NOTAS
DE
CLASE

La importancia de las representaciones geométricas en la solución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas

Fecha de recepción: Noviembre, 2000

Educación Matemática
Vol. 13 No. 1 abril 2001
pp.107-119

Fernando Barrera Mora
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados,
Escuela Superior de Física y Matemáticas-IPN, México
barrera@esfm.ipn.mx

Resumen: *La resolución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas se considera un proceso algebraico por excelencia, sin embargo, el uso de ideas geométricas puede ser de utilidad para lograr un entendimiento más profundo de los conceptos, métodos y procesos que se utilizan al resolverlas. En el presente artículo se muestra una forma de establecer conexiones entre ideas geométricas y algebraicas para resolver ecuaciones cuadráticas y de esto se obtienen dos aspectos adicionales que pueden ayudar a los estudiantes a profundizar en el entendimiento del tema: Se muestra un método geométrico para resolver cuadráticas y se encuentra la conexión geométrica entre los métodos para resolver cuadráticas y cúbicas.*

Abstrat: *The process of solving quadratics and cubics is considered an algebraic one. However, using geometric ideas could be very valuable to achieve a deeper understanding of the concepts, methods and process used to solve such equations. In this work we show an alternative to establish connections between algebraic and geometric ideas to solve quadratics and cubics. From this we obtain some additional aspects that could help students to get a better understandind of the topic. A geometric method to solve quadratics is presented and an important aspect of it is its extension to solve cubics as well*

Introducción

En el proceso de resolver problemas matemáticos, diferentes representaciones suelen aparecer, siendo la geométrica-visual una de las que ayudan a entender intrincadas relaciones algebraicas ocultas. Arcavi (1996, pág. 56) expresa:

Las Matemáticas, como creación cultural y humana que trata con objetos y entes significativamente diferentes de los fenómenos físicos (como planetas y células de sangre) dependen fuertemente (posiblemente mucho más de lo que los matemáticos están dispuestos a admitir) de diferentes formas de visualización y a diferentes niveles, más lejos del campo visual geométrico espacial obvio.

Las representaciones geométricas-visuales son de particular importancia en el proceso de solución de problemas algebraicos. En este sentido, es muy importante recordar, parafraseando a Charbonneau (1996, pág. 15), que "Álgebra no es solamente el producto de la evolución de la aritmética. El álgebra debe mucho a la geometría".

Una meta importante en el aprendizaje de las matemáticas, es que los estudiantes establezcan una conexión estrecha entre diferentes representaciones que se usan en el proceso de solución de problemas matemáticos, lo cual contribuirá a lograr un entendimiento más profundo de los conceptos, métodos y procesos que definen el quehacer matemático. En este trabajo se ilustra y discuten los procesos de solución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas a partir de tres aspectos relacionados:

- Ideas geométricas (completar cuadrados) y su equivalencia algebraica en el proceso de resolver ecuaciones cuadráticas.
- Construcción geométrica de las soluciones de ecuaciones cuadráticas.
- La aplicación de una misma idea geométrica para resolver algebraicamente ecuaciones cuadráticas y cúbicas.

Las diversas conexiones que se ilustran en el tratamiento, pueden ayudar a los estudiantes a extender el significado, que en algunos casos se reduce a procedimientos puramente algorítmicos, de resolver ecuaciones cuadráticas. En particular, los conceptos de área y volumen resultan relevantes para darle sentido a los procesos algebraicos.

1. Solución geométrica y algebraica de ecuaciones cuadráticas

Al presentar la discusión para resolver ecuaciones cuadráticas, aparecen varios métodos: algebraicos, geométricos o combinación de ambos. De los métodos algebraicos, el de "completar cuadrados" es el más general, ya que conduce a obtener la fórmula general para resolverlas. Respecto a los métodos geométricos, uno de los más usuales se basa en hallar los puntos de intersección de la gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ con el eje x, esto en sí representa varias dificultades, y a partir de esto encontrar las soluciones en forma aproximada. Un método geométrico interesante aparece en Grewal y Godloza (1999), el cual se basa en construcciones con regla y compás.

En esta sección presentamos una discusión geométrica del método (algebraico) de completar cuadrados, y un procedimiento geométrico para obtener una solución positiva de ecuaciones cuadráticas del tipo, con y reales positivos. Además, se discute un "método inverso" al de completar cuadrados para resolver la cuadrática, el cual tiene la ventaja de extenderse a ecuaciones cúbicas de la forma, las cuales resultan ser representantes de toda cúbica general, cuando se aplica el cambio. Esta extensión ilustra lo que en resolución de problemas se conoce como extensión de un problema.

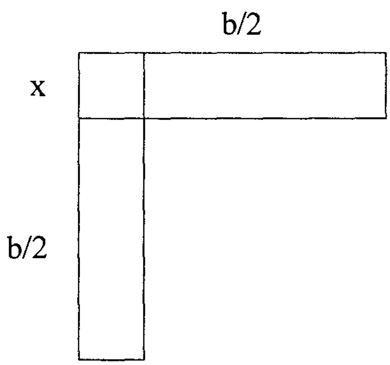


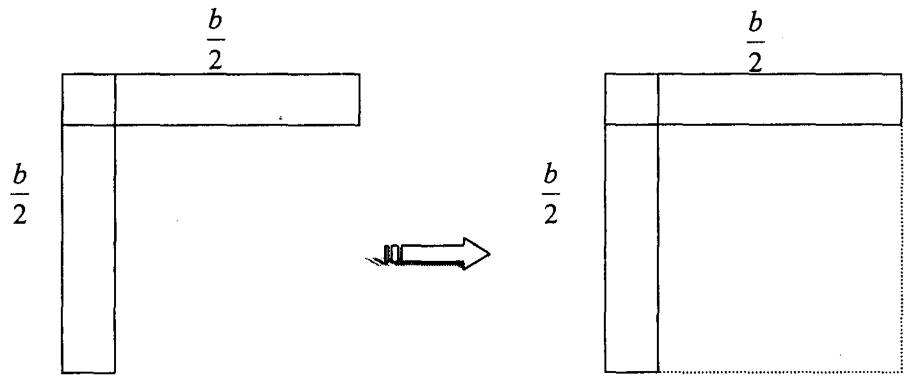
figura 1

(a) *Proceso de completar cuadrados*
Si y son números reales positivos, los miembros de la ecuación, se pueden interpretar en términos de valores de áreas, siendo el miembro de la izquierda la suma del área de un cuadrado de lado más el doble del área de un rectángulo de lados y . (figura 1)

El proceso algebraico de completar cuadrados para resolver ecuaciones cuadráticas puede ser interpretado "visualmente" ("ver lo que no se ve") mediante un diagrama.

Completando cuadrados

Geometricamente



Algebraicamente

$$x^2 + bx \Longrightarrow x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Con el referente geométrico del diagrama anterior, el proceso algebraico de completar cuadrados en la ecuación, adquiere un significado geométrico y la "regla" para completar cuadrados (divida por dos el coeficiente de x, el resultado elévelo al cuadrado y esto súmelo a ambos miembros) puede ser derivada de consideraciones geométricas.

(b) Análisis algebraico de la solución
Al completar cuadrados en el miembro izquierdo de la ecuación $x^2 + bx = c$, se obtiene

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2,$$

y de esto resulta $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$. Extrayendo raíz cuadrada y restando $\frac{b}{2}$ en ambos miembros se tiene $x = \pm\sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$, lo cual equivale a la usual: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$

Se observa que el proceso algebraico para obtener la expresión que determina a x, puede conducir a una actividad mecánica por parte de los estudiantes, sin embargo, con el tratamiento anterior queda un referente geométrico que pudiese ayudarles a entender este proceso.

Construcción geométrica de la solución de una cuadrática

Si el proceso algebraico para resolver una cuadrática ha sido interpretado geométricamente, es natural preguntar si las soluciones de ésta pueden ser obtenidas mediante una construcción usando regla y compás.

El miembro derecho en la ecuación $x^2 + bx = c$, con $c > 0$ puede ser interpretado como el valor del área de un cuadrado de lado $\sqrt{c}$, entonces el área de la figura 1 es igual al área de este cuadrado. ¿Cómo se construye un cuadrado de lado $\sqrt{c}$? Para contestar a la pregunta, basta indicar como se construye $\sqrt{c}$.

(a) Construcción de $\sqrt{c}$

Si c es un número real positivo dado (entendemos por esto, que se puede tomar un segmento de longitud c), procedemos a construir $\sqrt{c}$ como se indica. (figura 2)

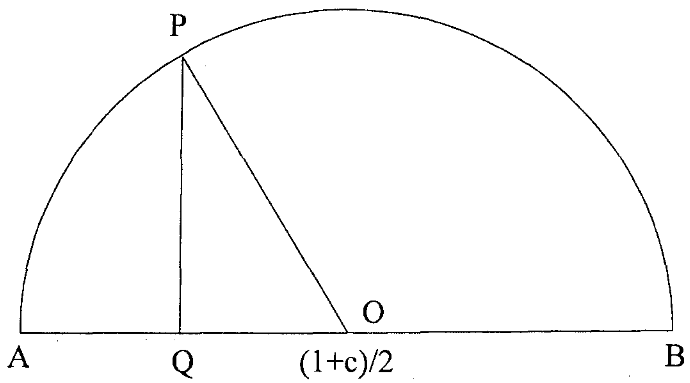


figura 2

Construyamos un segmento AB de longitud $1 + c$ y su punto medio, denotándole O, el cual será el centro de una semicircunferencia de radio $\frac{1+c}{2}$. A una unidad de distancia del punto A, sobre el segmento AB, ubiquemos el punto Q y tracemos una perpendicular al segmento AB que pase por éste. Llamemos P al punto de intersección de la semicircunferencia y la perpendicular trazada. Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo PQO para obtener la longitud de PQ se tiene:

$$(PQ)^2 = \left(\frac{1+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+c}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{1+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[(1+c)^2 - (c-1)^2\right] = \frac{1}{4}(4c) = c,$$

y de esto se concluye que la longitud del segmento PQ es precisamente $\sqrt{c}$.

(b) Construcción geométrica de una solución positiva de $x^2 + bx = c$

Una vez construido $\sqrt{c}$, podemos hacer la construcción para obtener una solución positiva de la ecuación .

En la figura 3, el lado del cuadrado ABCD tiene longitud $\sqrt{c}$, (la construcción de esta longitud se ha indicado antes) y la longitud del segmento PA es $b/2$. Haciendo centro en P y de radio BP trace un arco que interseque al segmento DP en el punto X . Si m denota la longitud de PB y x la longitud de AX, se tiene $m = x + b/2$. Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo BAP tenemos $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ y de esto se concluye que una solución positiva de la ecuación $x^2 + bx = c$ es la longitud del segmento AX.

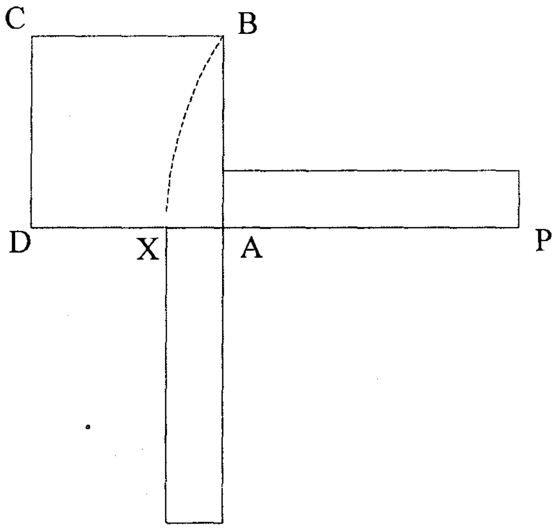


figura 3

Con la construcción anterior también se puede ilustrar cómo cambia el valor de x al cambiar los valores de b y c.

De la discusión hasta este punto podemos resumir:

(a) Completar cuadrados al resolver la ecuación $x^2 + bx = c$, tiene un significado geométrico, el cual ilustra el proceso algebraico.

(b) Podemos construir con regla y compás las expresiones $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$, para reales positivos b y c que se pueden construir con regla y compás (recordemos que hay "muchos" números reales que no se pueden construir con regla y compás, por ejemplo $\sqrt[3]{3}$ es uno de estos)

(c) Los puntos (a) y (b) pueden ayudar a encontrar significado geométrico a las soluciones de ecuaciones cuadráticas.

Método "inverso" a completar cuadrados

La idea de "inverso", desde el punto de vista matemático significa un proceso que produce lo "contrario" a lo que otro ha realizado. En nuestro caso, lo que significará "inverso a completar cuadrados" es iniciar con un cuadrado y dividirlo en dos rectángulos congruentes

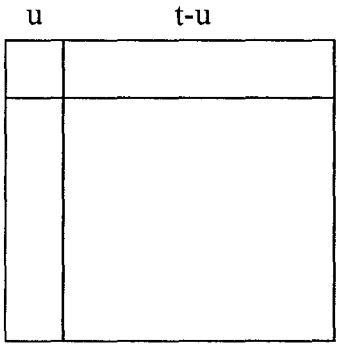


figura 4

y dos cuadrados, tales que la suma de las longitudes de sus diagonales es igual a la longitud de la diagonal del cuadrado original. El proceso señalado antes se ilustra en la figura 4.

Este cuadrado se ha divido en un cuadrado de lado u, un cuadrado de lado *t-u* y dos rectángulos congruentes de lados *u* y *t-u*. El cuadrado de la figura 4 puede ser el resultado de dos posibles formas de completar cuadrados, teniendo como referente algebraico a la ecuación $x^2 + bx = c$, po lo que se tienen dos posibilidades:

(I) Haciendo $x = u$ y $\frac{b}{2} = t - u$, que es básicamente la discusión hecha antes.

(II) Haciendo $u = \frac{b}{2}$ y $x = t - u$.

En el caso (II) y de consideraciones geométricas sugeridas por la figura 4, se tiene que el área del cuadrado de lado t es la suma de las áreas de los cuadrados pequeños, más la suma de las áreas de los dos rectángulos congruentes. En forma algebraica:

$$t^2 = (t-u)^2 + u^2 + 2u(t-u).$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$t^2 - u^2 = (t-u)^2 + 2u(t-u) = x^2 + bx.$$

De lo que se concluye $c = t^2 - u^2 = t^2 - \frac{b^2}{4}$, y de aquí obtenemos

$$t = \pm\sqrt{c + \frac{b^2}{4}},$$

resultando:

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{c + \frac{b^2}{4}} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2},$$

que es la fórmula que se obtiene haciendo las identificaciones del caso (I).

Es importante hacer notar que la última expresión para *x* se deriva de un referente geométrico inverso a completar cuadrados: el cuadrado de lado *t* se ha dividido.

2. Solución de cúbicas

Desde el punto de vista histórico, la solución de ecuaciones cúbicas generales significó un avance muy importante para las matemáticas, particularmente para el álgebra, pues este problema se mantuvo abierto por varios siglos. Las ideas que llevaron a resolverlo, tienen un alto contenido geométrico, sin embargo no hay evidencias, Durh (1990) y Van del Warden (1980)), de que existiera una conexión entre las ideas geométricas que permiten resolver la cuadrática y la cúbica. Por otro lado, en varios trabajos posteriores que inician con Lagrange (1770-1771), se ha dado un tratamiento algebraico unificado para resolver ecuaciones de grado menor o igual que 4, teniendo como principal objetivo el mostrar propiedades y relaciones algebraicas entre las raíces de tales ecuaciones que permitan decidir si es posible resolverlas por "radicales". Con este tratamiento se da inicio a la teoría de Galois, herramienta muy poderosa que se aplica a diversos problemas algebraicos. Estos trabajos no hacen énfasis en consideraciones geométricas, pudiendo deberse esto, a su naturaleza esencialmente algebraica. En esta parte de la discusión mostraremos cómo se puede aplicar el método inverso a completar cuadrados para resolver cúbicas, logrando con esto la unificación desde un punto de vista geométrico, de los métodos para resolver cuadráticas y cúbicas. Es pertinente señalar que algunas de las ideas que se presentan a continuación datan de por lo menos la época de Cardano.

En ciertos casos, los términos de ecuaciones cúbicas pueden ser considerados como volúmenes. Por ejemplo, en la ecuación

$$x^3 + 9x = 3,$$

se puede interpretar el miembro de la izquierda como el volumen de un cubo de lado x más el volumen de un paralelepípedo de lados 3,3 y x. (figura 5)

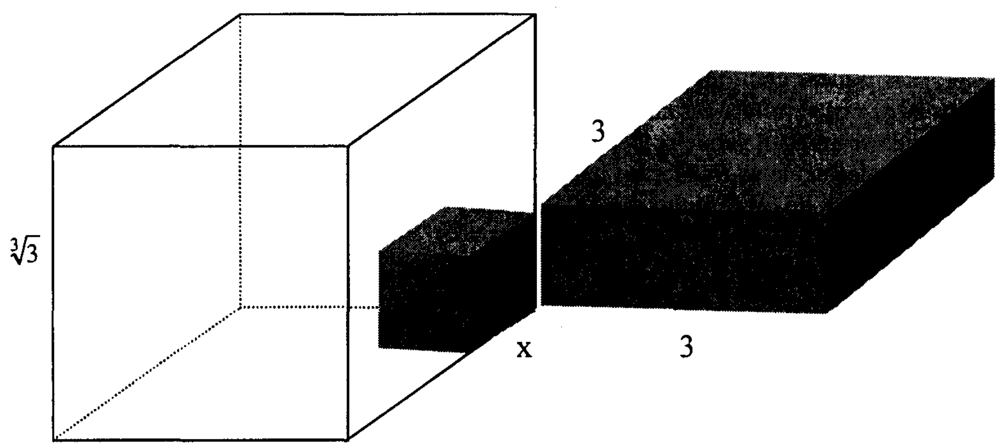


figura 5

De la interpretación anterior, la existencia de una solución de la cúbica dada, equivale a encontrar un valor de de manera que el volumen del cubo de lado x, más el volumen del paralelepípedo de lados 3,3 y x sea igual al volumen de un cubo de lado $\sqrt[3]{3}$.

Con un argumento de continuidad, haciendo variar x de cero a $\sqrt[3]{3}$ y "auxiliándose" de la figura 5 se concluye que existe x, solución de la ecuación dada. ¿Cómo determinar ese valor de x?

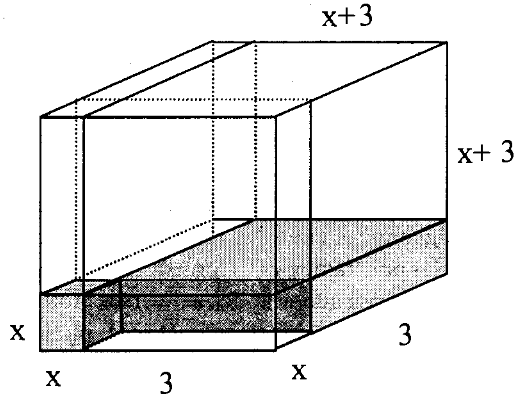


figura 6

La idea geométrica o algebraica de "completar cubos" tiene varias dificultades que procedemos a estudiar. En la figura 6, el lado del cubo mayor es $x+3$, por lo que su volumen viene dado por $(x+3)^3$. Por otro lado, este cubo está formado por dos cubos de lados x y 3 respectivamente, más cuatro paralelepípedos. De esta consideración geométrica se tiene que el volumen del cubo mayor debe ser igual a la suma de los volúmenes de sus componentes, es decir,

$$
\begin{aligned}
(x+3)^3 &= x^3 + 3x^2 + 3x(x+3) + 27 + 9x + 3x(x+3) \\
&= x^3 + 9x^2 + 27x + 27,
\end{aligned}
$$

cuyo resultado se obtiene al desarrollar $(x+3)^3$.

La primera gran diferencia que notamos entre completar cuadrados y completar cubos es que en el primer caso se agrega un cuadrado de lado constante, mientras que en el segundo se agregan paralelepípedos con al menos uno de sus lados variando con x, lo que algebraicamente se traduce en una dificultad para resolver la ecuación cúbica. En efecto, combinando la ecuación $(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$ con la ecuación original: $x^3 + 9x = 3$ se tiene

$$
\begin{aligned}
(x+3)^3 &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 + 9x + 9x^2 + 18x + 27 \\
&= 3 + 9x^2 + 18x + 27 \\
&= 9x^2 + 18x + 27,
\end{aligned}
$$

la cual no se puede resolver extrayendo raíz cúbica, a diferencia del caso cuadrático.

¿Pudiéramos atribuir nuestro poco éxito a la forma en que construimos la figura 6? ¡No! Pues en cualquier arreglo que se tenga del cubo de lado x y el paralelepípedo de lados 3,3 y x, al completar a un cubo se tendrán paralelepípedos con al menos uno de sus lados variando con x, lo cual se traducirá en un resultado similar a la ecuación anterior.

Resumiendo, el método de completar cubos no parece garantizar éxito en el proceso de resolver cúbicas.

¿Que ocurre con el método inverso a completar cuadrados cuando se aplica a una cúbica?

Consideremos un cubo de lado t y descompongámoslo en dos pequeños cubos, más 4 paralelepípedos como se ilustra en la figura 7.

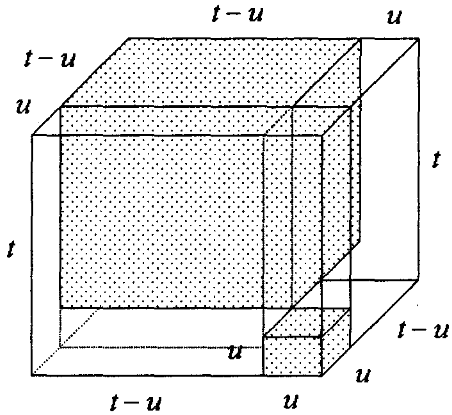


figura 7

El volumen del cubo grande es la suma de los volúmenes de los cubos pequeños, más el volumen de los cuatro paralelepípedos, es decir,

$$t^3 = u^3 + (t-u)^3 + 2tu(t-u) + u^2(t-u) + u(t-u)^2.$$

Nótese una cierta analogía entre la ecuación anterior y la del caso cuadrático:

$$t^2 = u^2 + (t-u)^2 + 2u(t-u).$$

La ecuación en t^3 se puede escribir en la forma siguiente

$$\begin{aligned} t^3 - u^3 &= (t-u)^3 + 2tu(t-u) + u^2(t-u) + u(t-u)^2 \\ &= (t-u)^3 + (t-u)[2tu + u^2 + u(t-u)] \\ &= (t-u)^3 + 3tu(t-u). \end{aligned}$$

Haciendo

$$\begin{aligned} x &= t - u \\ p &= 3tu \\ q &= t^3 - u^3, \end{aligned}$$

la ecuación anterior se transforma en

$$x^3 + px = q .$$

En esta nueva ecuación suponemos conocidos a p y q, y si podemos resolver para t y u en términos de aquellos, entonces hemos resuelto para x en términos de p y q. Las ecuaciones que tenemos en donde aparecen t y u como incógnitas son:

$$\begin{aligned} q &= t^3 - u^3 \\ p &= 3tu \end{aligned}$$

Para aplicar las ideas presentadas antes, consideremos la ecuación cúbica con que hemos iniciado la discusión, es decir, con la notación anterior aplicada al ejemplo: $x^3 + 9x = 3$ se tiene

$$x = t - u$$
$$3 = t^3 - u^3$$
$$9 = 3tu.$$

Resolviendo para u de la última ecuación, simplificando y sustituyendo en la penúltima ecuación se tiene

$$t^3 - \frac{27}{t^3} = 3$$

Notemos que esta ecuación es equivalente a una cuadrática en t^3, es decir, si hacemos $z = t^3$ la última ecuación se transforma en

$$z^2 - 3z - 27 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$z = \frac{3 \pm 3\sqrt{13}}{2}.$$

Tomando la raíz positiva se tiene $z = t^3 = \frac{3 + 3\sqrt{13}}{2}$. Sustituyendo este valor de t^3 en $t^3 - u^3 = 3$ y resolviendo para u^3 obtenemos

$$u^3 = \frac{-3 + 3\sqrt{13}}{2}.$$

Hasta este punto hemos encontrado valores para u^3 y t^3, pero $x = t\text{-}u$, entonces x viene dado por

$$x = \sqrt[3]{\frac{3 + 3\sqrt{13}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-3 + 3\sqrt{13}}{2}}.$$

¿Qué ocurre si tomamos la raíz negativa para definir a t^3? En este caso se tiene $u^3 = \frac{3 - 3\sqrt{13}}{2}$, de lo cual también obtenemos el mismo valor para x.

¿Cómo encontrar las restantes raíces de la ecuación $x^3 = 9x = 3$? Estas se encuentran considerando todas las raíces de las ecuaciones $u^3 = \frac{-3 + 3\sqrt{13}}{2}, t^3 = \frac{3 + 3\sqrt{13}}{2}$. y haciendo uso de la ecuación $tu = 3$.

Regresemos a la discusión de la ecuación $x^3 = px = q$ para la cual hemos hecho las siguientes identificaciones.

$$x = t - u,$$
$$q = t^3 - u^3,$$
$$p = 3tu.$$

Elevando al cubo la tercera ecuación, despejando u^3 de esta nueva y sustituyendo en la segunda se tiene

$$q = t^3 - \frac{p^3}{27t^3}.$$

Nótese que hay una analogía entre esta ecuación y la del ejemplo anterior, es decir, se tiene una ecuación que es equivalente a una cuadrática en t^3, más precisamente, si hacemos $z = t^3$ y aplicamos algunas operaciones la ecuación se transforma en

$$z^2 - qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$z = \frac{q \pm \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2} = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Tomando el signo positivo en la ecuación anterior, sustituyendo en $q = t^3 - u^3$ y resolviendo para u^3 obtenemos

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Extrayendo raíz cúbica en las ecuaciones que definen a t^3, y sustituyendo en $x = t$-u, encontramos el valor de x, es decir,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Notemos que si tomamos el signo negativo en el radical que define a entonces el radical que define a u^3 cambia de signo, de esto y tomando en cuenta que la raíz cúbica de -1 es -1 se tiene

$$t - u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

que es el valor de x obtenido antes, mostrando con esto que no importa que signo se tome para definir a $z = t^3$, el resultado $t - u$, es el mismo.

Para obtener las restantes soluciones de

$$x^3 + px = q,$$

se procede como se indicó al final del ejemplo anterior.

En este momento es importante hacer notar que las fórmulas obtenidas para resolver tanto cuadráticas como cúbicas, tienen una idea en común: dividir un cuadrado (cubo) y de allí derivar un sistema de ecuaciones, que al resolverlas llevan a la solución de las ecuaciones originales.

Después de haber discutido la solución de cuadráticas y cúbicas con el método "inverso" a completar cuadrados y cubos, respectivamente, surgen algunas preguntas de interés matemático. ¿Se puede extender el método anterior para resolver directamente ecuaciones de grado cuatro? ¿Se pueden usar estos métodos para probar que las quínticas generales no se pueden resolver por radicales?

OBSERVACIONES FINALES.

En el desarrollo del trabajo se destacan dos diferentes tipos de representaciones, y sus relaciones, en el proceso de resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas: la algebraica y la geométrica. A partir del análisis emerge una forma de conectar las ideas geométricas que permite extender las soluciones de las cuadráticas al caso de cúbicas. De la discusión, también se puede dar un significado geométrico a las soluciones en términos de áreas y volúmenes, con lo cual los estudiantes estarán en posibilidades de pasar del aspecto algorítmico al conceptual. Otro elemento de importancia que se obtiene de la discusión, es el mostrar a los estudiantes que las ecuaciones cúbicas también se pueden resolver mediante una fórmula, conocimiento que en muchos casos no se presenta, por lo menos hasta el nivel medio superior.

Referencias

Arcavi, A. (1999). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In F. Hitt and M Santos. (Eds.), Proccedings of the Tewnty First Annual Meeting for the Psycology of Mathematics Education (Vol. 1, pp 55-80). Cuernavaca, Mor. México.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its Relation to Geometry. In N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.), Approaches to Algebra, Perpective for Reasearch and Teaching , Mathematics Education Libray, Kluwer Academic Publisers.

Durh, W. (1990). Journey Through Genius, J. Wiley and Sons, Inc.

Grewal, A. S., and Godloza, L. (1999). Geometrical Solution of quadratic equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 30 No. 4, 573-579.

Lagrange, J. L. (1770-1771). Réflexions sur la Résolutions Algébrique des Équations, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres deBerlin.

Van der Warden, B. L. (1980). A History of Algebra, Springer-Verlag .