parte, la clasificación suele presentar en los estudiantes dificultades de comprensión de las relaciones que se establecen entre las clases de objetos clasificadas, ya sea durante el proceso de clasificación o una vez terminado éste. En este artículo nos ocupamos del análisis del proceso de clasificación de formas cuadriláteras y construimos un sistema matemático de signos, identificando además diferentes estratos de este sistema matemático de signos, que nos permite interpretar las relaciones que establecen los estudiantes entre distintas clases de cuadriláteros mientras se lleva a cabo la clasificación y cuando ésta concluye.*

Abstract: *Usually in mathematics classroom the students are involved in several mathematical processes like classify mathematical objects. Often in geometrical classroom the process of classify is presented as a division process of one set in disjoint subsets or classes. Classify is also difficult to understand by the students mainly the relationships between the classified objects, both when the process is carrying on and when the process is finished. In this paper we try to analyze the process of classify quadrilaterals and we build a mathematical sign system, identifying also several forms of this mathematical sign system, that let us to interpret the relationships between several quadrilateral built by the students both when the process is carrying on and when the process is finished.*

Introducción

Es habitual que en algunos procesos de organización de objetos matemáticos se utilicen dos nociones que suelen darse como sinónimas. Los resultados de estos procesos suelen expresarse en proposiciones que usan términos como, por ejemplo: "Los paralelogramos *se dividen en* ..." o "Los paralelogramos *se clasifican en* ...", donde los procesos de dividir o clasificar tienen como significados los que se derivan de las definiciones siguientes:

Dividir es distribuir un todo en las partes en las que lo integran. Por ejemplo, los triángulos pueden dividirse: a) según sus lados en equilátero, isósceles y escaleno y b) según sus ángulos en acutángulo, obtusángulo y rectángulo.

Clasificar es la operación inversa a la división. La clasificación consiste en la agrupación de individuos en especies y géneros cada vez superiores para llegar a un todo.

Es habitual argumentar, también, que la división es propia de las ciencias deductivas. La clasificación, se dice, es propia de las ciencias inductivas. Podemos añadir, además, que para dividir debemos conocer el todo y las partes que lo integran y proceder a la división, mientras que para clasificar debemos ir conociendo las partes y agrupar hasta llegar al todo.

¿La organización de los cuadriláteros por los estudiantes se hace en términos de división o de clasificación? Si se sigue alguna de estas dos opciones, ¿qué significados se asocian a expresiones como: se dividen en..., se clasifican en...? ¿Los estudiantes dividen o clasifican? En cada caso, ¿cómo expresan las relaciones que se establecen?

La clasificación, desde el punto de vista del proceso de enseñanza y aprendizaje, es, a nuestro modo de ver, algo más que la división pues dota de una mayor riqueza de significados al proceso de organización que el que proporciona el proceso de dividir. El objetivo de este artículo es pues discutir estos términos y los significados asociados y observar a los alumnos cuando razonan en situaciones que solicitan organizar el conjunto de los cuadriláteros.

El orden parcial en el conjunto Q de los cuadriláteros. La clasificación de cuadriláteros en un SMS[1] no geométrico

Vamos a comenzar nuestro trabajo buscando un SMS_1 en el que expresar la organización de los objetos matemáticos conocidos como cuadriláteros. Partiremos del conjunto infinito Q de las formas planas de 4 lados. En Q, definimos la siguiente relación binaria:

$\forall$ p, q $\in$ Q, diré que p $\aleph$ q si y sólo si p y q comparten las mismas propiedades[2].

[1] En lo que sigue, vamos a distinguir dos sistemas matemáticos de signos, en adelante SMS (ver por ejemplo, Puig, 1994 y Filloy y Lema, 1996) en los que se pueden expresar las relaciones entre cuadriláteros y que dan lugar a su organización. Un SMS, que lo distinguiremos con el subíndice 1, hará referencia al uso de un sistema matemático de signos del álgebra de conjuntos para expresar textos (Puig, 1994) que den cuenta de las relaciones entre diferentes clases de objetos y un SMS, que lo distinguiremos con el subíndice 2, hará referencia al uso de un sistema matemático de signos de la geometría plana para expresar textos que den cuenta de las relaciones entre las diferentes figuras de cuatro lados.

[2] Podríamos haber escrito "características" o "propiedades matemáticas" en lugar de propiedades a secas. Nos hemos decidido por propiedades, en el sentido más amplio de la palabra y no solamente en el sentido matemático estricto, porque el que aplica la relación binaria es quien determina que tipo de propiedades está usando para juzgar si dos objetos de Q están relacionados o no. De esta manera, estudiantes de educación infantil, primaria, secundaria..., establecen relaciones de este tipo con argumentos formalmente diferentes. También se puede definir p $\aleph$ q exigiendo que p y q cumplan la misma definición, pero el proceso de definir las clases de equivalencia (cuadriláteros) es posterior al establecimiento de las mismas, por lo que aquí carece de sentido.

Como $\aleph$ es una relación binaria de equivalencia, parte o divide el conjunto Q en sucesivas clases de equivalencia generadas por las diferentes relaciones $\aleph$[3] que se van estableciendo. Así, los distintos conjuntos cociente están formados por todas las clases de equivalencia generadas, respectivamente, por una figura plana de cuatro lados. Estas clases de equivalencia, que parten el conjunto Q, son las clases de los cuadriláteros usuales. De estas sucesivas particiones se deriva una organización o división evidente de la que más tarde hablaremos.

Supongamos el proceso al revés. Supongamos que el conjunto Q está cubierto[4] por un conjunto finito Θ de clases de cuadriláteros:

> Θ = {Cuadrilátero (Q), Cuadrilátero Convexo (Qc), Cuadrilátero Cóncavo (Qv), Trapecio (T), Trapezoide (Tz), Trapecio Rectángulo (Tr), Trapecio Isósceles (Ti), Paralelogramo (P), Romboide (Rd), Rombo (Rb), Rectángulo (R) y Cuadrado (C)}[5].

El conjunto Θ quiere ser organizado, para lo que definimos una relación $\mathfrak{R}$ de la siguiente manera:

> Si A y B son de Θ, decimos que A $\mathfrak{R}$ B si A está contenido en B. O bien, diremos que A $\mathfrak{R}$ B si, una de las dos: [6]
> a) Para todo q de A, q es de B.
> b) Para todo q de A, q, que tiene una definición por pertenecer a A, verifica la definición de B [7].

Es evidente que $\mathfrak{R}$ establece una relación binaria de orden en el conjunto Θ. Como además no todos los elementos de Θ son comparables (si es falso que A $\mathfrak{R}$ B no implica necesariamente que sea cierto que B $\mathfrak{R}$ A) la relación de orden $\mathfrak{R}$ es una relación de orden parcial en Θ.

Con la introducción de la relación de orden anterior, el conjunto Θ puede ser ordenado. Ordenar, en este caso, significa comparar entre sí las clases que contiene el

---

[3] El proceso que me lleva hasta aquí tiene sus raíces en la geometría de los objetos matemáticos que se están comparando para ser organizados en clases de equivalencia. Por tanto, los textos que se pueden producir adquieren un sentido totalmente geométrico: "esta figura es de la clase A porque tiene las mismas características o propiedades que un representante de la clase A".

[4] Estamos suponiendo que los únicos cuadriláteros que conocemos son los que están en el conjunto Q y que éstos queremos organizarlos. Usamos la noción de cubrimiento y no partición, porque hasta que no termine el proceso de organización no sabremos el resultado del mismo. De todas formas, una partición es un cubrimiento en subconjuntos disjuntos.

[5] Podríamos haber considerado, además de éstas, otras clases de cuadriláteros que no están en este conjunto. Estas clases, que no son propias de la tradición escolar en nuestro país, aportan una mayor riqueza de propiedades en el estudio de las figuras planas de cuatro lados y en el conjunto de relaciones entre ellas. Nos referimos a la clase conocida como Cometa y a la clase conocida como Flecha.

[6] En ningún momento queremos considerar estas dos condiciones como excluyentes. Es obvio que son equivalentes. Sólo queremos hacer notar que para comparar clases en Θ podemos usar, indistintamente, la condición a) o la condición b).

[7] Es evidente que la relación $\mathfrak{R}$ está bien definida. La condición a) usa representantes de las clases A y B establecidas previamente por una relación de equivalencia $\aleph$. La condición b) usa las definiciones establecidas después de construir las clases de equivalencia A y B.

conjunto Θ y establecer una jerarquía entre ellas. Los diferentes niveles jerárquicos serán el resultado de la aplicación reiterada de la transitividad de la relación $\mathfrak{R}$.

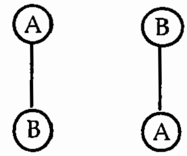


Figura I. Elementos del sistema de representación de $\mathfrak{R}$.

Sistema de representación del orden parcial en Θ

Para el par (Θ, $\mathfrak{R}$) definimos un sistema de representación que está constituido por un diagrama en el que sus elementos están representados por círculos, de tal manera que dos elementos comparables de Θ por $\mathfrak{R}$ están relacionados en el diagrama por una línea que conecta esos elementos (Figura I).

Si A $\mathfrak{R}$ B en Θ, decimos que A "está más bajo que" B en el digrama.

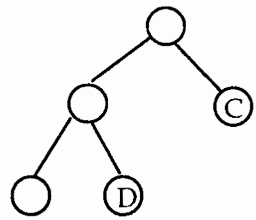


Figura II. Sistema de representación de una relación de orden parcial

"Estar más bajo que" es, evidentemente, una relación de orden para los elementos de este sistema de representación, y puesto que estar más arriba o más abajo no implica necesariamente que dos elementos del diagrama están relacionados (por ejemplo D y C en el diagrama de la figura II), esta relación de orden es, también, una relación de orden parcial.

Si los elementos de Θ y del diagrama son los mismos, las relaciones de orden parcial consideradas, $\mathfrak{R}$ y "estar más bajo que", son equivalentes y por lo tanto el diagrama puede considerarse como una representación de la relación de orden parcial en Θ.

Así pues, dado que el par (Θ, $\mathfrak{R}$) puede representarse por medio de un diagrama, los objetos que sean ordenables en Θ estarán ordenados en el diagrama por la línea o sucesión de líneas que los une, determinando la existencia y el tipo de relación entre dichos objetos de Θ su posición relativa en el diagrama. En consecuencia, se pueden reconocer diferentes niveles jerárquicos, entre los diferentes objetos comparables de Θ, por la posición que ocupan en el diagrama debida a la relación "estar más abajo que"[8].

Como $\mathfrak{R}$ depende de las definiciones de los objetos considerados en Θ y dado que disponemos de dos tipos de definiciones de estos objetos (definiciones restrictivas y permisivas[9]), podemos construir al menos dos diagramas que representen la relación $\mathfrak{R}$, lo que dará lugar a al menos dos maneras de organizar los objetos de Θ.

Por ejemplo, consideremos que los objetos de Θ se han definido usando cuantificadores como, por ejemplo, en T = *Cuadrilátero con al menos un par de lados paralelos*.

Definiciones como éstas nos permiten comparar las clases de Θ mediante la relación $\mathfrak{R}$ y, a su vez, representarlas mediante el diagrama siguiente.

---

[8] La transitividad de la relación de orden "estar más bajo que" da lugar a los diferentes niveles jerárquicos en el diagrama.

[9] Suelen usarse los términos "definición exclusiva" y "definición inclusiva" para referirse a aquellas definiciones de los objetos de Q que dan lugar a "clasificaciones exclusivas" (figura IV) y a "clasificaciones inclusivas" (figura III), respectivamente. Si bien los adjetivos "exclusivo" e "inclusivo" pueden dar significado a la palabra clasificación, en cuanto que los usemos con la palabra definición pueden aportar más confusión que significado. Por ello, adoptaremos los adjetivos "restrictiva" y "permisiva" para calificar a la palabra definición y que dotan de significado exclusivo e inclusivo, respectivamente, a la clasificación. Exclusividad e inclusividad debería asociarse, respectivamente, con división en clases disjuntas y clasificación derivada de un cubrimiento.

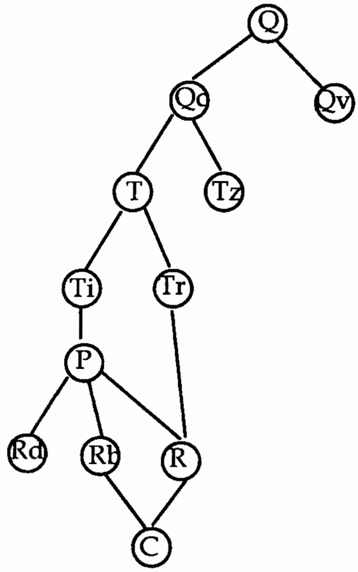


Figura III. Diagrama de representación de una ordenación parcial de Θ, siendo Q = ∪ Θ. Niveles jerárquicos originados por definiciones permisivas.

Por tanto, en Θ, para definiciones como las mencionadas, pueden establecerse 7 niveles jerárquicos desde Q, como clase que contiene a todas las restantes, hasta C como la clase que está incluida más veces en otras clases.

Considerando ahora las definiciones de los objetos de Θ con más restricciones que las iniciales (por ejemplo, eliminando los cuantificadores de allí o imponiendo restricciones a las definiciones anteriores: T=*Cuadrilátero con sólo un par de lados paralelos*), la ordenación de clases en Θ puede representarse ahora por medio del diagrama siguiente (Figura IV).

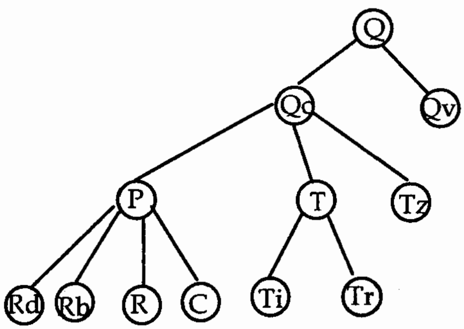


Figura IV Diagrama de representación de una ordenación parcial de Θ. Niveles jerárquicos originados por definiciones restrictivas.

En este caso, la relación $\Re$, y su medio de representación, ha dado lugar a 4 niveles jerárquicos en Θ.

A partir del modo en que representamos las relaciones de inclusión, cabe preguntarse si éstas son las œnicas relaciones que existen entre las distintas clases de cuadriláteros de Θ.

Análisis de las relaciones entre cuadriláteros. Mapas conceptuales

Hemos visto que los cuadriláteros se pueden organizar de una manera jerárquica. Ello supone que existen unos conceptos[10] más inclusivos que otros, es decir, considerados como clases de objetos geométricos, hay clases de objetos, definidas por conceptos, que están incluidas en otras clases de objetos, definidas por otros conceptos. Consideremos este ejemplo: el concepto de cuadrilátero. Este concepto determina una clase de objetos geométricos. Consideremos, también, el concepto de cuadrilátero convexo. Nuevamente, este concepto determina una clase de objetos geométricos. Puesto que todos los ejemplos que uno puede considerar de la clase cuadrilátero convexo son ejemplos de la clase cuadrilátero, la clase cuadrilátero convexo está contenida en la clase de los cuadriláteros. Esta relación de inclusión la podemos expresar mediante la proposición: Cuadrilátero convexo <u>es</u> Cuadrilátero. Recíprocamente, como hay ejemplos de la clase de los cuadriláteros, no todos, que son ejemplos de la clase de los cuadriláteros convexos, ambas clases están relacionadas, relación que podemos expresar mediante la proposición: Cuadrilátero <u>puede ser</u> Cuadrilátero Convexo.

También podemos considerar clases disjuntas de cuadriláteros en las que ningœn ejemplo de una de las clases sea ejemplo de la otra clase de cuadriláteros. Así, un ejemplo de ésta última relación, expresada en términos de proposiciones, es: Cuadrilátero convexo <u>no es</u> Cuadrilátero Cóncavo.

Es decir, las clases Q y Qc son comparables por la relación de orden $\Re$, mientras que Qc y Qv no lo son.

Vamos a considerar, en adelante, aquellas relaciones significativas, es decir, aquellas que determinan los objetos comparables en Θ, para la representación mediante la técnica conocida como mapas conceptuales[11]. Estas relaciones deberán contener alguno de los nexos "es" o "puede ser"[12]. Busquemos pues todas las relaciones posibles que puedan establecerse entre los cuadriláteros considerados en Q y que sean expresables en términos de proposiciones que contienen o bien el nexo "es" o bien el nexo "puede ser". Esta bœsqueda significa ordenar los cuadriláteros decidiendo si dos objetos son o no comparables por la relación de orden. Si lo son, usaremos el nexo que, a nuestro juicio, determina el tipo de relación existente, dando lugar a proposiciones del tipo "Trapecio puede ser A" o "Trapecio es A", siendo A cualquier otra clase de Θ.

[10] El proceso que hemos llevado hasta aquí supone partir de infinitos ejemplos de figuras de cuatro lados, establecer clases de equivalencia, a partir de una cierta relación de equivalencia, y ordenarlas segœn una determinada relación de orden. Los conceptos a los que aquí nos referimos son los que surgen después de establecidas las clases de equivalencia y que están sujetas a definiciones.

[11] Mapa Conceptual (o Concept Mapping o Concept Map, en terminología anglosajona) es una representación de lo que se cree es la organización ideal de los conceptos y proposiciones relativos a un tema concreto de matemáticas, cuando esta organización está avalada por expertos o justificada por las matemáticas. A veces, se distingue con el calificativo de *cognoscitivo* o *cognitivo* a los mapas que construyen estudiantes o personas no expertas sobre el tema (Huerta, 1997).

[12] Cuando dos clases de objetos A y B de Θ, ninguno de ellos vacío, son comparables por la relación de orden, solemos expresar dicha ordenación en términos de proposiciones del siguiente modo: A "es" B, con el mismo significado que el signo $\subset$ (A "está contenido en" B o A "$\subset$" B), o A "puede ser" B, con el mismo significado que el signo $\supset$ (A "contiene a" B. o A" $\supset$ "B). No obstante, como veremos después, hay otros significados que no se derivan precisamente de la ordenación surgida de la relación de orden.

Independientemente de la manera en la que se decida si dos clases están relacionadas o no, incluyendo el nexo apropiado, el resultado de compararlas entre sí da lugar a las relaciones entre cuadriláteros de las que mostramos algún ejemplo en la sección siguiente.

Las relaciones entre cuadriláteros

Las proposiciones que dan cuenta de esas relaciones pueden dividirse en dos grupos que atendiendo a los dos tipos de definiciones que ya hemos mencionado con anterioridad (ver nota nº 10).

Si las definiciones de partida son restrictivas, todas las proposiciones que describen las relaciones que se pueden establecer son del tipo "es" y "puede ser", de tal manera que a una relación del tipo A "puede ser" B le sigue otra del tipo B "es" A. Estas relaciones las hemos representado en el diagrama de la figura IV. Si, además, nombramos el tipo de relación existente con la inclusión de los nexos apropiados, lo que obtenemos es lo que llamamos mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros (figura V) y que refiere la partición de Q en clases disjuntas.

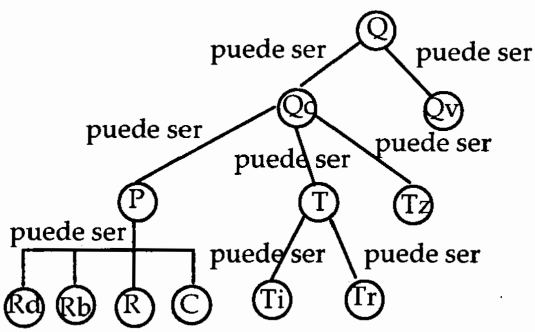


Figura V. Mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros. A todas y cada una de las relaciones "puede ser" (estar debajo de) se le opone la relación "es" (estar arriba de).

Por otra parte, si las definiciones son de carácter permisivo, las proposiciones que describen las relaciones que pueden establecerse entre los cuadriláteros incluyen no sólo las que hemos representado en la Figura V sino, además, otras como, por ejemplo, R "puede ser" Rb que no están representadas allí.

Deberíamos observar como relaciones como ésta última marcan diferencias entre una visión permisiva y una restrictiva de las relaciones entre cuadriláteros (en cuanto al uso y significado del nexo "puede ser"). Desde el punto de vista permisivo, no toda relación del tipo "A puede ser B" tiene como relación recíproca "B es A", mientras que con la concepción restrictiva esto sí que es cierto. Veamos esto en la sección siguiente.

Análisis de las relaciones del tipo "puede ser".

Al escribir en términos de proposiciones las relaciones entre cuadriláteros, los textos que expresan dichas relaciones, hemos advertido de los diferentes significados con los que pueden dotarse a las relaciones expresables con el nexo "puede ser". La clase de los Paralelogramos contiene ejemplos de cuadriláteros que son ejemplos de los Cuadrados.

Esto nos permite establecer la relación: los «Paralelogramos "pueden ser" Cuadrados»[13]. Si esta relación, entre las clases Paralelogramo y Cuadrado, tratamos de justificarla en términos de propiedades, deberemos actuar del modo siguiente: La clase Paralelogramo tiene una definición, "cuadriláteros con lados paralelos dos a dos", de la que se derivan una serie de propiedades: diagonales que se bisecan, lados iguales dos a dos, ángulos iguales dos a dos, etc... Esas propiedades, que adquieren generalidad para toda la clase de los Paralelogramos, adquieren particularidad en las subclases de los Paralelogramos, recibiendo entonces dichas subclases nombres diferentes. Así, para el cuadrado, las propiedades generales de los paralelogramos se particularizan del modo siguiente: lados iguales dos a dos se convierte en cuatro lados iguales, ángulos iguales dos a dos se convierte en cuatro ángulos iguales, diagonales que se bisecan se convierte en diagonales que se bisecan perpendicularmente, etc. permaneciendo como invariante la propiedad general, lados paralelos dos a dos. Esta propiedad general compartida es la que hace que la clase menos permisiva (aquella que tiene propiedades particulares de otras más generales), la clase Cuadrado, sea una subclase de la más permisiva, la clase Paralelogramo, y que justifique que un paralelogramo "pueda ser" un cuadrado[14].

Consideremos otro ejemplo. La clase de cuadriláteros llamada Rectángulo "puede ser" la clase de cuadriláteros llamada Rombo. Para que una relación de este tipo adquiera sentido, debemos considerar las clases mencionadas en versión permisiva. Así, en término de ejemplos, sólo sería válida en tanto que el cuadrado, como ejemplo de rectángulo, sea, a su vez, ejemplo de rombo lo cuál parece no presentar demasiada dificultad. El problema está en establecer qué propiedades hacen que esta relación pueda quedar justificada. Deberemos restringirnos a la clase de Rectángulos que me da el ejemplo válido para establecer la relación, es decir, aquel rectángulo que tiene los lados iguales, lo que me obliga a particularizar propiedades generales de los rectángulos, lados iguales dos a dos, por ejemplo, a la de su subclase, lados iguales, permaneciendo las demás intactas excepto aquella que se deriva de esa particularización. Si por Rombo entendemos aquel cuadrilátero con lados iguales, la relación está establecida porque hay rectángulos que tienen lados iguales (propiedad restringida) y que por tanto son rombos (propiedad general que los caracteriza). En consecuencia, decimos que Rectángulo "puede ser" Rombo porque hay una propiedad restringida de los rectángulos, lados iguales, que junto a otra u otras generales, ángulos iguales o lados paralelos dos a dos, p.ej, se convierten en generales del Rombo, lados iguales, y/o particulares del rombo, ángulos iguales, p.ej.

En el primero de los casos descritos, a la relación «A "puede ser" B», le sigue la relación «B "es" A», con lo que la justificación es más fácil porque la particularización de la propiedad es en una de las clases, la menos permisiva, mientras que en el segundo ejemplo, a la relación «A "puede ser" B» le sigue la relación «B "puede ser" A», por lo que la particularización de las propiedades se produce en las dos clases de cuadriláteros que se quieren relacionar, simultáneamente. Así pues, aparecen relaciones significativas, expresadas con los mismos textos, que no recoge el diagrama de la figura III[15]. Son también relaciones

[13] En el SMS_1 del álgebra de conjuntos, $P \supset C$.

[14] La justificación de que un paralelogramo pueda ser un cuadrado ha producido una cadena de textos matemáticos en un SMS_2 de la geometría plana. En todo caso, el texto que representa la relación entre cuadrado y paralelogramo adquiere el mismo significado tanto en el SMS_1 como en el SMS_2

[15] Por lo tanto, no las puede expresar en el SMS_1.

del tipo "puede ser" con un significado distinto del que tiene el "puede ser" en la relación de orden.

Si ahora usamos el SMS_1, sabemos que Rb y Tr no son comparables por la relación de orden $\Re$. Cualquier r de Rb no es de Tr. Por tanto, Tr "no puede ser" Rb y Rb "no es" Tr. En cambio, hay un r en Rb que es de Tr. En efecto, este ejemplo de Rb ha de ser tal que ha de cumplir la definición de Tr. Busquemos r en C, ya que sabemos que todos los C son de Rb. Como todos los ejemplos de C son de T, r es ejemplo de T y como además r tiene ángulos rectos, r es un trapecio con ángulos rectos, r es de Tr. Por tanto, los Rb "pueden ser" Tr y al revés, los Tr "pueden ser" Rb.

Este tipo de relaciones, que hemos representado también con el nexo "puede ser", las podemos incorporar al diagrama de la figura VI mediante la inclusión de una flecha bidireccional. El diagrama resultante no sólo representa la relación de orden parcial sino que, además, incluye las relaciones "puede ser" que acabamos de discutir. Llamaremos mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros a este diagrama que puede verse en la figura siguiente.

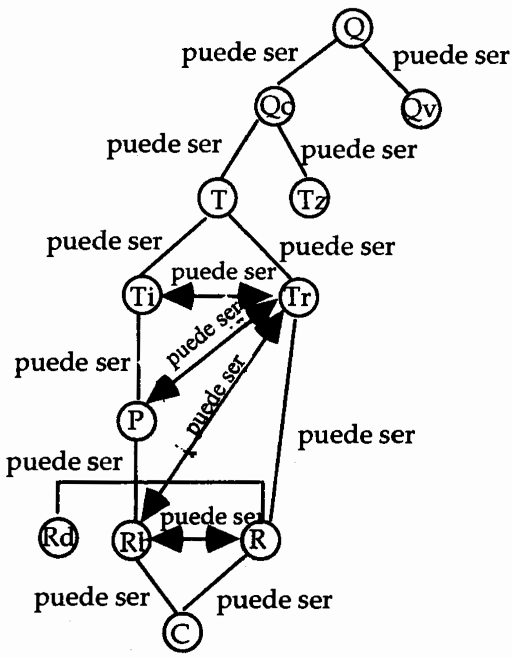


Figura VI. Mapa conceptual de las relaciones entre cuadriláteros. Incluye las relaciones derivadas de estar abajo de (puede ser) y estar arriba de (es) y las otras relaciones "puede ser".

Textos producidos por los estudiantes en tareas de organización de cuadriláteros

El ejemplo que mostraremos aquí es el de un estudiante de la Escuela Universitaria de Magisterio de la Universitat de Valéncia que estuvo implicado, voluntariamente, en una investigación más amplia (Huerta, 1997). Este estudiante, al igual que los demás, completaron dos tests escritos, independientes, que determinaron, respectivamente y por este orden, el grado de adquisición de los niveles de van Hiele y una serie de mapas conceptuales de los que, para nuestros propósitos aquí, uno de ellos mostraba la organización de los cuadriláteros que los estudiantes poseían como consecuencia de las respuestas dadas a ítems construidos con este fin. Posteriormente, algunos alumnos fueron seleccionados para realizar una entrevista clínica. El criterio de selección imponía que los estudiantes poseyeran un grado de adquisición completo de, al menos, el 2º nivel de van Hiele. Las entrevistas realizadas permitieron explorar el sentido con el que los estudiantes expresaban las distintas relaciones entre cuadriláteros lo que suponía a su vez organizar de algœn modo el conjunto de los cuadriláteros.

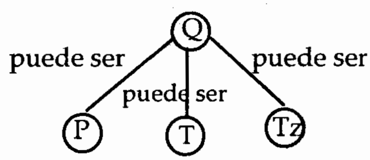
El resultado de la evaluación de los grados de adquisición de los niveles de van Hiele del estudiante que mostramos aquí como ejemplo, nos dio un perfil de razonamiento caracterizado por el vector (C, C, I, N). Segœn esto, este estudiante demostraba poseer habilidades de razonamiento en las que se implican tanto a las figuras como a las propiedades de las figuras.

> *"Es" es que "siempre es". El paralelogramo "es" un cuadrilátero porque tiene cuatro lados .*

El uso del nexo "es" por parte de este estudiante no parece planteamos dudas de que está viendo a los P como una clase contenida en los Q. Tal vez, porque posee la exigencia para ser cuadrilátero sólo exija la condición de la cantidad de lados. De esta manera, no ha tenido dificultad de pasar por los dos SMS aunque se exprese en términos del SMS geométrico.

> *En cambio, los cuadriláteros "pueden ser"* (en el sentido de "se clasifican en"... o "se dividen en"...) *éstos (paralelogramos), éstos (trapecios) o éstos (trapezoides). Entonces, si es de aquí, ya no es de aquí.*

Tampoco nos plantea ninguna duda de que está viendo las clases P, T y Tz como subconjuntos o subclases *-pueden ser-* disjuntos *-si es de aquí ya no es de aquí-* de la clase Q. Con estos textos, la organización de los cuadriláteros que presenta este estudiante puede representarse en el siguiente diagrama:



dónde quedan reflejadas las relaciones $P \subset Q$, $T \subset Q$ y $Tz \subset Q$.

Formalmente, trapecio y paralelogramo son dos clases de cuadriláteros comparables por una relación de orden parcial. En efecto, si trabajamos en el SMS_1 que nos proporcionan las relaciones $\aleph$ y $\Re$, Trapecio y Paralelogramo son dos clases de equivalencia en Θ que son comparables por $\Re$, basta para ello definirlas adecuadamente. Nuestro estudiante define estas clases de cuadriláteros de la siguiente manera:

Paralelogramo: Cuadrilátero que tiene sus lados paralelos dos a dos.

Trapecio: Cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros dos no.

y establece que: *Los paralelogramos "algunas veces"*[16] *son trapecios y los trapecios "algunas veces" son paralelogramos.*

Usando el SMS_1, el texto producido por este estudiante puede representarse por $P \cap T \neq \varnothing$, si el sentido en el que se expresa la intersección no vacía de ambas clases de cuadriláteros es el mismo que el de "algunas veces son". Así, respecto de la relación "los paralelogramos algunas veces son trapecios", se justifica diciendo: *Porque si los lados de este* (señalando a un ejemplo de trapecio de una muestra de cuadriláteros que tiene a su disposición), *los no paralelos, fuesen paralelos, entonces sería un paralelogramo.*

En efecto, está considerando un $t \in T$ y quiere ver si $t \in P$. Como el t escogido es cualquiera, la relación $P \cap T \neq \varnothing$ estaría probada. Como t tiene dos lados no paralelos, debe modificarlos para que se vuelvan paralelos y ser entonces t de P. Esto será posible en tanto que t no deje de ser de T al aplicar la modificación. Por tanto, este estudiante debe tener una definición permisiva de la clase T para que su razonamiento sea aceptable, lo que no es así si miramos su definición de trapecio. Todo este razonamiento lo expresa con el texto, *los trapecios "algunas veces" son paralelogramos.* Por otra parte, parece que piensa en términos de que con todo trapecio puede hacer la modificación anterior, lo que implicaría la relación $T \subset P$, aunque lo que ha intentado probar ha sido que $P \cap T \neq \varnothing$. Evidentemente, la lectura de la relación anterior puede hacerse de manera conmutativa, $T \cap P \neq \varnothing$, lo que permitiría establecer la proposición anterior en sentido inverso.

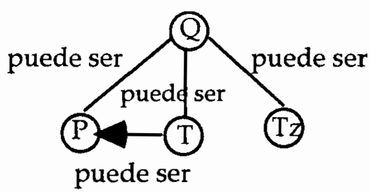
Cuando uno de los pares de lados paralelos deje de ser paralelo.

La línea de pensamiento no ha cambiado respecto de la anterior al analizar la relación "los paralelogramos algunas veces son trapecios". Al ser interrogado sobre la posibilidad de que un paralelogramo pudiera tener un único par de lados paralelos, el estudiante responde: *No, entonces no sería un paralelogramo.*

Entonces, sigue interrogando el entrevistador, ¿cómo ves la relación entre paralelogramos y trapecios?, a lo que el estudiante responde: *que la relación trapecio con paralelogramo sí es posible* ($T \cap P \neq \varnothing$, los trapecios "algunas veces" son paralelogramos.), *pero la relación paralelogramo con trapecio no* ($P \cap T \neq \varnothing$, los paralelogramos "no" son trapecios pues los paralelogramos no pueden perder un par de lados paralelos).

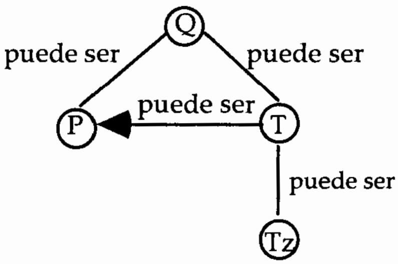
Parece evidente que este estudiante no usa el SMS_1 para establecer sus relaciones entre cuadriláteros, sino el SMS_2, aunque puedan interpretarse o representarse en el primero. La razón que uno podría esgrimir es que, usando el SMS_2, sí ha probado que $P \cap T \neq \varnothing$, y que hay, por lo menos un t en T que es de P pero que no hay un p de P que lo sea de T.

La red de relaciones que establece este estudiante puede representarse, ahora, con el diagrama siguiente:

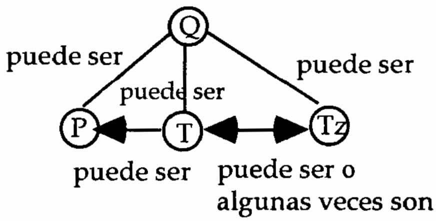


[16] Parece razonable pensar que si usamos el singular, como en "el paralelogramo a veces es trapecio", en lugar del plural, "los paralelogramos a veces son trapecios", estamos pensando en SMS diferentes. El primero, en el SMS_2. El segundo, en el SMS_1. Los textos que se producen se refieren, respectivamente, a: la clase P está incluida en la clase T y todos los ejemplos de paralelogramos son ejemplos de trapecio.

En las relaciones entre T y Tz, este estudiante se reafirma, a pesar de la línea de pensamiento que ha experimentado en el caso de P y T, en que los T "algunas veces" son Tz y los Tz "algunas veces son" T: *Estos sí, algunas veces son.*



Clasificación que se derivaría de las definiciones dadas por el estudiante



Clasificación que se derivaría de los textos producidos por el estudiante en el test escrito

El entrevistador pregunta quién algunas veces es quién, ¿el trapecio algunas veces es trapezoide o el trapezoide algunas veces es trapecio?

> *Los dos (responde muy seguro el estudiante). El trapezoide tiene cuatro lados desiguales. Cuando dos coinciden, o sea, cuando dos sean paralelos... O sea, no tiene ningún par paralelo, cuando tenga un par paralelo, será trapecio.*

¿Puede tener el trapezoide un par de lados paralelos? *No, cuando los tenga se llamará trapecio y no trapezoide.*

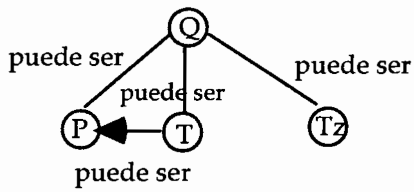
La definición de trapezoide que tiene este estudiante, "trapecio sin ningún par de lados paralelos", daba por supuesta la relación $Tz \subset T$, con la contradicción que supone el considerar su definición de los T. El siguiente diálogo entre alumno y entrevistador muestra el cambio de sentido entre el significado del "algunas veces son" inicial y el final, originado, tal vez, por el proceso de aprendizaje que tuvo lugar a lo largo de la entrevista.

P. Mira los ejemplos de trapezoide, ¿por qué no pusiste ejemplos de trapecios?
A. Porque el 5 y el 13[17] son trapecios pero que no tienen ningún par de lados paralelos. O sea que... Vale, lo quitamos.
P. ...Entonces, ¿es verdad que tu crees que un trapezoide es un trapecio en el momento en el que el trapecio no tenga un par de lados paralelos?
A. Sí
P. Entonces, si el trapecio pierde el paralelismo se convierte en un trapezoide y por eso has dicho que los trapecios algunas veces son trapezoides y que el trapezoide, en el momento en el que tenga dos lados paralelos se convierte en un trapecio. ¿Estoy interpretando correctamente lo que quieres decir?
A. Sí.
P. ¿Esto significa que alguno está contenido en el otro o que tienen ejemplos en común?

[17] Se está refiriendo a dos ejemplos más o menos estándares (excepto la posición, quizás) de trapezoides

A. No
P. ¿Cómo lo ves ahora?
A. ¿Quitamos entonces esta relación?
P. ¿Por qué?
A. (reflexionando) Espera el trapecio... Vale, pues nada lo quitamos (deshaciéndose de los razonamientos anteriores). Es que "no es", porque lo que caracteriza al trapecio es tener dos lados paralelos y al otro (trapezoide) ninguno, así que no tiene que ver una cosa con la otra ($T \cap Tz = \emptyset$).

La organización que ahora posee de los cuadriláteros que estamos teniendo en cuenta, puede verse en el diagrama siguiente:



Clasificación que se derivaría de los textos producidos en el test escrito y de la entrevista clínica.

A partir de aquí, nuestro estudiante modifica no sólo la relación que había establecido entre T y Tz, sino la definición que tenía de los Tz.

Las consideraciones anteriores llevaron a este estudiante a revisar muchas de las proposiciones establecidas entre los demás cuadriláteros, de las que muchas del tipo "algunas veces son" fueron eliminadas. La inclusión de muchos de estos nexos fueron consecuencia de dotar con el mismo significado en ambos sentidos las relaciones ente los cuadriláteros:

P. ¿En qué sentido pusiste "a veces es" en los dos sentidos?
A. Porque supuse que si el romboide <u>algunas veces es</u> rectángulo, el rectángulo <u>algunas veces será</u> romboide.

Conclusión.

Finalmente, ni división ni clasificación: o es, o no es, o puede ser.

Si uno se fijara en el aprendizaje, probablemente la secuencia que dará lugar al proceso de clasificación de los cuadriláteros comenzaría con el trabajo en el conjunto Q. Las suficientes experiencias en este conjunto nos llevaría al conjunto Q, lo que implicaría una primera partición del conjunto Θ en clases y, por tanto, la aparición de los conceptos relativos a las distintas clases de cuadriláteros generadas. Nuevamente, las suficientes experiencias en Θ nos conducirán a definir las clases que lo constituyen. Procede pues, una vez identificados los objetos con los que hay que trabajar, organizar el conjunto al que pertenecen, es decir, el conjunto Θ. Hasta ahora, la partición de Q en Θ, permite una primera organización en clases disjuntas de las que solamente pueden derivarse expresiones del tipo: Q *puede ser* o *algunas veces son*, por ejemplo, Rombo ó Rectángulo ó Paralelogramo. O del tipo: Rombo o Rectángulo o Paralelogramo *es* Q.

Para seguir organizando (ordenando) Θ es necesario establecer un orden en Θ. Es decir, responder a la pregunta: ¿de qué manera puedo comparar los objetos que tengo en Θ? Decidido el qué, tengo que expresar el resultado de esa comparación estableciendo proposiciones entre los objetos de Θ, expresándolas mediante términos como "es" o "puede ser o algunas veces es", si los objetos son comparables, o negándolos si los objetos no son comparables.

La naturaleza del término "puede ser o algunas veces es" se ha revelado distinta si procede de la relación de orden o de las relaciones producidas por las intersecciones no vacías de clases. En el primero de los casos, es la respuesta obvia a la proposición con el término "es". En el segundo de los casos, no. Aparece como respuesta a la proposición "puede ser o algunas veces es". Este doble sentido con el que puede usarse el nexo "puede ser" o "algunas veces es" para establecer relaciones entre cuadriláteros, se ha mostrado especialmente difícil para los estudiantes que han sido capaces de poder establecerlas dotándolas de algún sentido.

REFERENCIAS:

Filloy, E.; Lema, S., 1996, El Teorema de Tales: significado y sentido en un sistema matemático de signos, en *Investigación en Matemática Educativa*, pp. 55-75.

Huerta, M. P., 1997, *Los niveles de van Hiele en relación con la Taxonomía SOLO y los Mapas Conceptuales*, (tesis doctoral no publicada). Universitat de València.

Puig, L., 1994, Semiótica y matemáticas. Eutopía 2a. época, Centro de Semiótica y teoría del espectáculo de la Universitat de València & Asociación Vasca de Semiótica.