ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo[1]

Fecha de recepción: Mayo, 2000

Educación Matemática
Vol. 13 No. 2 agosto 2001
5-30

David Block
Departamento de Investigaciones Educativas
CINVESTAV, México
dblock@servidor.unam.mx
Diana Solares
Coordinación Sectorial de Educación Primaria en el D.F.
violetas69@hotmail.com

Resumen: *Presentamos los resultados de un estudio experimental realizado en un grupo de quinto grado de la escuela primaria, en el que exploramos las posibilidades didácticas de la división de números naturales como fuente de problemas que vuelven funcional a la noción de fracción. Nos proponemos mostrar que en problemas como el clásico "reparto de pasteles", ciertos valores de la variable "tipo de magnitud" dan lugar a procedimientos de resolución de los estudiantes cualitativamente distintos entre sí, que presentan un interés desde el punto de vista del aprendizaje de las fracciones.*

Con el propósito de ubicar esta problemática, en la primera parte del artículo desarrollamos una reflexión sobre lo que se ha llamado "el significado de las fracciones como cocientes" y, en la segunda parte, presentamos un análisis breve de la forma en que el vínculo división- fracción ha sido tratado en libros de texto de matemáticas dirigidos a la primaria, elaborados en distintos periodos.

Abstract: *We present the results of an experimental study with nine-ten years old children (fifth grade) about some didactical possibilities of division as a source of fraction problems. We stress that in problems as the classical "share cakes", the variable "kind of the magnitude" might propitiate different resolution procedures, interesting from the learning fractions processes perspective.*

In order to place this "problematique" in context, we will discuss firstly some issues on the meaning of fractions as quotients, and we will make a brief analysis about how the link division-fraction has been dealt in textbooks from different periods.

Résumé: *Nous présentons les résultats d'une recherche expérimentale avec des enfants de neuf-dix ans (cinquième année de la scolarité obligatoire), sur la division comme source de problèmes qui rendent fonctionnelle la notion de fraction. Nous essayons de montrer que dans les problèmes de partage du genre "n gâteaux entre m enfants" la variable "type de grandeur" peut favoriser différentes procédures de résolution qui intéressent du point de vue de l'apprentissage des fractions.*

[1] Agradecemos a Hugo Balbuena, Alicia Carvajal, Elizabeth García, Margarita Ramírez, Laura Reséndiz, Irma Saíz, Moisés García y a los árbitros de Educación Matemática sus valiosos comentarios a las versiones preliminares del presente artículo.

Pour contextualiser cette problématique, nous discutons d'abord quelques aspects du sens de la fraction comme un quotient d'entiers, puis nous analysons la façon dont la relation division-fraction a été présentée dans des textes de différentes périodes, adressés à l'école primaire.

Hace ya más de dos décadas se empezó a prestar atención a la diversidad de significados que la noción de fracción asume cuando se la considera en el contexto de los problemas específicos que permite resolver (Kieren, 1976; Kieren, 1988; Ohlsson, 1988; Behr, et.al, 1992). Si bien desde entonces se han realizado distintos acercamientos a esta polisemia, tiende a haber consenso en cuanto a la pertinencia de distinguir cinco significados (también llamados «subconstructos», «interpretaciones» o «concepciones», dependiendo de los acercamientos y de los autores), a saber: parte-todo; cociente, razón, operador y medida. También hay cierto nivel de consenso en cuánto a la necesidad de favorecer progresivamente la apropiación por los alumnos de estos significados específicos, en aras de lograr una comprensión cabal de la noción de número racional.

Esta diferenciación de significados ha permitido comprender mejor la complejidad que subyace a este objeto de enseñanza, las fracciones y, a la vez, ha motivado numerosas preguntas más que están curso de ser estudiadas, por ejemplo, las siguientes: ¿cómo se articulan estos significados en un proceso de aprendizaje? ¿Qué situaciones pueden favorecer su apropiación y su vinculación por parte de los alumnos?

El trabajo que presentamos a continuación aborda algunos aspectos puntuales de esta problemática.

1) Modalidades de la fracción como cociente de dos enteros.

En esta primera parte intentamos mostrar que, en el nivel de los contextos, con números que expresan cantidades o medidas, el significado de las fracciones como cocientes puede asumir modalidades con niveles de complejidad diversos, así como vínculos específicos con los otros significados de las fracciones y con otras nociones. Distinguir estas modalidades, además de permitirnos precisar la que asumimos en el estudio experimental, puede ser útil para ayudar a clarificar algunos aspectos de los significados de las fracciones.

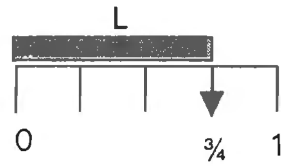
Dos definiciones de las fracciones: como "quebrados" y como "cocientes".

En la escuela primaria, cuando se pide a los niños que iluminen $\frac{3}{4}$ de un rectángulo, se espera que dividan el rectángulo en cuatro partes iguales e iluminen tres de éstas. Las fracciones se construyen como sumas de fracciones unitarias, $\frac{3}{4}$ tiene el sentido de partes de unidad: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Este significado es cercano a las primeras construcciones conocidas en la historia de las fracciones, las egipcias, y también las babilónicas. Es el sentido más difundido en la vida cotidiana y también es el que se enseña explícitamente en la primaria. Llamaremos a estas fracciones *quebrados*.

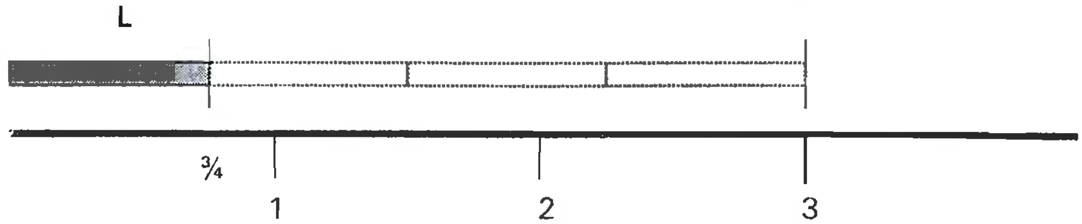
Por otra parte, en la escuela secundaria, las fracciones significan también cocientes: una escritura como $\frac{3}{4}$ remite por igual a la idea de partes de unidad: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, que a la idea de cociente: $\frac{3}{4}$ es el número que multiplicado por 4 da 3, es 3:4.

Tenemos entonces dos significados de las fracciones, cada uno con una fuerte presencia en la enseñanza escolar en momentos distintos:

¾ como partes de unidad: una unidad partida en cuatro partes iguales, de las que se toman tres.



¾ como cociente: la medida que multiplicada por 4 es igual a 3 unidades:



La construcción de las fracciones como cocientes

En la primaria, las fracciones no se introducen con el significado de cocientes, aunque este significado se utiliza subrepticiamente con fines prácticos. Por ejemplo, para expresar una fracción como 3/5 en su notación decimal (0.6)se suele enseñar a hacer la división 3:5.

La división funge únicamente como el *medio* que permite pasar de una expresión a otra del mismo número, medio que queda por el momento sin justificación y esto porque la justificación (el hecho de que las fracciones también significan cocientes) es demasiado compleja como para introducirse en ese momento. Otro ejemplo lo constituye la forma de denotar un cociente en el contexto de la escritura de fórmulas en geometría, por ejemplo:

A = (bXh)/2. En este caso la idea de fracción (quebrado) está totalmente ausente, la notación fraccionaria se utiliza para indicar una división.

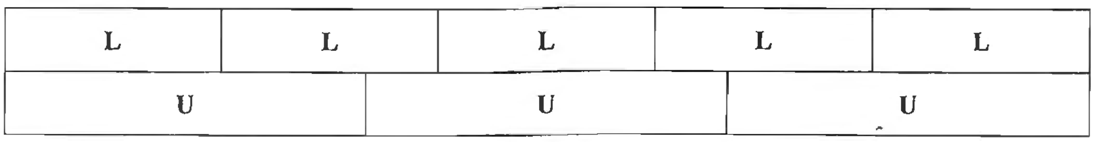
Más allá de éstas referencias fugaces al cociente, cabe preguntarse si es posible introducir las fracciones definidas como cocientes en la escuela primaria y, en caso de que lo fuera, si es conveniente introducirlas de esta manera, si presenta ventajas sobre el camino tradicional en el que las fracciones se introducen como quebrados, a partir del fraccionamiento de unidades. A continuación haremos referencia a dos estudios experimentales en los que dicho camino fue explorado. Éstos permiten entrever que dicha construcción es efectivamente posible en condiciones de trabajo muy particulares, dejan ver algunas de las ventajas de esta opción, pero también muestran sus limitaciones.

Brousseau (1981) diseñó una situación que propicia la medición por conmensuración: los alumnos tienen que comunicar la medida del espesor de una hoja de papel, para que otros la identifiquen entre varios tipos de hoja. La imposibilidad de medir el espesor de *una* hoja, los lleva a la idea de proporcionar el espesor de un paquete de hojas, por ejemplo " 8 mm, 100 hojas". Estos pares, en realidad razones, permiten identificar hojas de un espesor determinado así como anticipar, a partir de dos pares dados, qué hojas tienen mayor espesor, o si tienen el mismo, por ejemplo, las hojas que corresponden a (8 mm, 100 h) tienen menor espesor que las que corresponden a (15 mm, 100 h) y el mismo espesor que las que corresponden a (4 mm, 50 h)

En la medida en que los alumnos manipulan estos pares para expresar y comparar medidas así como para sumar medidas, se espera que les empiecen a dar, poco a poco, el estatuto de números: esto implica pasar de la relación "100 hojas miden 8 mm" a la relación "una hoja mide 8/100 de mm", en donde 8/100 de mm significa "el espesor una hoja tal que 100 hojas miden 8 mm", es decir, el cociente 8mm:100.

Block (1987) y Balbuena (1989) realizaron una secuencia que inicia con problemas de reparto (tiras que representan chocolates, entre diferentes cantidades de niños) y continúa con una situación en la que los alumnos utilizan la relación de conmensuración entre "chocolates enteros" y "porciones de chocolate" para comunicar el tamaño de las porciones. Llegan a establecer pares del tipo (3 ***u***, 5***l***), cuyo significado es "5 veces la tira ***l*** es igual a 3 veces la unidad", como un medio para comunicar la medida de ***l***. Posteriormente, al igual que en el trabajo de Brousseau, se propician diversas anticipaciones a partir de dichas expresiones de la medida.

(3U,5L)



Una fracción, 3/5 por ejemplo, en este contexto expresa la longitud de una tira que iterada 5 veces es igual a 3 unidades, es decir, expresa el cociente 3 unidades entre 5.

En ambos trabajos, la noción de fracción se construye directamente con el significado de una razón primero, de un cociente después, sin pasar por la noción de quebrado. No obstante, si bien la construcción de la noción de fracción que se logra mediante la fracción – cociente es más amplia que la que se construye con la de fracción - quebrado, aquella no queda exenta de dificultades de distinto orden. Rajohn (1982) demuestra en un estudio sobre estos dos significados de la fracción (cociente y quebrado) que éstos constituyen dos concepciones del número racional que se obstaculizan entre sí, en el sentido de que la adquisición de una puede dificultar la de la otra. La cuestión de cómo propiciar, en el nivel de la primaria, la construcción de una éstas concepciones a partir de la otra, constituye, hasta donde sabemos, un problema didáctico aún no resuelto.

Por otra parte, desde el punto de vista de la enseñanza primaria actual, introducir las fracciones como cocientes antes de introducirlas como quebrados representaría un cambio demasiado radical que difícilmente podría ser conducido de manera adecuada, por un lado, porque rompería con una práctica muy arraigada en la enseñanza (la introducción de fracciones como quebrados), y por el otro, porque situaciones didácticas como las que anteriormente presentamos son relativamente complejas.

Dos formas de "ser cocientes" para las fracciones

No obstante, las fracciones pueden jugar el papel de cocientes de una división sin haber sido definidas, o construidas con el significado de un cociente.

Consideremos las siguientes divisiones: 6:2 = 3 y 3:4 = ¾. Tanto el número natural 3 como la fracción ¾ pueden ser, en determinadas circunstancias, cocientes de una división, como pueden ser también productos de una multiplicación o sumas de una adición. La diferencia esencial entre los cocientes 3 y ¾ radica en que el "3", no es un cociente por naturaleza, o por definición, lo es sólo circunstancialmente, mientras que la fracción $\frac{3}{4}$ puede ser definida precisamente como el cociente de 3 entre 4, es decir, como el número que multiplicado por 4 da 3.

Así, el vínculo conceptual entre las nociones de fracción y de división de números naturales puede enfocarse de dos maneras: por un lado, la fracción puede *definirse* de entrada como un cociente de dos naturales, lo cual supone una construcción matemática como la que mostramos anteriormente, muy distinta a la que prevalece en la enseñanza básica, la llamaremos "*cociente por definición*". Por otro lado, si la fracción no se define de entrada como un cociente, si es un "quebrado" en el sentido que aquí le hemos dado, puede de todas formas resultar ser el cociente de una división de naturales, al igual que puede serlo cualquier número, la llamaremos "*cociente calculado* ". En este caso, la división no aparece como una característica esencial, definitoria de las fracción, sino como una fuente de situaciones que implican la utilización de quebrados.

Esto lleva a distinguir dos sentidos del signo "=" en una igualdad como "$3{:}4 = \frac{3}{4}$": la igualdad puede expresar que la fracción $\frac{3}{4}$ es lo que *resulta* de dividir tres entre cuatro (cociente calculado), o bien, que la escritura 3:4 y la escritura $\frac{3}{4}$ representan al mismo número (cociente por definición).

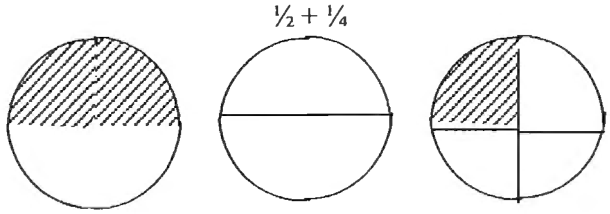
El carácter de cociente calculado se hace completamente explícito cuando el cociente de la división se *calcula* mediante el algoritmo de la división y se expresa con un decimal, por ejemplo en $3{:}4 = 0.75$. Por lo general lo que se expresa con esta igualdad es el hecho de que 0.75 *resulta* de dividir 3 entre 4, y no que "0.75" y "3:4" representan el mismo número.

Veamos en una situación ya clásica, el reparto de pasteles, la forma en que la fracción quebrado juega el papel de *cociente calculado.*

El quebrado, cociente calculado en el "reparto de pasteles".

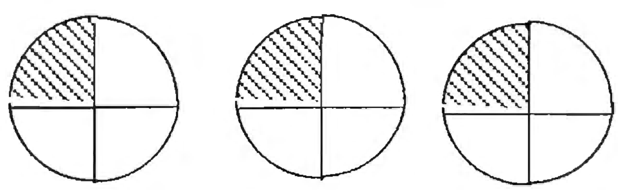
Consideremos el siguiente problema de división: 4 niños se repartieron 3 pasteles en partes iguales, se quiere saber cuánto toca a cada uno. Es perfectamente posible encontrar el cociente solicitado ($\frac{3}{4}$ de pastel) a partir de la interpretación de la fracción como quebrado <u>sin conocer</u> la definición de las fracciones como cocientes. De hecho esto es lo que suelen hacer los niños cuando se les plantea el problema:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$



O bien:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$



La fracción que resulta de la división sigue siendo concebida como quebrado, como suma de fracciones unitarias. El hecho de que esta fracción tenga como numerador al dividendo de la división y como denominador al divisor es algo, desde la perspectiva de los niños que resuelven, completamente *casual* que puede incluso pasar inadvertido[2].

Por ello, hasta este punto, el interés de la situación de reparto radica en que propicia una utilización de fracciones quebrado que presenta ciertas propiedades didácticas: los problemas ponen en juego varias unidades y no una sola, permiten que el resultado fraccionario sea mayor o menor que la unidad, permiten expresar el resultado con escrituras aditivas diferentes, según se haya hecho la partición y estudiar su equivalencia, por ejemplo, ½ + ¼ = ¼+ ¼ + ¼ (Balbuena, H., et., al.1984), (Block, 1987), (Dávila, 1992)[3].

Por otra parte, aunque en estos problemas nada obliga a introducir la noción de fracción cociente, tal y como la hemos definido antes, es posible ir un poco más lejos y plantear como objetivo que los alumnos, además de *constatar* que la división *a* unidades entre *b* arroja como cociente al quebrado *a/b* de unidad, comprendan y anticipen la necesidad de dicho resultado. El lograr esta anticipación, si bien no significaría que en ese mismo momento los alumnos se apropian del significado de las fracciones como cocientes, si permitiría tender un puente hacia dicha concepción.

Este objetivo ha sido asumido en mayor o menor grado en los textos para la enseñanza de las matemáticas dirigidos a la primaria, por lo menos desde mediados del siglo XX. A continuación revisaremos tres ejemplos representativos.

2) Presencia de la problemática en la enseñanza

Revisamos algunos textos elaborados en México a lo largo de la segunda mitad del siglo XX. En todos ellos la equivalencia entre la fracción y el cociente de dos enteros ha sido un tema de enseñanza, más o menos explícito: se trata siempre de mostrar que el quebrado a/b, ya conocido, puede ser el cociente de una división *a:b*.

Dos textos de los años 50

Los extractos que a continuación presentaremos, pertenecen a dos textos del mismo autor, el profesor Santiago Hernández Ruiz, quien en los años cincuenta se preocupó por ofrecer información y orientación sobre la enseñanza de la aritmética a maestros en servicio. Varios de sus textos se encuentran no sólo en la biblioteca de la Escuela Nacional de Maestros, sino también en las bibliotecas particulares de maestros y maestras. En su libro "Aritmética y Nociones de la Geometría. Tercer Ciclo" (Hernández, 1954:195), el autor presenta las siguientes definiciones:

> *FRACCION Y COCIENTE, TERMINOS EQUIVALENTES*
> *Las expresiones 8:5 y 8/5 son equivalentes. Una división puede indicarse en forma de fracción y a su vez, una fracción es un cociente indicado. Es frecuentísimo el uso alternativo de una y otra forma.*

---

[2] De León y Fuenlabrada (1996) plantearon a niños de distintos grados de la escuela primaria la situación de reparto de tres barras de chocolate entre 4 niños. Observan que muy pocos niños, en sexto grado, anticipan que el resultado es ¾ de barra. La mayoría se da a la tarea de realizar los repartos.

[3] Dávila (1992), entre otros investigadores, muestra que los repartos de pasteles implican, a cierta edad, dificultades anteriores al uso de fracciones, desde lograr hacer particiones equitativas y exhaustivas, hasta establecer equivalencias como las siguientes: una mitad obtenida partiendo un pastel rectangular en dirección vertical "tiene lo mismo" que una mitad obtenida partiendo el pastel en forma horizontal, o bien: una mitad de pastel y dos cuartos de pastel son partes iguales.

COCIENTE COMPLETO DE UNA DIVISION INEXACTA.
El cociente completo de una división inexacta es un número mixto que tiene por parte entera el cociente entero de la división y por parte fraccionaria un quebrado que tiene por numerador el residuo y por denominador el divisor. El cociente completo de la división 485 : 7 es 69 2/7. También puede escribirse: 485 : 7 =485/7.

En esta breve presentación, el autor justifica la fracción como cociente en el uso de ciertos procedimientos o algoritmos, pero no hay nada en la exposición del autor que dé cuenta de la forma en que pueden vincularse.

En una obra anterior (Hernández, 1950:216), en la parte titulada "El número fraccionario como conjunto de unidades fraccionarias y como consecuencia de la división inexacta. Identidad original de ambos conceptos", el autor afirma que "una vez que el alumno ha adquirido el concepto de número fraccionario, estará listo para usar la fracción en divisiones inexactas" Plantea la siguiente situación:

Si se repartieran ahora 8 tortas entre tres chicos (...) ¿Qué parte toca, pues, de las 8 tortas? Muy sencillo: 8/3. (...)
Podremos dar por lo pronto las dos tortas a cada uno y estudiar el modo de repartir las otras dos; pero entonces se trata de dividir dos tortas en tres partes. Si una torta se puede dividir, como sabemos, entre tres niños, tocando a cada uno 1/3, dos tortas también se podrán dividir, y la parte será justamente el doble: 2/3.

Tendremos pues: $8 : 3 = 2\frac{2}{3}$.

En este punto, los caminos que van a Roma son diferentes, y todos hacederos. Sólo uno excluimos inicialmente por su significación regresiva: repartir una torta entre los tres niños, luego otra, luego otra... y contar al fin: 1/3 +1/3 +1/3 +1/3 +1/3 +1/3 +1/3 +1/3= 8/3. Si se quiere hacer esta operación en abstracto, equivale a ésta: 8 : 3 = 24/3 : 3 = 8/3. (Hernández, 1950:216)

El primer procedimiento consiste en repartir primero unidades "completas": 8 tortas entre 3 niños, toca a 2 tortas y sobran 2. El razonamiento que sigue es interesante: si se reparte una torta entre 3, cada uno recibe un tercio; si se reparten 2, que es lo doble de uno, pues entonces también reciben lo doble, dos tercios. Este procedimiento consiste en establecer una relación proporcional entre la cantidad de tortas a repartir y la porción de torta que toca a cada niño, con el número de niños constante. Puede esquematizarse como sigue:

a unidades entre *b* = *a* veces (1 unidad entre *b*) = *a* veces *1/b* de unidad = *a/b* de unidad.

Llamaremos a este procedimiento "la conservación de las razones internas". Una pieza clave del procedimiento consiste en pasar por una división cuyo dividendo es la unidad (una torta entre 3 niños). En este caso, no hay ninguna dificultad en establecer que el cociente de la división (1:3) es la fracción $\frac{1}{3}$.

El segundo procedimiento sugiere repartir cada torta por separado, de donde a cada niño tocan 8 veces de torta. Este procedimiento se traduce también en la relación que hemos descrito arriba: *a* unidades entre *b* = *a* veces (1 unidad entre *b*). La diferencia es que en aquél, el factor "*a* veces" expresa una razón que se conserva en una relación proporcional, mientras que en éste, el factor "*a* veces" tiene un referente más concreto, proviene de un conteo de las veces que se reparte una torta. Claramente, éste último es más fácil de comprender. Lo llamaremos "la partición de cada unidad".

Finalmente, al plantear la "operación en abstracto" Hernández propone obtener el total de tercios contenidos en 8 enteros y después dividirlos entre 3. Un procedimiento como éste puede provenir de la búsqueda de una partición tal que el número de partes que se obtiene pueda dividirse entre 3, sin residuo. Llamaremos a este procedimiento "utilización del divisor como factor de partición".

Aunque es poco probable que con la sola lectura que propone Hernández los alumnos de primaria pudieran comprender el porqué de la relación en juego (por qué la fracción que resulta de $8 \div 3$ **es** $\frac{8}{3}$), el texto sugiere caminos que parecen viables para lograr el objetivo con un desarrollo didáctico más amplio. Desde este punto de vista, en este libro de mediados de siglo encontramos un relativamente buen análisis del problema, análisis que como veremos parece perderse en textos de las décadas posteriores.

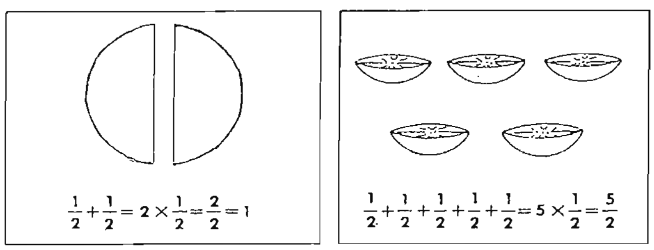
La época de las matemáticas modernas. Una lección de los años 70

El ejemplo que a continuación vamos a presentar fue tomado del libro de matemáticas para el alumno de 5° grado de educación primaria de la década de los 70 (SEP, 1972), el cual estuvo vigente hasta 1992. El tema se denomina *Producto de un entero por una fracción* y corresponde a la lección 55. En esta lección encontraremos un ejemplo de las dificultades que se enfrentaron en ésta década al intentar "ilustrar" o "concretizar" conceptos matemáticos.

Estos son los primeros ejercicios que presenta la lección:

Expresa en forma de multiplicación y efectúa la operación.

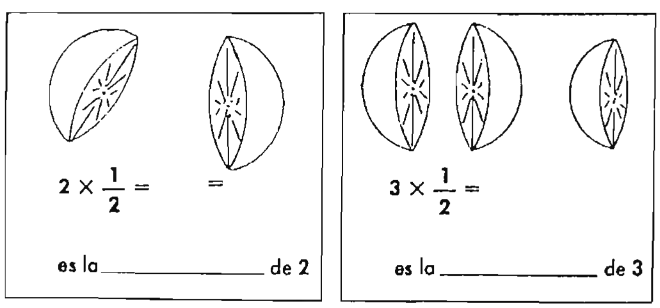
Dibujo 1



Notemos que hasta aquí, en las multiplicaciones presentadas, el multiplicador (número de veces) siempre ha sido un número entero. La fracción juega el papel de multiplicando (medida). En el siguiente ejercicio se pretende que el alumno entienda **el significado** de multiplicar un número entero (medida) por una fracción (multiplicador).

Expresa en forma de multiplicación y efectúa la operación.

Dibujo 2



El primer ejercicio supone la siguiente respuesta:

"2 x ½ = $\frac{2}{2}$ = *1.* (entonces) **1** es la ***mitad*** de 2", y para el segundo ejercicio:

"3 x ½ = $\frac{3}{2}$. Entonces, $\frac{3}{2}$ es la ***mitad*** de 3".

Así, la forma de introducir a los niños en la lección es primero a través de una suma iterada de una fracción de naranja (½ + ½ +½) en la que la fracción expresa una medida; después, se sustituye esta suma iterada por una multiplicación (½ + ½ + ½ = 3 veces ½ = 3 x ½), en la que el número entero (3) es un escalar (un número de veces) que multiplica a la fracción medida: 3 veces ½ naranja. Pero en la conclusión que se "infiere" en el segundo renglón debajo de la ilustración, ese **3** pasa a *convertirse* en expresión de una medida (3 naranjas) y el ½ pasa a ser ahora el escalar: $\frac{3}{2}$ es *la mitad* de 3:

Es decir, se pasa de

$$\underset{\text{Escalar}}{\underset{\downarrow}{3\ (\text{veces})}} \quad \underset{\text{Medida}}{\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{2}\ (\text{naranja})}} = \underset{\text{Medida}}{\underset{\downarrow}{\tfrac{3}{2}\ (\text{de naranja})}}$$

a:

$$\underset{\text{Medida}}{\underset{\downarrow}{3\ (\text{naranjas})}} \times \underset{\text{Escalar}}{\underset{\downarrow}{\tfrac{1}{2}\ (\text{veces})}} = \underset{\text{Medida}}{\underset{\downarrow}{\tfrac{3}{2}\ (\text{de naranja})}}$$

¿Qué noción es la que se intenta poner aquí en juego? Precisamente la de fracción como cociente de dos números enteros. Al plantear, por ejemplo, que "3/2 es la mitad de 3", se está afirmando que 3/2 es el cociente de 3 ÷ 2. Sin embargo no se parte de dicho cociente, en ningún momento hubo, al inicio, 3 naranjas que fueran a ser repartidas entre 2 (lo que hay es 3 veces 1/2 naranja). Se llega a la afirmación 3 ÷ 2 = 3/2 a través de un malabarismo numérico que pasa por encima del contexto (se registra un intercambio de los papeles que juegan la fracción y el entero). Los alumnos no pueden deducir que "multiplicar cualquier número entero por un medio equivale a obtener la mitad de ese número" porque no hay una justificación que les permita vincular, en el contexto, 3/2 con la división 3 ÷ 2.

Los libros de los 90

La reforma a los planes de matemáticas de los años noventa se caracteriza, entre otras cosas, por poner un mayor énfasis en la diversidad de significados de las nociones matemáticas y en el papel de los problemas y de los conocimientos no formales en el aprendizaje. En lo que corresponde a las fracciones, puede observarse una tendencia a posponer la introducción del cálculo formal, en aras de proporcionar más experiencias a los estudiantes: la introducción de fracciones se aplaza de primer grado a tercero, la multiplicación y la división con fracciones se aplazan a la secundaria (séptimo grado).

En la revisión de los nuevos libros de texto de 4° a 6° grados, centramos nuestra atención en las situaciones en las que se plantea la división *a unidades* ÷ *b*, cuando ***a*** no es múltiplo de b. Encontramos que ahora, sobre todo en cuarto grado, se presentan varias situaciones de reparto (de galletas, pasteles u hojas) en las que el resultado es una fracción: se pide a los alumnos que encuentren la fracción de unidad que resulta de un reparto, que propongan formas distintas de realizar los repartos y también que comparen repartos (en qué reparto tocará más, en cuál tocará menos), por ejemplo, "En el equipo de Mario hay cuatro niños y se repartieron 3 galletas. En el equipo de Laura hay cinco niñas y también se repartieron 3 galletas ¿A quién le tocó más galleta, a Mario o a Laura?" (SEP, 1994a: 124). Estas situaciones no se complejizan de un grado a otro, y en ninguno de los libros se pretende que los niños lleguen a establecer la relación "a unidades entre $b = a/b$ de unidad", lo cual puede deberse a la cautela asumida en estos libros con respecto a la formalización[4].

No obstante, en el libro de quinto grado encontramos una situación distinta al reparto en la que se utiliza, más no se justifica, el vínculo entre la división y la fracción (SEP, 1994b: 132- 133). Nuevamente a colación del algoritmo de la división de naturales con cociente decimal, se presenta una situación en la que es necesario dividir el residuo:

$$\begin{array}{r|l} & \;7 \\ \hline 2 & 15 \\ & \;\;1 \end{array}$$

Se da entonces la siguiente explicación: "Si se reparte por igual el residuo 1 entre el divisor 2, el resultado es un medio, esto es,. Con números decimales $\frac{1}{2} = 0.5$".

Se ofrece la solución:

$$\begin{array}{r|l} & \;7.5 \\ \hline 2 & 15.0 \\ & \;10 \\ & \;\;\;0 \end{array}$$

Inmediatamente se pide a los alumnos que resuelvan las siguientes divisiones:

$$2\overline{)7} \qquad 5\overline{)631} \qquad 6\overline{)784}$$

En la primera y segunda división el residuo es la unidad, en la tercera división el residuo es cuatro. Esto marca una diferencia importante: si se desea que el resultado se exprese con fracciones, el residuo 1 facilita tal expresión, puesto que en este caso particular las interpretaciones de la fracción como quebrado y como cociente coinciden: $1 \div 2 = \frac{1}{2}$, $1 \div 3 = \frac{1}{3}$, $1 \div 5 = \frac{1}{5}$., etc. Pero cuando el residuo es 4 se presenta una división más compleja; $4 \div 6 = \frac{4}{6}$. No hay ningún trabajo didáctico que permita comprender por qué $4 \div 6$ es igual a $\frac{4}{6}$. La ilustración de una regla general mediante la utilización del caso particular en el que las dificultades no se manifiestan, constituye una de las maneras frecuentes en la enseñanza de las matemáticas de eludir las dificultades.

[4] Llama la atención, sin embargo, que en los programas aparece explícitamente el contenido de la fracción como cociente. Por ejemplo, en el programa de Matemáticas para 5° grado se señala como contenido el "empleo de la fracción como razón y como división, en situaciones sencillas". (SEP, 1993:65).

Comentario

Resulta sorprendente encontrar en el texto más viejo, el de los años 50, las explicaciones más variadas y claras de la equivalencia que estudiamos, la fracción y el cociente. En texto ofrece por lo menos tres formas de justificar dicho vínculo sin abandonar el contexto en el cual los quebrados fueron definidos y cobran sentido. Es cierto que, hoy en día, a un texto se le exige mucho más que una "buena explicación", se espera de éste la sugerencia situaciones que permitan al alumno apropiarse de la noción, o de la relación en juego, y esto representa una tarea más compleja.

En el texto de los setenta, el vínculo en cuestión aparece en el tema de la multiplicación de una medida fraccionaria por un operador entero, multiplicación que subrepticiamente se convierte en la de una medida entera por un operador fraccionario. Este cambio implica una ruptura con el contexto lo cual dificulta seguir su hilo conductor. Finalmente, en los textos de los años noventa, el tema deja de ser tratado explícitamente y en su lugar se ofrecen experiencias de reparto.

El estudio experimental que presentamos a continuación toma como punto de partida esta última propuesta, intenta enriquecerla al ampliar la gama de problemas considerados mediante un cambio en el tipo de magnitud considerada, e intenta a la vez explorar, con los recursos didácticos con que contamos hoy en día, la factibilidad de los razonamientos descritos en el texto de los años cincuenta para inferir explícitamente que el cociente de la división a:b es la fracción a/b.

3) Estudio experimental:

Los quebrados en el papel de "cocientes calculados". El efecto de una variable didáctica

Nos situaremos a continuación en la familia de problemas que dan lugar a utilizar los quebrados en tanto cocientes calculados. Se trata de problemas en los que una cantidad concreta (**a** unidades) es objeto de una partición (entre **b**) cuyo cociente es otra cantidad, una fracción de unidad (**a/b** de unidad).

A esta familia de problemas pertenecen los clásicos repartos de pasteles (o de barras de chocolate, de tortas, o cualquier otra colección de objetos fraccionables). En estos repartos, aquello que es objeto de partición es una colección de objetos y por lo tanto es una magnitud discreta, aunque los objetos, considerados individualmente puedan ser fraccionados, y por lo tanto constituyan en sí mismos una magnitud continua (superficie, longitud, peso). Esto es lo que permite realizar el reparto repartiendo cada objeto por separado y con ello concluir que **a** objetos entre **b** es igual a **a** veces **un** objeto entre **b** (procedimiento "partición unidad por unidad").

En otro estudio (Block, 2001) hemos observado ya la posibilidad de propiciar en estudiantes de quinto grado, un razonamiento como éste al plantear repartos en los que el número de pasteles varía mientras que el de niños es constante:

Si se reparte un pastel entre 7 niños, a cada uno toca $\frac{1}{7}$ de pastel.

Si se reparte otro pastel más, les toca otro $\frac{1}{7}$ de pastel, es decir, $\frac{2}{7}$.

En general, si se reparten n pasteles, como de cada pastel les toca $\frac{1}{7}$, tendrán $\frac{n}{7}$...

El hecho de que del reparto **a** pasteles entre **b** resulte la fracción **a/b** de pastel deja de ser entonces casual para volverse necesario.

La variable "magnitud discreta o continua"

Nos interesaremos ahora por el efecto de la variable "tipo de magnitud": ¿qué sucede si la magnitud en juego es continua, si las unidades no existen físicamente separadas, por ejemplo el "reparto" de una longitud de 3 metros?. Podría pensarse que la magnitud longitud, al expresarse mediante una medida como "tres metros", se ha "discretizado" y que los metros pueden ser considerados como los pasteles. Sin embargo el contexto suele tener un peso significativo, sobre todo en las primeras experiencias. Si el problema consiste, por ejemplo, en cortar un listón de tres metros para obtener cuatro listones del mismo tamaño, evidentemente no se va a cortar cada metro de listón en cuatro para después juntar tres pedazos de un cuarto. En un problema como el del listón, a diferencia de uno de reparto de pasteles, el cálculo de la medida buscada mediante la partición de cada unidad no corresponde con las acciones que se llevarían a cabo físicamente. Dicha resolución requiere desprenderse del contexto y probablemente por ello no es una solución inicial. Dos experiencias puntuales en las que aplicamos problemas como el del listón a grupos de alumnos de quinto grado quienes ya habían establecido el algoritmo "*a* pasteles entre *b* personas es igual a *a/b* de pastel", sugieren efectivamente que ésta transferencia no es espontánea.

La estrategia que en el problema del listón se corresponde más con las acciones físicas que se realizan (tomar la longitud de tres metros y partirla en cuatro) podría ser la de dividir 3 metros entre 4. Estaríamos entonces frente a un problema trivial cuando los niños ya saben realizar esta división con cociente decimal: 3 metros entre 4 es igual a 0.75 metros. Una solución aún más simple podría consistir en aprovechar que la medida se expresa en el sistema decimal para cambiar la unidad de manera que el cociente sea entero: 300cm entre 4[5].

Pero si dicha división se plantea antes de que los niños dominen el algoritmo correspondiente, y si además se utiliza una unidad no convencional, por ejemplo, "3 varas entre 4", es probable que los niños ya no piensen en recurrir al algoritmo de la división, el problema deja entonces de ser trivial. Cabe suponer que una estrategia inicial para realizar la división será en ese caso la de la falsa posición, utilizando medidas expresadas con fracciones, por ejemplo: se estima que la medida resultante puede ser ½ metro, se multiplica ½ por 4, se obtienen dos metros, se concluye que el cociente debe ser mayor, se vuelve a estimar, etc.

Entonces el tipo de magnitud en juego podría afectar la manera de resolver: mientras el reparto de pasteles propicia la obtención progresiva del cociente mediante la partición de cada unidad, el problema de dividir una longitud podría propiciar la búsqueda de una medida que satisfaga la condición de que, repetida cierto número de veces, sea igual a otra medida.

---

[5] Notemos que en el problema del reparto de pasteles estas soluciones no suelen aparecer, por ejemplo, 3 pasteles entre 4 = 0.75 de pastel, o bien 300 centésimos de pastel entre 4 = 75 centésimos de pastel. Aunque en la práctica la utilización de decimales en lugar de fracciones abarca prácticamente a todos los casos de medición, las fracciones conservan la exclusividad en algunos espacios, por cierto poco numerosos, sobre todo cuando las unidades no pertenecen a un sistema decimal establecido y cuando la fracción en juego es muy simple (medios, cuartos, octavos).

Nos interesa estudiar si en este último problema es posible propiciar que la búsqueda de dicha medida se realice mediante un procedimiento más sistemático que el del ensayo y error, y, en particular, si es posible, establecer, a partir de alguno de los procedimientos de resolución, la relación "$a{:}b$ debe ser igual a a/b". Estas preguntas más específicas orientaron la experiencia que presentamos a continuación.

La situación didáctica fundamental[6]

Se considera a un conjunto de "robots", por lo general cuatro, que al dar un número determinado de pasos (todos el mismo), avanzan cierta distancia (medida en unidades arbitrarias). Se pregunta por el tamaño de un paso de cada robot. Por ejemplo:

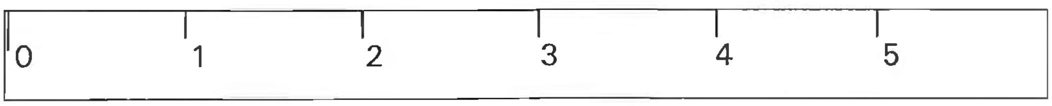
Robot	Distancia recorrida en 5 pasos	Distancia recorrida en 1 paso
A	1 unidad	
B	2 unidades	
C	3 unidades	
D	4 unidades	

En algunas situaciones se pide únicamente que construyan físicamente la longitud del paso (se utilizan tiras de cartoncillo para representar tal longitud) y en otras se pide además que determinen la medida. La primera opción no requiere del uso de fracciones, pero permite comprender la consigna e incorporar recursos que después pueden facilitar la obtención de la medida.

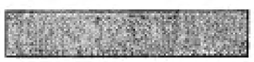
El tamaño del paso de cada robot está determinado por la división "distancia en b pasos entre b". La división ($\div b$) juega el papel de operador constante en la relación proporcional entre el recorrido en b pasos y el tamaño de un paso.

Materiales. Cada equipo recibe una ficha de trabajo en la que se presenta la información en una tabla como la anterior. Además, reciben las siguientes tiras de cartoncillo:

Tira numerada (tira amarilla):



Tira unidad de la misma longitud que las unidades de la tira numerada:



[6] El término es propio de la Ingeniería Didáctica y se refiere a la situación a partir de la cual se genera un campo de problemas al modificar ciertas variables. "Una situación es fundamental respecto al conocimiento que interesa hacer funcionar, cuando es posible, mediante el juego de las variables presentes en ella, hacerla coincidir con cualquier situación en la cual intervenga ese conocimiento" (Gálvez, 1994:45).

Tira para "construir" el "paso":

La validación:

Se previeron tres formas de validar. La "validación empírica" consiste en cortar la tira de cartoncillo según la medida estimada para el paso e iterarla sobre la tira numerada tantas veces como lo indique el número de pasos. Si al final hay coincidencia con la distancia señalada, entonces la medida del paso es correcta.

La "validación aritmética" consiste en sumar la medida estimada para el paso tantas veces como lo indique el número de pasos, o bien multiplicar la medida por el número de pasos, para finalmente obtener el recorrido total. Esta forma de validación lleva a establecer relación multiplicativa: $a \div b = x$, entonces

b veces $x = a$.

Por último, la "verificación intermedia", así nombrada porque incluye elementos de las dos anteriores: por ejemplo, si para un robot que avanza 3 unidades en 5 pasos se afirma que su paso mide $\frac{3}{5}$, cada unidad de la tira numerada se divide aproximadamente en quintos (marcando líneas con un lápiz), posteriormente se forman segmentos de tres quintos y, finalmente, se verifica si 5 veces $\frac{3}{5}$ es igual a 3 unidades. Si bien se recurre a una división física de las unidades, no es necesario que tal división sea exacta, pues existe el consenso de que cada unidad se divide en quintos y que éstos son iguales.

El procedimiento que se quiso propiciar

Entre los procedimientos de resolución previstos (los veremos más adelante al analizar lo que hicieron los alumnos) explicaremos aquí únicamente el procedimiento que tratamos de propiciar con las sucesivas aplicaciones de situación fundamental, por considerarlo el más económico y adecuado para que los alumnos establecieran y comprendieran la relación $a \div b = a/b$.

La medida del paso de un robot que en b pasos avanza a unidades puede obtenerse a partir de alguna de las medidas ya calculadas, en particular, a partir de la del paso del robot que en ese mismo número de pasos avanza sólo una unidad. Por ejemplo: si un robot avanza una unidad en 5 pasos, el tamaño de su paso es fácil de determinar: $\frac{1}{5}$ de unidad. Un robot que recorre, en ese mismo número de pasos, 3 unidades, debe tener un paso tres veces mayor. Su paso mide entonces 3 veces $\frac{1}{5}$ de unidad.

	Robot	Distancia recorrida en 5 pasos	Distancia recorrida en 1 paso	
X 3	A	1 unidad	$\frac{1}{5}$ de unidad	X 3
	C	3 unidades	$\frac{3}{5}$ de unidad	

Ya habíamos visto este razonamiento en el texto del maestro Hernández Ruiz. Se trata de aplicar la conservación de las razones internas: en el mismo número de pasos, a un recorrido 3 veces mayor, corresponde un paso 3 veces mayor. Este procedimiento permite establecer la siguiente relación:

a unidades $\div\, b = a$ veces $(1u \div b) = a$ veces $1/b = a/b$.

Para propiciar que se consideren estas razones internas, en la situación fundamental se presentan sistemáticamente varios robots que dan un mismo número de pasos. Además, en la primera aplicación de esta situación y en algunas más se incluyó entre los robots al que avanza una sola unidad. Cuando el robot que avanza una unidad no se incluye, recurrir al procedimiento en cuestión implica la dificultad adicional, nada pequeña, de proponer su existencia como un medio que facilita los cálculos.

La secuencia de situaciones

La secuencia comprende ocho situaciones. Las tres primeras fueron el antecedente de la situación fundamental (cuarta situación) y tuvieron el propósito de permitir a los alumnos familiarizarse con las relaciones en juego, tamaño de un paso, número de pasos y distancia total. En estas situaciones establecieron relaciones como: si el número de pasos es el mismo, entre más grande es el tamaño de un paso, más grande es el recorrido.

Las situaciones posteriores a la situación fundamental tuvieron los siguientes propósitos: brindar experiencias similares para permitir a los alumnos mejorar sus procedimientos; difundir los procedimientos de resolución y propiciar su discusión; estudiar la aplicación de relaciones y procedimientos a situaciones con la misma estructura pero en diferente contexto[7].

La experimentación y el análisis

Para cada situación se desarrollaron las siguientes tareas:

Análisis previo. En este análisis señalamos las características generales de la situación, los objetivos, los momentos de la clase, su organización y las consignas. Expusimos las hipótesis referentes a los razonamientos y procedimientos que esperábamos de los alumnos, así como los posibles errores.

Experimentación y registro. La secuencia se aplicó en un grupo de 5° grado de educación primaria con 36 alumnos[8]. Los alumnos han estudiado las fracciones desde tercer grado, en tanto quebrados, la equivalencia de fracciones, la suma y la resta con distinto denominador. Así mismo, han empezado a estudiar la notación decimal de las fracciones.

Las sesiones fueron dirigidas por la maestra del grupo, a quien previamente se explicó el objetivo y las fases de cada sesión. Se realizaron de una a dos sesiones a la semana con una duración de 60 a 90 minutos.

[7] La descripción detallada y el análisis previo de cada situación pueden consultarse en Solares (1999).
[8] La escuela primaria es de nivel socio económico heterogéneo y se caracteriza por un buen nivel académico.

Cada sesión fue observada y registrada por dos observadores (en algunas sesiones sólo por uno) quienes observaron a dos o tres equipos . Los protocolos de las sesiones se realizaron además con el apoyo de las grabaciones y de las fichas de trabajo de los alumnos.

Análisis posterior a cada sesión. Al término de cada sesión se realizó un primer análisis de lo ocurrido con la finalidad de tomar decisiones sobre la continuación de la secuencia. Eventualmente, en función de lo que sucedió en una clase, se hicieron modificaciones a las clases siguientes.

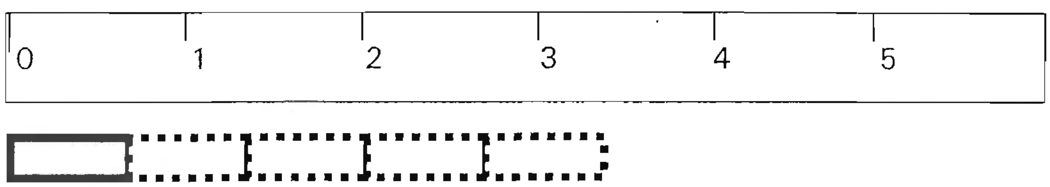
Análisis final. En éste se hizo un análisis global del proceso, principalmente contrastando las hipótesis planteadas en el análisis previo con los procedimientos, argumentos y errores observados durante la secuencia.

Resultados: diversidad de procedimientos

Los niños del grupo desarrollaron una diversidad considerable de procedimientos para resolver la situación fundamental. Los organizamos en dos grupos: procedimientos de ensayo y error, que la mayoría de los alumnos utilizó en la primera aplicación de la situación, y procedimientos más sistemáticos, que algunos alumnos desarrollaron desde la primera aplicación, y otros más adelante.

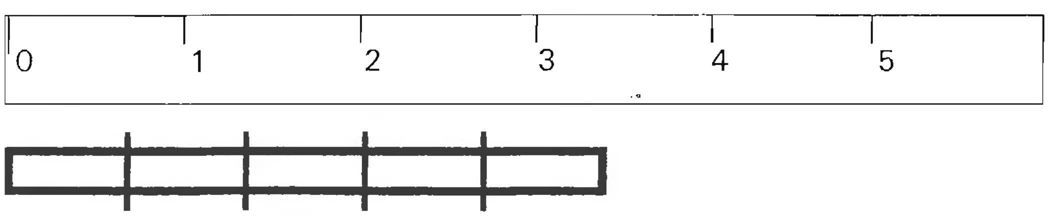
Procedimientos de ensayo y error.

a) Obtener físicamente "el paso" por ensayo y error. Por ejemplo, para un robot que avanza 3 unidades en 5 pasos, algunos alumnos cortaron un pedazo de la tira y la iteraron sobre la tira numerada para ver si llegaba o no a la meta. De acuerdo al resultado obtenido, cortaron un pedazo más grande o más pequeño al anterior.



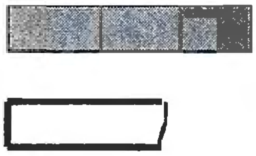
b) Obtener físicamente el tamaño del paso formando una longitud igual al recorrido total y partiéndola entre el número de pasos.

Para el mismo ejemplo (3 unidades en 5 pasos), los niños cortaron una tira de longitud igual a 3 unidades, y la partieron en 5 partes iguales.

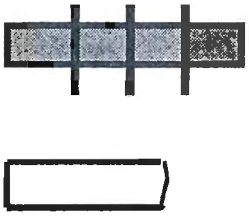


En los procedimientos a) y b), una vez que se tuvo el paso, algunos alumnos intentaron asignar una medida comparando el paso con la unidad, por diferentes medios:

- Estimando: "un poco más de la mitad", "como un tercio" (de la unidad)...



- Doblando la tira-unidad en medios, en cuartos, y, finalmente, aproximando con octavos.



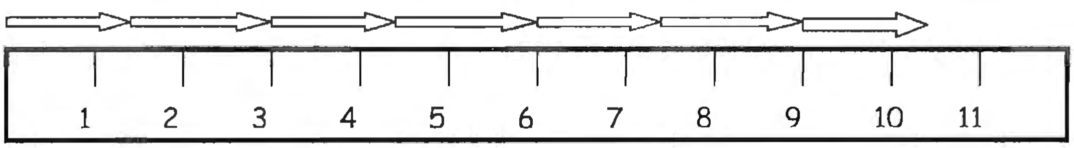
En este último procedimiento podemos ver la puesta en marcha de un sistema de medición binario basado en el mismo principio que el decimal: así como en el sistema decimal cualquier medida puede ser aproximada mediante fracciones decimales (del tipo $n/10^m$), en éste, las medidas se aproximan mediante fracciones del tipo $n/2^m$

c) Sin utilización del material, estimaron una fracción de unidad, la verificaron multiplicándola por el número de pasos (o sumándola iteradamente) y la ajustaron progresivamente. Por ejemplo, para un robot C, que avanza 9 unidades en 7 pasos, se presentó el siguiente diálogo en un equipo[9]:

Ismael a Juan. *Es menos de uno y medio.*

(...)

Alejandro. *Va a llegar al nueve y se va a pasar por un medio. Vean (prueban sobre la tira amarilla y se pasan más de lo previsto).*



(...)

Alejandro. *(...) Tiene que ser entre uno y uno y medio.*

Ismael. *Tendría que ser uno y un cuarto.*

(Prueban con 1 ¼ pero les falta un poco para llegar a 9, llegan a 8 ¾).

Alejandro. *Un tercio es más de un cuarto pero menos de un medio.*

Ismael. *Sí, un tercio.*

[9] Las abreviaturas en los registros se refieren a lo siguiente: **Obs.** – observadora; **Ao.** – alumno; **Aos.** – alumnos; **M.** – maestra; **Mo.** – maestro.

Alejandro *Un quinto es más chico que un cuarto, un tercio es más grande. Uno y un tercio. (Intentan con un entero y un tercio, pero al avanzar 6 pasos llegan ya a 8 unidades) (...)*

Obs. *Entonces, si es un paso y un cuarto, le falta, si es un paso y un tercio, le sobra, ¿cuánto tendría que ser? (...)*

Juan. *Un paso un quinto (...)*

Alejandro. *Pero es que mira, un quinto es más chico que un cuarto, y si con un cuarto no se pudo, con un quinto menos.*

Ismael. *Un octavo.*

Alejandro. *¡Ay! (risas).*

La búsqueda de una medida x satisfaga la condición 7 veces x = 9 unidades, lleva a los niños a estimar varias medidas, a iterarlas y ajustarlas hasta encontrar una buena acotación entre números formados con fracciones unitarias: $1\frac{1}{4} < X < 1$. Cabe señalar que cuando los alumnos estimaron medidas fraccionarias, casi siempre fueron unitarias. Este podría haber sido un buen momento para preguntar y estudiar si existen o no fracciones mayores que $\frac{1}{4}$ pero menores que $\frac{1}{3}$.

Procedimientos más sistemáticos.

a) La búsqueda de una partición cómoda de la unidad.

Varios alumnos tenían claro que el problema se resolvía con una división, pero se encontraban con una división "difícil" de realizar, ya que el dividendo no era múltiplo del divisor y generalmente era menor que el divisor. Por tal razón, optaron por partir cada unidad en determinado número de partes para después dividir el total de partes entre el número de pasos. El problema a resolver ahora era ¿en cuántas partes conviene partir cada unidad? Aquí tenemos un ejemplo de esta búsqueda, nuevamente para el Robot C que avanza 9 unidades en 7 pasos.

Alejandro. *(...) Miren, necesitamos cuarenta y cinco quintos para llegar aquí (a 9 unidades). Cuarenta y cinco quintos entre siete...*

(...)

Obs. *¿Por qué cuarenta y cinco quintos?*

Alejandro. *Por que de aquí al nueve necesitamos cuarenta y cinco quintos.*

Obs. *Pero ¿por qué quintos?*

Alejandro. *¡Ah! Pues eso yo lo saqué (...)*

Ismael. *Séptimos, serían séptimos.*

(Sin embargo, Ismael sigue probando con $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$).(...)

Alejandro. *De allá a acá (del 0 al 9) en sextos serían cincuenta y cuatro sextos.*

Obs. *¿Por qué sextos?*

Alejandro. *No sé, (a Ismael) ¿por qué me dijiste sextos?*

Ismael. *¡Séptimos!*

En cada uno de sus intentos, Alejandro logra una medida aproximada pero no se conforma, desea la medida exacta y se encuentra con un problema: le queda un residuo. Más adelante veremos como resuelve su problema, por ahora veamos ahora dos tipos de particulares de partición.

- Partir cada unidad en décimos

  (para un robot que avanza 2 unidades en 5 pasos)

Rolando. *Nosotros le pusimos un cero al dos, tengo veinte, vi entre cinco cuánto me sale y saqué el cuatro ... y ya para ponerlo normal le puse un diez y le puse cuatro décimos.* $(\frac{4}{10})$

Obs. *repite la explicación de Rolando escribiendo en el pizarrón la división descrita por Rolando* $5\overline{)20}$ con cociente $.4$:

Obs. *¿Cuatro décimos cómo se escribe?*

Ao. *Un cuatro y abajo el diez.*

(...)

Rolando. *Hay que multiplicar cinco veces y ya sale.*

Obs. *Pero este cuatro décimos, ¿qué representa? El tamaño del paso, el número de pasos, ...*

Rolando. *Un paso. Y cinco veces llegaría a dos unidades.*

Obs. *¿Lo sumo? ¿cómo le hago?*

Rolando. *Lo sumas.*

Obs. *¿Cuántas veces?*

Rolando. *Cinco veces.*

Obs. *(Escribe la suma en el pizarrón y obtiene* $\frac{20}{10}$*). ¿Y cuánto da esto?*

Rolando. *Dos unidades, dos enteros.*

La partición de la unidad en décimos (y centésimos, si es físicamente posible) constituye la forma instituida de aproximar una medida fraccionaria con decimales. El procedimiento de Rolando es de hecho el principio del algoritmo de la división con cociente decimal. Aunque en este caso particular el procedimiento se facilitó por el divisor 5 (al dividir el total de décimos entre cinco no hay residuo), la idea de "partir las unidades" en décimos o centésimos proporciona una buena entrada para el estudio de dicho algoritmo.

- Partir cada unidad en el número de pasos

Al partir cada unidad en el número de pasos se obtiene ya no un resultado aproximado, sino exacto, pues el número total de partes que se obtiene es múltiplo del divisor (número de pasos). Volvamos al equipo de Alejandro: los alumnos han estado buscando un factor de partición que les permitiera dividir el total de partes entre el número de pasos sin que haya residuo. De una manera que no logramos identificar, Alejandro descubre que el número de pasos proporciona la partición deseada. Trabajan con el robot que avanza 4 unidades en 5 pasos:

> *(...)*
>
> ***Alejandro.*** *En cinco partes (unidades) hay veinte quintos.*
>
> ***Ismael.*** *Son dos cuartos y un cachito (no atienden a la idea de Alejandro, siguen buscando por ensayo y error).*
>
> ***Alejandro.*** *Sí, pero ese cachito ¿cómo lo vas a sacar? ... Cuatro por cinco serían los veinte.*
>
> ***Ismael.*** *En cuartos sería en lo que se divide...*
>
> ***Alejandro.*** *No porque mira, esto (la unidad) lo vamos a partir en quintos. Lo que tenemos que hacer es* <u>*cómo llegar en cinco pasos a veinte quintos.*</u>
>
> ***Obs.*** *¿Cómo distribuyes los veinte quintos en cinco pasos?*
>
> ***Alejandro.*** *¡Cuatro quintos!*
>
> *(Ismael le pide que lo compruebe. Alejandro divide con dificultad la unidad en quintos. Finalmente obtiene los cuatro quintos y comprueba sobre la recta que, efectivamente, llega a las 4 unidades en 5 pasos)*

Más adelante, frente a otro problema, Ismael y Alejandro muestran que han podido generalizar su procedimiento. Para un robot que avanza 9 unidades en 7 pasos:

> ***Alejandro.*** *Ya pudimos. Primero hicimos lo que nos dijo Ismael, de acá al nueve hay sesenta y tres unidades (séptimos) lo dividimos entre siete y nos dio a nueve, entonces... De acá a acá hay sesenta y tres séptimos entonces lo dividimos eso entre siete, porque eran siete pasos y nos dio...*
>
> ***Ismael.*** *De nueve no sobra nada. Nos dio a nueve y no sobró nada.*
>
> ***Alejandro.*** *Con nueve séptimos llega acá. (Al número 9).*
>
> *(...)*
>
> ***Obs.*** *¿Y cómo sacaron los sesenta y tres séptimos?*
>
> ***Alejandro.*** *Multiplicamos siete por nueve.*

Este procedimiento se difundirá rápidamente entre varios miembros del grupo. Es, efectivamente, un procedimiento accesible y eficiente que permite encontrar que ***a*** unidades entre ***b*** es igual a ***a/b*** de unidad. Notemos sin embargo que no permite, en cambio, comprender *porqué* resulta precisamente la fracción cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor. El recorrido, compuesto de varias operaciones, es demasiado largo, y la explicación es de índole algebraica:

$$a \div b = \frac{ab}{b} \div b = \frac{(ab \div b)}{b} = \frac{a}{b}$$

No obstante, independientemente de la explicación anterior, la cual deberá esperar todavía algunos años, el procedimiento constituye un logro importante de los niños. Representa el nivel de sistematización más alto que se encontró en esta experiencia.

b) El algoritmo de la división con cociente decimal.

Vimos anteriormente que en un equipo optaron por partir la unidad en décimos, procedimiento que está en el origen de la división con cociente decimal. Otros alumnos (pocos) intentaron aplicar de entrada el algoritmo para dividir el número de unidades del recorrido entre el número de pasos. Se toparon entonces con dos tipos de dificultad: la falta de dominio de dicho algoritmo y la dificultad para interpretar un decimal aplicado a la unidad "tira": los centésimos no representan centímetros, entonces ¿qué representan? A continuación presentamos un ejemplo cuyo interés radica en que los alumnos sólo lograron obtener la primera cifra decimal del cociente, y, a partir de esa aproximación intentan acercarse más al cociente exacto mediante un proceso de sumas iteradas.

Primero aparece la siguiente división:

$$\begin{array}{r} 1.1 \\ 6\overline{)7} \\ 10 \end{array}$$

Y después las sumas:

$$\begin{array}{r} 1.1 \\ 1.1 \\ 1.1 \\ 1.1 \\ 1.1 \\ \underline{1.1} \\ 6.6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \\ 1.2 \\ \underline{1.2} \\ 7.2 \end{array}$$

En esta búsqueda, surgen dos problemas que podrían ser objeto de un estudio específico: primero, nuevamente aparece el problema de la densidad: ¿hay o no un número comprendido entre 1.1 y 1.2? Por otra parte cabe preguntar si en algún momento debe quedar un residuo de cero, es, decir, si el cociente de dos números naturales debe poderse expresar siempre de manera exacta mediante un decimal. La búsqueda de los alumnos parece indicar que ellos piensan que así es.

c) Identificar las relaciones internas.

Este fue el procedimiento que se quiso propiciar en la secuencia. No obstante, muy pocos alumnos lo desarrollaron. Veamos primero un ejemplo en el que entre los robots figuraba el que recorre una sola unidad.

(Para un robot B que avanza 2 unidades en 5 pasos).

Erick. *Primero dividimos la unidad de medida en cinco partes, que es el robot A (el robot A avanza 1 unidad en 5 pasos), y después como son dos unidades (robot B), es lo doble de A.*

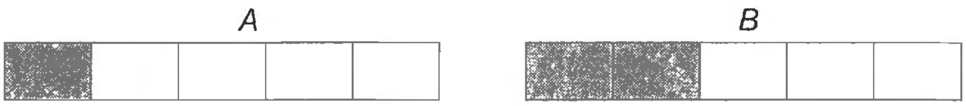
M. ¿Cómo escribieron su mensaje?

Erick *Igual. (al equipo anterior: "Haz robot que dé un paso de $\frac{2}{5}$") (...)*

M. ¿Y cómo podríamos saber que realmente es el paso exacto?

(Erick explica dibujando en el pizarrón)

Erick. *Como esto es una unidad entera (señala del 0 al 1 en la recta), lo dividimos en cinco partes, que es el robot A; entonces como ése robot es una unidad y éste es dos unidades (B), ocupamos dos (dos unidades de la recta, del 0 al 2). (Dibuja en el pizarrón una tira-unidad y la divide en 5 partes): Como el A tiene sólo éste (señala $\frac{1}{5}$ de la unidad que dibujó) y el B tiene dos, agarramos dos.*



Es decir:

		Distancia en 5 pasos	Distancia en un paso	
Robot A		1 U	1/5 de U	
	X2			X2
Robot B		2U	2/5 de U	

Veamos ahora un ejemplo en el que le robot que avanza una unidad no figuraba entre los robots de la lista:

(Para un robot que avanza 5 unidades en 7 pasos)

Raúl. *Primero dividimos entre siete, de esos siete sólo tomamos cinco.*

Mo. *¿Pero por qué agarraron cinco?*

Raúl. *Porque nada más eran cinco unidades.*

Mo. *(...) nos deja medio desconcertados, parece magia. Porque eran cinco unidades siete pasos, ustedes nada más agarraron la unidad la dividieron en siete y tomaron cinco. ¿Cómo supieron que sí les iba a salir? (...)*

Maltos. *Si quisiéramos llegar la unidad en siete pasos nada más necesitaríamos un séptimo y si quisiéramos llegar a dos unidades serían dos séptimos y así va aumentando hasta llegar al cinco y cinco séptimos y* llegamos a la quinta unidad.

La utilización de esta relación de escala, a un recorrido n veces mayor corresponde un paso n veces mayor, como recurso para resolver el problema se reveló aún difícil para la mayoría de los niños de quinto grado de primaria.

d) Indicación de la medida de un paso como fracción unitaria del recorrido total.

Vimos anteriormente que algunos alumnos construyeron físicamente la tira que representa un paso uniendo el número de tiras del recorrido total y partiendo esa unión en un número de partes igual al número de pasos.

En un equipo, los niños derivaron de este procedimiento una forma de proporcionar la medida del paso. Por ejemplo, para el robot que recorre 3 unidades en siete pasos: "Divide 3 unidades entre 7 pasos, el resultado va a ser el tamaño del paso". O bien " $1/3$ de 7 unidades".

Esta forma de indicar la medida fue cuestionada por otros alumnos, quienes argumentaban que se dejaba al constructor de robots el trabajo de calcular la parte de la unidad. No obstante, dio lugar a analizar la equivalencia entre esta forma de expresar la medida y la que otros encontraron. Veamos la discusión acerca de si $2/5$ de unidad es lo mismo o no que $1/5$ de 2 unidades:

Mariel y Erick argumentan contra dicha equivalencia en buena parte porque no consideran la "nueva unidad" (2 unidades) y se siguen centrando en una sola unidad:

> ***Mariel.*** *Partieron una unidad en cinco partes, pero tenían que haber partido a las dos unidades en quintos para que puedan sumar los dos quintos ... pero ellos nada más tomaron un quinto de una unidad.*
>
> *(...)*
>
> ***Erick...*** *con un quinto de dos unidades está mal, porque en todo caso sería dos quintos de dos unidades.*

Este es un diálogo entre alumnos que están de acuerdo con la equivalencia entre ambas expresiones:

> ***Ao1.*** *Entonces sería así: agarraríamos una unidad, dos unidades, las pegaríamos y después las dividimos en cinco.*
>
> ***Ao2.*** *Es lo mismo (que $2/5$ de u).*
>
> ***Ao1.*** *Sí, pero con palabras diferentes. ... Sí está bien, porque si lo juntas, lo partes en quintos, serían dos quintos de una unidad... ¡de una de esas unidades! Bueno, los juntas, y tienes dos unidades. Un quinto serían dos unidades porque tendrías diez quintos, bueno ... tendrías... tendrías un quinto de las dos unidades. Sería igual a dos quintos.*

Por otra parte, notemos que la información que los alumnos proporcionan en esta modalidad, " $1/5$ de 2 unidades", o "2 unidades entre 5" da cuenta perfectamente de la medida del paso. De hecho, todas las medidas en juego podrían expresarse mediante esta relación de conmensuración entre unidades y pasos la cual permite no solo reproducir el paso dada la unidad, sino también comparar el tamaño de dos pasos y encontrar expresiones equivalentes para un mismo tamaño de paso. Si en algún momento se propusiera la escritura $2/5$ para denotar el tamaño del paso que en 5 pasos llega a dos unidades, tendríamos una construcción de las fracciones definidas como cocientes. No obstante, éste no fue el camino que nos propusimos explorar con esta secuencia.

El papel de la verificación

La verificación, en sus distintas modalidades, permitió a los alumnos poner a prueba, una y otra vez, el grado de exactitud de sus resultados, y con ello, la pertinencia de sus procedimientos. Además de esta función, la verificación favoreció el que los alumnos establecieran una relación multiplicativa entre los datos: si $a \div b = x$ entonces b veces $x = a$. Por ejemplo, para un robot que avanza 3 u en 7 pasos:

> ***Zúlu.*** *Los tres séptimos es la medida del paso y dice la distancia recorrida en siete pasos, entonces lo podemos multiplicar por siete.*
>
> ***Joel.*** *Yo creo que tres séptimos de las tres unidades es una fracción (de una unidad), y multiplicándolo siete veces porque son siete pasos, eso me da tres, tres unidades.*

> (Para un robot que avanza 5 unidades en 7 pasos)
>
> ***Alejandro.*** *Mira el paso es de cinco séptimos, lo multiplicas por siete porque son siete pasos y me da treinta y cinco séptimos. O sea del cero al cinco hay treinta y cinco séptimos y luego lo divido eso entre siete.*

Este papel de la verificación aritmética en el aprendizaje de la división para establecer una relación multiplicativa ya fue señalado por Moreno (1996) en un estudio sobre la noción de división en la escuela primaria.[10]

Conclusiones

El análisis del conjunto de procedimientos que los niños desarrollaron a lo largo de la aplicaciones de la situación fundamental permite concluir lo siguiente:

Primero, efectivamente la variable "tipo de magnitud" influyó de manera determinante en la forma de abordar el problema. Se generó una diversidad de procedimientos que no se ponen en juego en los problemas clásicos de reparto.

Segundo, el procedimiento que se quiso propiciar (el recurso a las razones internas) fue puesto en marcha por muy pocos niños, de manera que no podemos afirmar que la secuencia lo propicie, no por lo menos en el nivel escolar con el que trabajamos.

Tercero, no obstante lo anterior, varios niños lograron establecer la relación a:b = a/b, pocos a partir del procedimiento de las razones internas, la mayoría a partir del procedimiento de partición de la unidad entre el número de pasos. Lograron también, en una de las últimas situaciones, establecer la relación recíproca, dada una fracción de unidad, encontraron un número de unidades del recorrido (numerador) y un número de pasos (denominador) que arroja ese tamaño de paso.

---

[10] Moreno afirma: "Dividir partiendo de un cociente hipotético, implica desprenderse de la acción inicial de repartir y 'empezar por el final', por el resultado del reparto. Ubicados en este punto final, el problema que los niños enfrentan implica ahora multiplicar (...) Se puede decir entonces, que es en el momento de la verificación (espontánea o propiciada), de la acción inversa al reparto, cuando se produjeron los primeros procedimientos numéricos formales para resolver divisiones, y cuando se estableció la relación multiplicativa entre los datos de un problema de reparto". (Moreno, 1996:206).

Desde el punto de vista de la comprensión del vínculo entre la división *a:b* y la fracción que resulta, *a/b* necesitamos distinguir dos niveles: la mayoría de los niños, quienes utilizaron el procedimiento de partición de las unidades en el número de pasos, pudo *constatar*, en un contexto distinto al reparto de pasteles, que el resultado de una división *a: b* es la fracción *a/b*. Pero muy pocos pudieron comprender el porqué de la relación en cuestión, posiblemente sólo aquellos que utilizaron el procedimiento de las razones internas.

Por último, independientemente del propósito de establecer una relación entre la división y la fracción, el problema que hemos estudiado, calcular la medida fraccionaria que resulta de dividir otra medida, se reveló adecuado para propiciar la utilización de los "quebrados" que los niños están en proceso de aprender. El problema brinda la posibilidad, además, de propiciar el estudio por parte de los niños de aspectos de las fracciones que normalmente no se problematizan, entre los que destacan la densidad del orden y la relación con los decimales.

Cabe decir también que las situaciones que hemos analizado no agotan la problemática de este vínculo. En los problemas que hemos considerado hasta ahora, la división en juego ha sido siempre una división de una medida entre un escalar, y por lo tanto el cociente también es una medida: tres pasteles (medida) entre cuatro (escalar) es igual a ¾ de pastel (medida). Recordemos, sin embargo, que en el trabajo con cantidades hay otros tipos de división, entre los cuales está la división "comparación" (o "agrupamiento", en ciertos casos). Es la división que se establece entre cantidades de la misma especie para determinar cuántas veces una es la otra, por ejemplo ¿cuántas *veces* 3cm es igual a 4cm?. El cociente en estos casos no expresa una medida sino un número sin dimensión, un escalar.

Esta división es más compleja que las que vimos antes puesto que ahora no se trata de "partir" una cantidad en partes iguales, sino de encontrar un "número de veces", (un operador multiplicativo fraccionario[11]). El hecho mismo de plantear la división es ya muy complejo puesto que requiere concebir de antemano que puede existir un número que, por ejemplo, multiplicado por 3 dé 4, es decir, requiere de una concepción de la multiplicación distinta, más amplia, que la de suma repetida que se adquirió en los naturales.

Así, "cociente medida", o "cociente escalar", "cociente por definición" o "cociente calculado" constituyen modalidades del significado de la fracción como cociente con niveles de complejidad muy distintos (Block, 2001).

Señalemos, para terminar, que la importancia del conocimiento que aquí fue objeto de estudio, el vínculo entre la división y la fracción, no radica tanto en la posibilidad de resolver problemas cuyo contexto es extramatemático, pues en los problemas de ese tipo que implican una división partición, por ejemplo, dividir una cantidad de litros o de kilogramos, se recurre frecuentemente a una herramienta más práctica que la fracción: la división con cociente decimal. La importancia de este conocimiento radica más en la posibilidad de articular nociones, concepciones que los alumnos están en proceso de aprender (división y fracción) y cuya integración, en un futuro, se da por adquirida.

[11] En Behr, et. al. (1992; 308), se distinguen estas dos modalidades de la fracción cociente y se analiza cada una desde la perspectiva de los procesos de redefinición de la unidad.

Referencias bibliográficas

Balbuena, Hugo. (1989) "*Análisis de una secuencia didáctica para la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria*". Tesis de Maestría. México, D.F; Matemática Educativa, Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Balbuena, Hugo; Espinosa, C; Espinosa H; Fregona, D; Sáiz, I. (1984). *Descubriendo las fracciones*. Laboratorio de Psicomatemática. México, Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & R. Lesh, (1992). "Rational number, ratio and proportion". Dougleas A. Grouws (ed), *Handbook on Research on Mathematics Learning and Teaching,* N.Y, MacMillan, pp.296-333

Block, David. (1987). *Estudio Didáctico sobre la Enseñanza y el Aprendizaje de la Noción de Fracción en la Escuela Primaria.* Tesis de maestría. México, D.F.: Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Block, David (1996). *Las fracciones en problemas multiplicativos. Análisis preliminar del contenido.* Documento Interno.

Block, David (2001). *La Noción de Razón en las Matemáticas de la Escuela Primaria, Un Estudio Didáctico.* Tesis de Doctorado. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Brousseau, Guy (1981) "Problèmes de Didactique des Décimaux" En *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 2 No. 3 (37-127)

Dávila Vega, Martha. (1992) "El Reparto y las Fracciones" (32-45). En *Revista Educación Matemática 4* (1) México, Grupo Editorial Iberoamérica.

De León, Humberto (1996) *Procedimientos de Solución de Niños de Primaria en Problemas de Reparto.* Tesis de maestría. México, D.F. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Galvez, Grecia. (1994) "La Didáctica de las Matemáticas" En *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y Reflexiones.* (39 – 50). C. Parra e I. Sáiz (comps.) Buenos Aires, Paidós.

Hernández, Santiago (1950) *Aritmética.* México: Editorial Atlanta.

Hernández, Santiago (1954). *Aritmética y Nociones de la Geometría. Tercer Ciclo.* México: Editorial Herrero.

Moreno, Eva. (1996). *Introducción a la noción de división en la escuela primaria. Un estudio didáctico.* Tesis de Maestría. México, D.F. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Kieren, T. E. (1976) "On the mathematical cognitive and instructional foundation of rational numbers" En *Number and measurement papers from a research workshop.* R. Lesh, ERIC.

Rajohn, Ratsimba (1982) "Deux Méthodes de Mesures Rationnelles" En *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 3.1

Secretaría de Educación Pública (1972) *Matemáticas 5° Grado.* México. D.F.

Secretaría de Educación Pública (1996) *Plan y Programas de Estudio. Primaria.* México, D.F.

Secretaría de Educación Pública (1994a) *Matemáticas 4° Grado.* México, D.F.

Secretaría de Educación Pública (1994b) *Matemáticas 5° Grado.* México, D.F.

Solares, Diana Violeta (1999). La fracción como resultado de una división. Un estudio didáctico. Tesis de Maestría. México, D.F. Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.