
Desarrollo didáctico de los profesores de matemáticas. El caso de los sistemas de representación y la función cuadrática¹

ARTÍCULOS
DE
INVESTIGACIÓN

Pedro Gómez
Universidad de los Andes
Una empresa Docente, Colombia
pgomez@valnet.es

Cristina Carulla
Universidad de los Andes
CIFE, Colombia
mcarulla@uniandes.edu.co

Fecha de recepción: Diciembre, 1999

Educación Matemática
Vol. 13 No. 2 agosto 2001
31-54

Abstract: In this study we explored secondary mathematics teachers' didactical development of the quadratic function. This was done by analyzing a series of conceptual maps that they produced while working in groups in a teacher training program that induced them to produce three types of analysis of the mathematics subject matter: content, instruction and cognitive. These maps were codified using a series of attributes designed to describe some Aspects of their didactical knowledge. The analysis of this information shows that a teacher training program, based on the didactical analysis ideas, in which teacher's work in groups, interacting with researchers and peers in order to contrast their work, can have an impact on their visions of the mathematics content.

Resumen: En este estudio se exploró el desarrollo didáctico de profesores de matemáticas de secundaria acerca de la función cuadrática con base en una serie de mapas conceptuales que ellos, organizados por grupos, produjeron con motivo de un esquema de interacción que involucró tres tipos de análisis: de contenido, de instrucción y cognitivo. Estas producciones fueron codificadas con base en una serie de atributos que pretendían describir algunos aspectos de su conocimiento didáctico. El análisis de los resultados se hizo a partir de una caracterización de los mapas conceptuales y muestra que un esquema de formación permanente basado en el análisis didáctico en el que se trabaja en grupo, se interactúa con investigadores y se contrastan las producciones socialmente, puede afectar las visiones de los profesores sobre el contenido matemático.

Introducción

El problema que dio lugar a este estudio tenía que ver con la contrastación de una hipótesis que surgió a lo largo de la realización de varios programas de formación permanente de profesores. Nosotros percibimos en estos programas, que, cuando los profesores se en-

¹ El estudio que se reporta aquí tuvo el apoyo del Instituto para la Investigación y el Desarrollo Pedagógico (IDEP) a través del contrato N° 66 de 1998. Queremos agradecer a Vilma María Mesa y Patricia Perry, quienes leyeron y comentaron una primera versión de este artículo.

frentan al problema de analizar un concepto matemático desde la perspectiva del análisis didáctico (esquema que se describe más adelante) con la ayuda de los sistemas de representación y los mapas conceptuales como eje organizador, los primeros, y como herramienta de representación, los segundos, entonces los profesores se hacen paulatinamente más conscientes de la complejidad del contenido matemático y de la problemática de su enseñanza y aprendizaje. En otras palabras, este tipo de esquema afecta el desarrollo didáctico de los profesores².

Para explorar sistemáticamente esta hipótesis, se diseñó un esquema de interacción basado en estas nociones didácticas (el análisis didáctico) y se recolectó información producida por los profesores. Esta información estaba presentada en forma de mapas conceptuales. El análisis de estos mapas conceptuales muestra una evolución en las producciones de los profesores.

Este artículo comienza construyendo un significado para la noción de desarrollo didáctico con base en las nociones de conocimiento y análisis didáctico, para después describir el papel que pueden jugar los mapas conceptuales y el análisis didáctico en la exploración del desarrollo didáctico de los profesores de matemáticas. Con base en esta reflexión se propone una posible categorización de los mapas conceptuales sobre la función cuadrática y se describe el esquema de interacción en el que se recogió la información y el instrumento que se utilizó para codificarla. Finalmente se presentan y analizan los resultados y se sugieren algunas conclusiones.

Análisis, conocimiento y desarrollo didáctico de los profesores de matemáticas

La investigación sobre el conocimiento del profesor y su relación con la enseñanza de las matemáticas ha pasado por tres fases (Ball, 1991; Cooney, 1994). En la primera fase, llamada “de la enseñanza eficiente”, se buscó identificar, con base en las opiniones de los alumnos, las características de los buenos profesores. Se determinaron principalmente características relacionadas con su personalidad. Al tratar de validar estos resultados con el rendimiento de los estudiantes, se entró en una segunda fase en la que se buscó relacionar las características del profesor con el aprendizaje de sus alumnos y se encontró, entre otras cosas, que el conocimiento matemático del profesor (medido, por ejemplo, con el número de cursos que ha tomado o títulos que ha obtenido) no es un buen indicador del rendimiento de los alumnos. En la tercera fase, llamada “del pensamiento del profesor”, se parte del supuesto de que lo que el profesor hace en el aula depende de lo que el profesor sabe y piensa.

En su revisión de 1994, Cooney hace una serie de preguntas: “¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? ¿Qué tipos de experiencias deben vivir los profesores para construir ese conocimiento?” (p. 608). “¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir comprender las experiencias que viven los profesores? ¿Qué perspectivas teóricas nos pueden permitir desarrollar programas de investigación y

² Utilizamos el término *desarrollo didáctico* para referirnos a la evolución en el tiempo del conocimiento didáctico (término, cuyo significado se aclarará más adelante). Simon (2000) habla de *desarrollo pedagógico* como complementario al desarrollo puramente matemático. Nosotros preferimos el término desarrollo didáctico por razones que se verán en el siguiente apartado y que tienen que ver con el significado del término conocimiento didáctico.

desarrollo que empujen nuestros esfuerzos hacia adelante?” (pp. 627-628). Al preguntarse acerca de los tipos de experiencias que los profesores deben vivir para construir ese conocimiento necesario para ser eficientes y al reconocer la importancia del paradigma constructivista, Cooney pone de relieve la necesidad de ver al profesor como un agente cognitivo y la necesidad de conceptualizar los procesos mediante los cuales el profesor construye su conocimiento.

En 1995, Simon recoge estos dos puntos, la enseñanza basada en principios constructivistas y el profesor como agente cognitivo, para proponer un modelo de enseñanza guiado por la noción de *trayectoria hipotética de aprendizaje*³. Partiendo de esta propuesta, nosotros identificamos los análisis que el profesor debería hacer para diseñar actividades que partan de una perspectiva constructivista del aprendizaje. Suponemos entonces que un aspecto central de la enseñanza de las matemáticas consiste en el diseño, puesta en práctica y evaluación de las actividades por medio de las cuales los alumnos construyen su conocimiento matemático en un ambiente de interacción social. Pensaremos aquí en el proceso ideal de diseño, puesta en práctica y evaluación de una hora de clase o de una actividad que tendrá lugar dentro de una sesión de clase. Por lo tanto, esa actividad forma parte de una estructura curricular más amplia que tiene ya determinados unos propósitos que se desea lograr. A partir de esos propósitos y teniendo en cuenta el estado cognitivo de los alumnos, el profesor debe determinar uno o más objetivos para la actividad. El estado cognitivo de los alumnos es la percepción que el profesor tiene y la descripción que él hace del conocimiento, las dificultades y los errores de los alumnos con respecto a los propósitos que se están buscando dentro de la estructura curricular de la cual forma parte la actividad. Simultáneamente con la definición de los objetivos, el profesor identifica un contenido matemático que también estará determinado, al menos parcialmente, por esta estructura curricular. El contenido, los objetivos y el estado cognitivo de los alumnos componen la información de partida para el diseño de la actividad. El diseño, puesta en práctica y evaluación de la actividad requiere de una serie de análisis, que denominamos de manera genérica como *análisis didáctico*, que agrupamos en cuatro categorías y que describimos a continuación.

Análisis cognitivo. Con este análisis se busca identificar y describir las dificultades que los alumnos pueden enfrentar y los errores en los que ellos pueden incurrir al realizar las tareas que componen la actividad.

Análisis de contenido. Con este análisis el profesor busca producir una descripción estructurada y sistemática del contenido matemático desde la perspectiva didáctica. Para ello, él debe construir la estructura conceptual de este contenido, en la que sea posible

³ La *trayectoria hipotética de aprendizaje* consiste en la predicción que el profesor tiene acerca del camino por el cual puede proceder el aprendizaje. “Una trayectoria hipotética de aprendizaje le da al profesor criterios para seleccionar un diseño instruccional particular; por lo tanto, yo tomo mis decisiones de enseñanza basado en mi mejor conjetura acerca de cómo va a proceder el aprendizaje” (p. 135). La trayectoria hipotética de aprendizaje tiene tres componentes, relacionados entre sí: la visión que el profesor tiene del *objetivo de aprendizaje*, la planificación del profesor para las *actividades de aprendizaje* y las hipótesis del profesor acerca del *proceso de aprendizaje*. El objetivo de aprendizaje es la guía que le permite al profesor decidirse por unas actividades de aprendizaje. Esa decisión la toma teniendo en cuenta también sus hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. Y estas actividades afectan, a su vez, sus hipótesis sobre el proceso.

identificar los conceptos y procedimientos involucrados, junto con los sistemas de representación que permiten referirse a esos conceptos y procedimientos. Adicionalmente, el profesor debe realizar un análisis fenomenológico que le permita identificar los fenómenos naturales, sociales y matemáticos que pueden ser modelizados por subestructuras matemáticas contenidas en la estructura en cuestión.

Análisis de instrucción. En este análisis el profesor, dentro de la perspectiva de la resolución de problemas y teniendo en cuenta los materiales y recursos disponibles, produce y evalúa (a la luz de los análisis anteriores) diseños de las actividades que realizarán los alumnos.

Análisis de actuación. Este es el análisis que el profesor hace de las actuaciones recientes de los alumnos y que le permite determinar su estado cognitivo.

El diseño y puesta en práctica de actividades de enseñanza es un proceso sistémico, dinámico y cíclico. La Figura 1 muestra sus principales componentes y, en particular, ubica el conocimiento didáctico en este proceso.

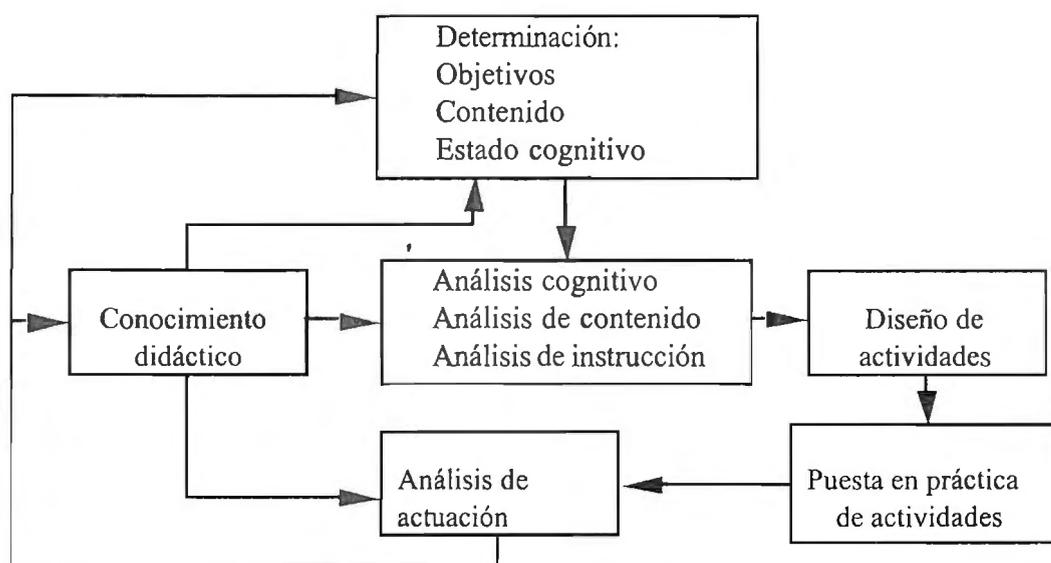


Figura 1. Diseño de actividades, análisis didáctico y conocimiento didáctico

El *conocimiento didáctico* es el conocimiento de la didáctica de la matemática que el profesor pone en juego cuando diseña, lleva a la práctica y evalúa actividades de enseñanza. Este conocimiento no es equivalente al conocimiento pedagógico de contenido propuesto por Shulman (1986) como “las formas de representar y formular el tema que lo hacen más comprensible a otros [...] también incluye una comprensión de lo que hace que el aprendizaje de temas específicos sea fácil o difícil” (p. 9). Tampoco es equivalente al conocimiento pedagógico específico al contenido propuesto por Bromme (1994) que se cristaliza en las “ideas acerca de las tareas matemáticas y sus usos en el aula” (p. 86) o en los “escenarios de actividad”. En todo caso, el conocimiento didáctico se ubica dentro de las “topologías” del conocimiento del profesor propuestas por estos autores en lugares equivalentes a los que ocupan sus correspondientes nociones. El conocimiento didáctico

tiene un conocimiento disciplinar de referencia (en este caso, la didáctica de la matemática); tiene una utilidad práctica (el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza); y su puesta en juego se enmarca dentro de una estructura analítica (el análisis didáctico). Las nociones de la didáctica de la matemática a las que se refiere este conocimiento han sido denominadas *organizadores del currículo* por Rico et al. (1997) quienes las consideran como “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (p. 45) y, en ese sentido, conforman el modelo con base en el cual se diseñan planes de formación de profesores de secundaria. Mientras que en la Figura 1 establecemos las relaciones entre el diseño de actividades, el análisis didáctico y el conocimiento didáctico, desde la perspectiva de la manera como el conocimiento didáctico se enmarca en una estructura analítica con un propósito didáctico, en la Figura 2 establecemos las relaciones entre los diferentes análisis y sus componentes desde la perspectiva de la referencia disciplinar del conocimiento didáctico⁴.

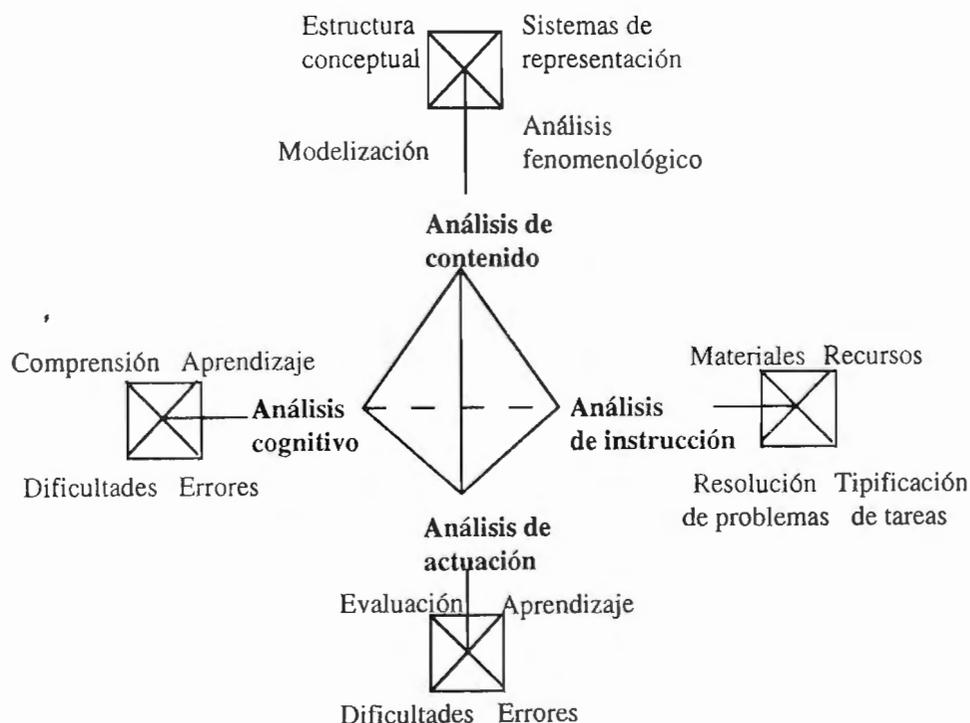


Figura 2. Análisis didáctico y organizadores del currículo

En Gómez (2001b) hemos presentado con algún detalle una descripción técnica de las nociones que hacen parte del análisis de contenido: estructura conceptual, sistemas de representación, análisis fenomenológico y modelización. La Figura 2 pretende enfatizar la importancia de la conexión e interacción entre los diferentes análisis y organizadores del currículo, como lo sugerimos en (Gómez, 2000). Comenzamos por el análisis de contenido

⁴ En esta figura aparecen elementos que no pertenecen a la lista de organizadores del currículo propuesta por Rico et al. (1997). Por otro lado, el organizador historia no aparece en la gráfica porque sirve de marco de referencia para la mayoría de los análisis.

que debe producir, desde una perspectiva didáctica, una descripción estructurada del contenido a enseñar. Esta descripción parte de la estructura conceptual, con base en los sistemas de representación. El análisis fenomenológico busca establecer una clasificación de los fenómenos que son organizados por la estructura matemática en cuestión (Puig, 1997), con base en la identificación de las características estructurales de esos fenómenos y su relación con elementos y propiedades de subestructuras de la estructura matemática, que los modelizan. De esta manera, el análisis de contenido es un proceso cíclico e integrado en el que la información producida en la aplicación de una noción potencializa la aplicación de las otras nociones. El análisis cognitivo parte de una posición sobre el aprendizaje (que ya se describió arriba) y del análisis, con base en la investigación y los resultados del análisis de contenido, de las dificultades que los estudiantes tienen con respecto al tópico y los errores en los que pueden incurrir cuando abordan tareas que ponen en juego partes de la estructura matemática en cuestión. La eficiencia en la identificación de estos errores y dificultades dependerá de la calidad de la descripción de la estructura matemática hecha en el análisis de contenido y estos dos análisis se alimentarán mutuamente. El análisis de contenido permite producir una tipificación de las posibles tareas para el tópico en cuestión (Gómez, 2001b, p. 1253). A partir de esta tipificación (desde una perspectiva de resolución de problemas) y teniendo en cuenta los resultados del análisis cognitivo y los materiales y recursos disponibles, es posible producir diseños de actividades de enseñanza. Estos diseños se evalúan a la luz de los análisis cognitivo y de contenido en un proceso sistémico en el que cada uno de los análisis aporta a la reformulación de los otros dos. Finalmente, una vez que se pone en juego la actividad de enseñanza, el análisis de actuación utiliza los resultados de los otros tres análisis para evaluar la actuación de los alumnos y producir una descripción de su estado cognitivo que alimenta una nueva iteración del ciclo.

La anterior es una de las posibles posiciones con respecto al significado de las nociones y a la relación entre ellas, como las Figuras 1 y 2 son también aproximaciones particulares dentro de un abanico de múltiples interpretaciones posibles del “modelo de los organizadores del currículo”. Aquí presentamos la interpretación que utilizamos para el diseño, desarrollo y evaluación del currículo del programa de formación en el que realizamos el estudio. Habiendo hecho explícito el significado con el que usamos el término *conocimiento didáctico*, utilizamos el término *desarrollo didáctico* para referirnos a la evolución en el tiempo del conocimiento didáctico.

Exploración del desarrollo didáctico

En este apartado mostramos la relación entre los mapas conceptuales y los sistemas de representación como medios para afectar y explorar el desarrollo didáctico de los profesores sobre la función cuadrática. Aunque el programa de formación trató los primeros tres análisis del análisis didáctico, en este estudio exploramos el desarrollo didáctico de los profesores con respecto a la estructura conceptual y los sistemas de representación. No tratamos la manera como su conocimiento didáctico evoluciona en las demás dimensiones que lo componen.

La utilización de los mapas conceptuales como herramienta de representación de las producciones de los profesores permite explorar (al menos desde la perspectiva particular que ya hemos mencionado) su desarrollo didáctico sobre la función cuadrática. Los estudios que han utilizado los mapas conceptuales como herramienta de investigación para estudiar las concepciones (e.g., Williams, 1998; McGowen, 1998 y los otros estudios que estas

autoras mencionan) muestran que esta es una herramienta eficiente para este tipo de exploración.

Los mapas conceptuales son una técnica para representar visualmente la estructura de la información. Es decir, los mapas conceptuales son un sistema de representación cuyas normas son relativamente sencillas (Lanzing, 1998): “los conceptos se representan por nodos a los que se les da una etiqueta por medio de una palabra o una frase corta que indica el concepto. Las relaciones se representan por líneas (enlaces) que conectan los nodos” (p. 2).

Como sistema de representación, los mapas conceptuales tienen dos ventajas importantes:

- Permiten descripciones no lineales del concepto.
- Al tener un carácter gráfico, resaltan la estructura de la información.

Estas dos cualidades son muy importantes para la descripción de estructuras matemática y su correspondiente discurso matemático. La estructura del contenido matemático no es lineal. Una representación de un concepto está relacionada con muchas otras representaciones de conceptos. Por consiguiente, hay una estructura que representa la manera como las representaciones se conectan unas con otras. Aunque estas son características bien conocidas de las estructuras matemáticas y su correspondiente discurso, este último se hace, en general, dentro de un texto. Esto implica, por un lado, que la descripción tiene que ser lineal, y, por el otro, que no es posible ver “gráficamente” la estructura del discurso. Hay que deducirla de la lectura del texto. En consecuencia, en contraposición con la descripción textual, los mapas conceptuales resultan muy potentes para la descripción del discurso matemático y, como veremos más adelante, cuando se conjugan con la noción de sistema de representación, esta potencia se multiplica.

Cuando se utilizan para describir contenido matemático, los mapas conceptuales pueden tener unas características que dependen, al menos parcialmente, de ese contenido. Un mapa conceptual con contenido matemático permite identificar *submapas*. Los submapas son porciones del mapa global en las que se desarrolla una parcela particular y fácilmente identificable del contenido en cuestión (por ejemplo, aquella parte del mapa en la que se describe una de las formas simbólicas de la función cuadrática o la descripción de una estructura matemática dentro de un sistema de representación particular). Los mapas o submapas se pueden caracterizar por el número de niveles que contienen. La Figura 3 muestra un mapa con dos niveles y otro con cuatro niveles.

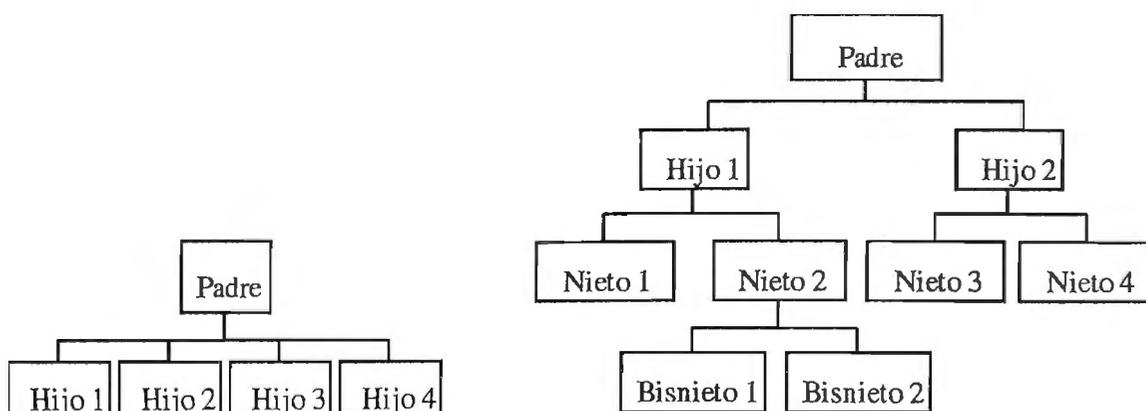


Figura 3. Estructuras de submapas

Sistemas de representación

La discusión sobre los sistemas de representación en la educación matemática puede llevar a una serie de paradojas (Rico, 2000). Algunas de estas paradojas tienen que ver con el estatus ontológico de los objetos matemáticos y con la dualidad entre las representaciones internas y externas. Con respecto a la existencia de los objetos matemáticos, suponemos, siguiendo a Sfard (2000) y Dörfler (2000), que ellos no existen por fuera del discurso matemático. Sin embargo, “la sensación de los participantes [en el discurso] de que los objetos existen es una condición necesaria para el uso eficiente de los significantes” (Sfard, 2000, p. 91). Por lo tanto, aunque los objetos matemáticos no existen por fuera del discurso, quienes participan en él se comportan como si existieran. Para Cobb, Yackel y McClain (2000) la dualidad entre representaciones internas y externas desaparece: símbolo y significado se construyen dinámicamente. Lo importante es la actividad de simbolización en la que el sujeto se hace capaz de actuar socialmente compartiendo significados. El significado para un sistema de símbolos se construye en la medida en que se llegan a acuerdos sociales sobre la manera como se manejan los símbolos. Estas aclaraciones nos permiten regresar ahora a la noción de sistema de representación y resaltan el papel de esta noción en las actividades de profesor y alumnos en el aula y en la construcción del conocimiento matemático.

Definimos un sistema de representación como “un sistema de reglas para (i) identificar o crear caracteres, (ii) operar en ellos y (iii) determinar relaciones entre ellos (especialmente relaciones de equivalencia)” (Kaput, 1992, p. 523). La importancia didáctica de la noción de sistema de representación radica en que nos permite describir las actividades matemáticas que tienen lugar en el discurso matemático del aula. Esta descripción se basa en cinco operaciones que se pueden realizar con respecto a los sistemas de representación.

La primera operación es la *creación de signos o expresiones*. Esta operación está regida por las normas que regulan el sistema de representación y es importante en las matemáticas escolares porque es la que produce expresiones válidas e inválidas (por ejemplo, $(x)f = 2x^2 + 1$).

Las segunda y tercera operaciones son las *transformaciones sintácticas variantes e invariantes*. Estas son transformaciones de una expresión en otra dentro de un mismo sistema de representación. Por ejemplo, en $f(x) = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ tienen lugar dos transformaciones sintácticas invariantes (el objeto matemático no cambia), mientras

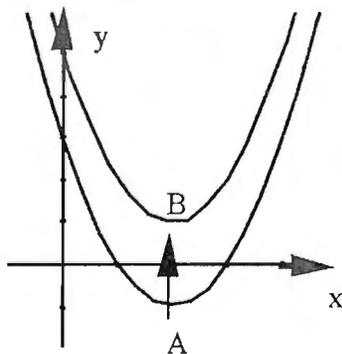


Figura 4. Representación gráfica

que la traslación de la parábola A a la parábola B en la Figura 4 es una transformación sintáctica variante (el objeto matemático cambia).

La cuarta operación es la *traducción entre sistemas de representación*. Se refiere al paso de un sistema de representación a otro. Es el caso de identificar la parábola A de la Figura 4 con $f(x) = (x-2)^2 - 1$. Hay que anotar que aunque $1/4 = 0.25$ tiene la apariencia de una transformación sintáctica, es, en realidad, una traducción entre sistemas de representación, dado que el sistema de representación al que pertenece $1/4$ está regulado por reglas diferentes del sistema de representación al que pertenece 0.25 .

Es posible imaginar los sistemas de representación como planos paralelos conectados. En un plano dado, uno puede crear signos o expresiones (primera operación) o transformar sintácticamente expresiones (segunda y tercera operaciones). Y uno puede pasar de un plano a otro por medio de traducciones entre sistemas de representación (cuarta operación). Detrás de estas operaciones hay dos elementos que las regulan: las estructuras matemáticas representadas y las normas de los sistemas de representación.

La quinta operación es la *modelización*. En esta operación, se identifica, por un lado, una serie de fenómenos naturales, sociales o matemáticos y, por el otro, una subestructura de la estructura matemática que los modeliza. Esta identificación tiene lugar en uno o más sistemas de representación. Por ejemplo, la subestructura matemática que modeliza el movimiento parabólico y la que modeliza los fenómenos de lentes son dos subestructuras de la estructura matemática asociada a la función cuadrática.

La noción de sistema de representación permite organizar la representación de una estructura matemática en un mapa conceptual. Cada sistema de representación es un submapa. La descripción de los fenómenos o situaciones que son modelizados por subestructuras pertenecientes a la estructura matemática en cuestión es otro submapa, que denominamos "fenómenos". Cuando la estructura matemática se representa en un mapa conceptual, se identifican dos tipos de objetos en la gráfica: elementos y relaciones (o conexiones). Las relaciones pueden ser de diferentes tipos. En otras palabras, un elemento puede estar relacionado:

- a. con otros elementos dentro de la forma particular o dentro del sistema de representación en el que se encuentran;
- b. con una representación de ese mismo elemento en otro sistema de representación;
- c. con un fenómeno que lo involucra; o
- d. con dos elementos interconectados para los cuales sirve de puente.

Vemos entonces que los sistemas de representación y los mapas conceptuales ofrecen una perspectiva para caracterizar las actividades matemáticas escolares. En un mapa conceptual podemos, de acuerdo con la enumeración anterior, identificar cada una de las actividades matemáticas descritas por Kaput. El establecimiento de un elemento en un mapa corresponde a la creación de signos o expresiones. La relación o conexión de elementos dentro de un mismo sistema de representación (a) corresponde a las transformaciones sintácticas. Estas transformaciones sintácticas permiten hacer la conexión entre dos o más elementos pertenecientes a un mismo sistema de representación. La relación entre dos representaciones de un mismo elemento en dos sistemas de representación (b) se refiere a la traducción entre sistemas de representación. La relación de un elemento con un fenómeno (elemento del sistema de representación de fenómenos) (c) tiene que ver con la

construcción de modelos. Finalmente, “la consolidación o cristalización de relaciones y procesos en objetos conceptuales o ‘entidades cognitivas’ que pueden ser usadas en relaciones y procesos de un orden más alto de organización” puede identificarse en un mapa conceptual al analizar el lugar que ocupan los procedimientos dentro de la estructura (d). Estos pueden ser el objeto mismo de la descripción o ser conexiones que establecen relaciones entre dos elementos del mapa.

Función cuadrática

La riqueza y complejidad de la función cuadrática como objeto de enseñanza en la educación secundaria motivó nuestro interés en ella. Utilizando los sistemas de representación, produjimos un mapa conceptual de la función cuadrática que nos sirvió de referencia para la codificación y el análisis de las producciones de los profesores. La figura 5 muestra la estructura general de este mapa. Identificamos cuatro sistemas de representación (simbólico, gráfico, geométrico y numérico), junto con el submapa de fenómenos.

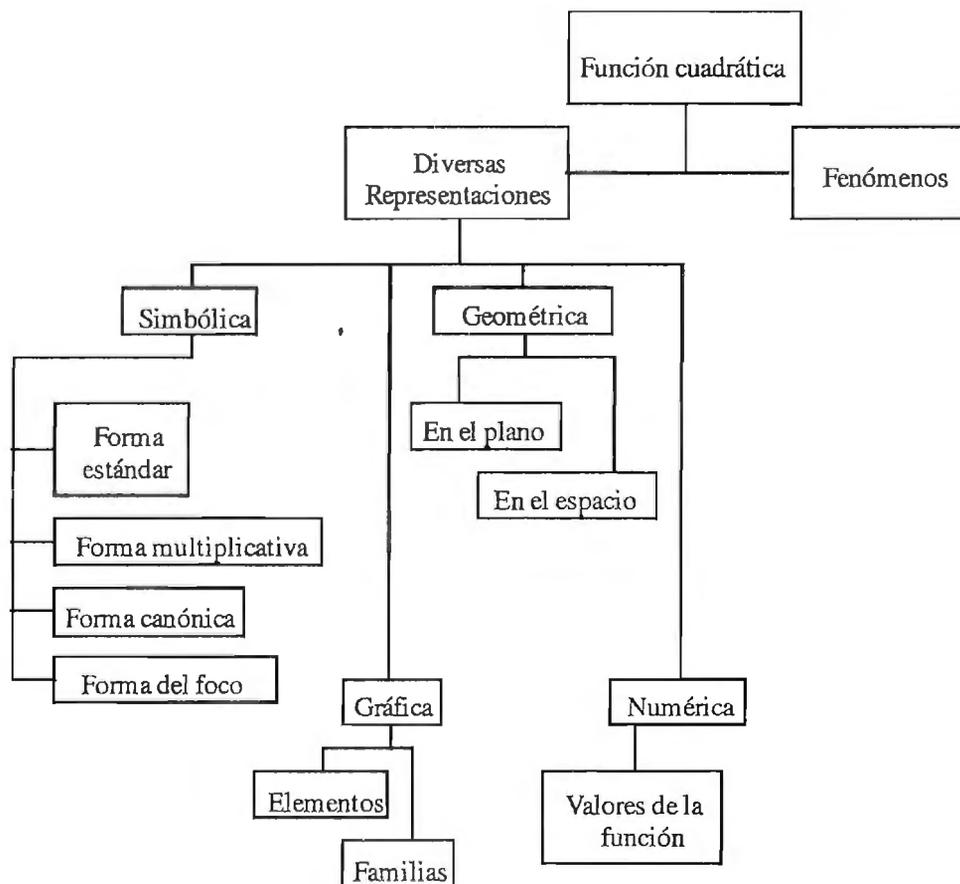


Figura 5. Mapa general

En el sistema de representación simbólico encontramos cuatro formas simbólicas (estándar, canónica, multiplicativa y de foco). Cada una de estas formas involucra una serie de parámetros que determinan características particulares de la función (ver Figura 6). Los parámetros se encuentran relacionados entre sí. Los conceptos y procedimientos relacionados con la ecuación cuadrática aparecen en una de las formas simbólicas. Todas

las características gráficas de la función cuadrática encuentran obviamente su expresión en el sistema de representación simbólico. Nos referimos al sistema de representación gráfico como aquel en el que se representan los objetos y las relaciones en el plano cartesiano. En este sistema de representación se hacen patentes otras características de la función cuadrática. Allí aparecen diversos elementos (puntos de corte con los ejes, eje de simetría, directriz, vértice, crecimiento, concavidad, etcétera) que permiten apreciar el papel de los parámetros. Algunos de estos elementos de la representación gráfica adquieren aún más significado cuando se considera el sistema de representación geométrico. En este sistema de representación recogemos algunas de las construcciones de la parábola en el plano y en el espacio. En el sistema de representación numérico buscamos describir algunas de las características de la función cuadrática desde la perspectiva de sus valores numéricos. Aunque este sistema de representación es muy utilizado en las matemáticas escolares, su carácter discreto restringe la descripción de un objeto visto desde la dimensión funcional. En todo caso, en esta representación es posible apreciar algunas de las características y elementos identificados en las representaciones simbólicas, gráficas y geométricas. Finalmente, en el submapa de fenómenos describimos parcialmente la diversidad de fenómenos cuyo análisis requiere de modelos que involucren a la función cuadrática. Este mapa conceptual de referencia se encuentra descrito en detalle en (Carulla y Gómez, 1999a).

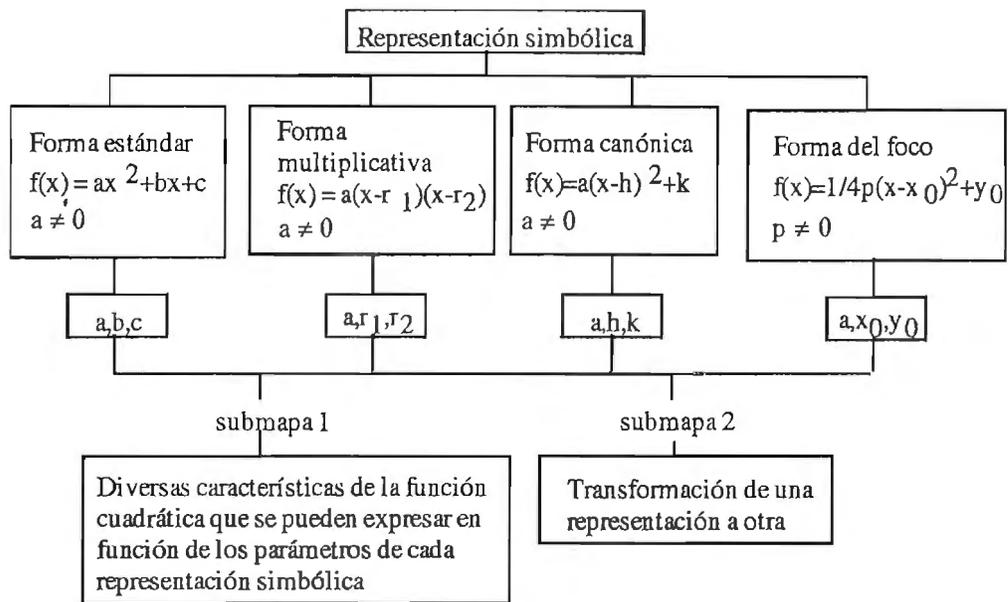


Figura 6. Representación simbólica

La descripción anterior muestra el alto nivel de complejidad de la función cuadrática como objeto de enseñanza en las matemáticas escolares. Su tratamiento simbólico involucra diversas formas; su tratamiento gráfico es rico en elementos y relaciones; su tratamiento geométrico presenta diversas aproximaciones a su construcción; y es un objeto que se encuentra involucrado como modelo en gran número de fenómenos de diversos tipos. Toda esta riqueza se multiplica cuando se tiene en cuenta que cada elemento de un sistema de representación se encuentra relacionado con otros elementos en otros sistemas de representación, y que existen múltiples conexiones dentro de cada uno de estos sistemas.

Método

Hipótesis y esquema de trabajo

La hipótesis que dio lugar a este estudio partió de nuestra percepción de que es posible diseñar y realizar programas de formación permanente de profesores que induzcan a los profesores a hacerse paulatinamente más conscientes de la complejidad del contenido matemático y de la problemática de su enseñanza y aprendizaje. En términos del análisis conceptual presentado en el apartado anterior, podemos reformular esta hipótesis en el sentido de afirmar que es posible afectar el desarrollo didáctico de los profesores con programas de formación basados en las ideas del análisis didáctico. En el caso particular de este estudio, nos centramos únicamente en dos elementos del conocimiento didáctico del profesor con respecto a la función cuadrática: la estructura conceptual y los sistemas de representación.

El estudio se desarrolló siguiendo las ideas del *experimento de desarrollo profesoral* (Simon, 2000). De acuerdo con este esquema, el desarrollo profesoral se promueve a través de un ciclo continuo de reflexión (de los formadores - investigadores) e interacción (entre los formadores y los profesores). En el momento de la reflexión se analiza lo sucedido en la interacción anterior, se generan hipótesis sobre el conocimiento de los futuros profesores y se construyen modelos explicativos de su desarrollo didáctico. En el momento de la interacción se realiza exploración y se contrastan las hipótesis.

Muestra y recolección de información

Para realizar el estudio reunimos a un grupo de veinticuatro profesores de matemáticas de secundaria de colegios oficiales del Distrito Capital de Bogotá. Doce de ellos habían participado en uno o más de nuestros programas de formación permanente de profesores. Seis habían participado en otros programas de formación permanente ofrecidos por “una empresa docente” con esquemas diferentes al utilizado en este estudio y siete trabajaban con nosotros por primera vez. Durante el primer mes de trabajo, algunos profesores se retiraron. Los profesores restantes se organizaron en cinco grupos (dos grupos con dos profesores, dos grupos con cuatro profesores y un grupo con cinco profesores). Más tarde, otro profesor se retiró y uno de los grupos quedó compuesto por una sola profesora.

El diseño y desarrollo del programa se basó en el esquema del análisis didáctico descrito anteriormente. El esquema de interacción se centró en tres módulos: *análisis de contenido*, *análisis de instrucción* y *análisis cognitivo*. Cada módulo duró un mes y estuvo compuesto por un seminario inicial, una interacción intermedia y un seminario final. En cada seminario inicial nosotros presentamos las ideas básicas del propósito del módulo y las tareas que esperábamos que ellos realizaran durante el mismo. En la segunda mitad de ese seminario los grupos de profesores realizaron un primer borrador de esa tarea. Dos semanas más tarde, cada uno de los grupos nos visitó en nuestras oficinas y realizamos una entrevista individual por grupo en la que cada uno nos presentó el avance de su trabajo y nosotros reaccionamos al mismo. Dos semanas más tarde nos reunimos en el seminario final en el que cada grupo presentó el resultado final de su trabajo a los compañeros. De esta forma, se produjeron, para cada grupo, tres mapas conceptuales (seminario inicial, entrevista, seminario final) por módulo. En total, nueve producciones para cada uno de los cinco grupos.

Estas producciones tenían a la función cuadrática como tema matemático. Las tareas propuestas a los profesores consistieron en producir el análisis de contenido (la descripción de la función cuadrática como contenido matemático a enseñar), el análisis de instrucción

(la manera como este tema se ha enseñado⁵) y el análisis cognitivo (la descripción del nivel de comprensión que los alumnos logran al finalizar la educación secundaria, de las dificultades que ellos tienen con respecto al tema y de los errores en los que pueden incurrir). Estas descripciones se hicieron utilizando los mapas conceptuales como herramienta de representación y enfatizando el papel de los sistemas de representación como eje organizador de la estructura conceptual. Los grupos de profesores presentaron además ensayos en los que profundizaron en las ideas que propusieron en sus mapas conceptuales y nosotros registramos la información que surgió de la interacción que tuvo lugar en las entrevistas (no-estructuradas) y en los seminarios y que se refería a la manera como ellos describieron el contenido matemático en cuestión. Nuestra principal fuente de información fueron los nueve mapas conceptuales (tres por cada módulo) que presentaron cada uno de los cinco grupos.

Instrumento de codificación

El instrumento de codificación que utilizamos fue el producto de un proceso iterativo de diseño, aplicación y evaluación de diversos instrumentos de codificación de los mapas conceptuales de los profesores. Para cada etapa de esta iteración, evaluamos los resultados obtenidos con el instrumento anterior, identificamos sus ventajas y defectos, diseñamos un nuevo instrumento y lo aplicamos a los mapas conceptuales para obtener una nueva codificación. La evaluación de los instrumentos se hizo con base en una serie de condiciones. Nosotros deseábamos que el instrumento: describiera, en la medida de lo posible, las impresiones intuitivas que habíamos generado cuando revisamos, al comienzo del proceso, las producciones de los profesores; permitiera una codificación sistemática y objetiva; fuera coherente con y estuviera basado en la estructura conceptual del estudio (análisis, conocimiento y desarrollo didáctico, y función cuadrática); tuviera en cuenta los aspectos estructurales de la descripción, pero también resaltara las características de esa descripción que dependen del contenido matemático en cuestión; y permitiera una categorización y clasificación de las producciones de los profesores que diera lugar al análisis de la evolución de estas producciones en el tiempo. En este proceso produjimos tres instrumentos de codificación que rotulamos como análisis de eventos, análisis por categorías y descripción cuantitativa. Estos instrumentos se describen en detalle en Gómez y Carulla (1999).

El instrumento de codificación está compuesto por siete atributos que describimos a continuación.

Estructura externa. El instrumento de codificación utiliza los sistemas de representación como eje inicial de análisis. Desde esta perspectiva, las producciones de los profesores pueden o no estar organizadas con base en esta noción.

Estructura interna. Cuando un mapa conceptual está organizado con base en los sistemas de representación, es posible contar el número de niveles de los submapas determinados por cada sistema de representación. Decimos que un sistema de representación es *estructurado* si su representación en el mapa conceptual tiene más de tres niveles. Clasificamos los mapas en aquellos que no tienen sistemas de representación estructurados, aquellos

⁵ De acuerdo con las ideas del análisis didáctico presentado anteriormente, en el análisis de instrucción el profesor, dentro de la perspectiva de la resolución de problemas y teniendo en cuenta los materiales y recursos disponibles, produce y evalúa (a la luz de los otros análisis) diseños de las actividades que realizarán los alumnos. En este estudio, simplificamos esta parte del análisis didáctico al estudio y descripción de la manera como algunos libros de texto y colegas presentan y enseñan el tema.

que tienen de dos a cuatro sistemas de representación estructurados y aquellos que tienen cinco sistemas de representación estructurados.

Conexiones con otros sistemas de representación. Consideramos importante caracterizar los mapas dependiendo de las conexiones que se establecen con sistemas de representación diferentes del simbólico o gráfico. Asignamos tres valores a este atributo: no hay conexiones, hay hasta tres y hay más de tres.

Formas simbólicas de la función cuadrática. Éste ya es un atributo propio de la estructura matemática en cuestión. Como vimos más arriba, hay cuatro maneras de expresar simbólicamente la función cuadrática. El atributo tiene entonces dos valores: hay máximo una forma simbólica y hay más de una.

Conexiones entre formas simbólicas. Clasificamos los mapas de acuerdo a si se establecían o no conexiones entre las formas simbólicas.

Papel de la ecuación cuadrática. Decimos que el sistema de representación simbólico de un mapa conceptual está centrado en la ecuación cuadrática ($ax^2 + bx + c = 0$) si la caja que identifica a la ecuación cuadrática es una hija de un grupo de cajas o de una caja que determina la estructura del mapa en ese sistema de representación. En este caso, la información que se presenta en el sistema de representación simbólico depende directamente de la información que surge de la descripción de la ecuación cuadrática. En caso contrario, decimos que el mapa no está centrado en la ecuación cuadrática.

Técnicas de manipulación simbólica. Finalmente, identificamos aquellos mapas conceptuales en los que los procedimientos de manipulación simbólica (e.g., completación de cuadrados, factorización, etcétera) se tratan, ya sea como objetos, o como relaciones entre cajas.

ATRIBUTO	INDICADORES Y CÓDIGOS		
ESTRUCTURA EXTERNA	No está basado en sistemas de representación (NSR)		Basado en sistemas de representación (SSR)
ESTRUCTURA INTERNA	No hay sistemas de representación estructurados (No E)	Hay uno (1 E)	Hay 2, 3 o 4 (2E) (5E)
CONEXIONES CON OTROS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	No hay (N-o)	Hay máximo tres (H-o)	Hay más de tres (V-o)
FORMAS SIMBÓLICAS	Hay máximo una (<2)		Hay más de una (>1)
CONEXIONES ENTRE FORMAS SIMBÓLICAS	No hay (NCFS)		Sí hay (CFS)
ECUACIÓN CUADRÁTICA	Centrado (C)		
TÉCNICAS DE MANIPULACIÓN SIMBÓLICA	Como objetos (O)		Como relaciones (R)

Tabla 1. Atributos, indicadores y códigos

La Tabla 1 muestra un resumen de los atributos estructurales seleccionados y sus correspondientes indicadores y los códigos que les asignamos para identificarlos.

Si se tienen en cuenta las posibles combinaciones de los indicadores, resultan 576 tipos de mapas posibles (los atributos “ecuación cuadrática” y “técnicas de manipulación simbólica” tienen 2 y 3 indicadores, respectivamente). Sin embargo, el análisis de los atributos y sus indicadores nos permite eliminar la mayoría de estos mapas posibles. Esto se debe, por ejemplo, a que no tiene sentido hablar de conexiones entre formas simbólicas si hay menos de dos de estas formas o a que no tiene sentido hablar de conexiones con otros sistemas de representación si el mapa no está organizado con base en ellos o si hay menos de dos sistemas de representación.

Seleccionamos entonces un subconjunto del conjunto global de mapas posibles con base en los criterios anteriores. Organizamos este conjunto teniendo en cuenta el número de sistemas de representación estructurados. La Figura 7 muestra estos mapas posibles con la respectiva jerarquía producto del análisis de los atributos. Esta jerarquía nos permite establecer un sistema de códigos compuestos por un número de dos dígitos y organizar el subconjunto de mapas en cuatro grupos de acuerdo al primer dígito del número. Este primer dígito representa el número de sistemas de representación estructurados en el mapa conceptual correspondiente.

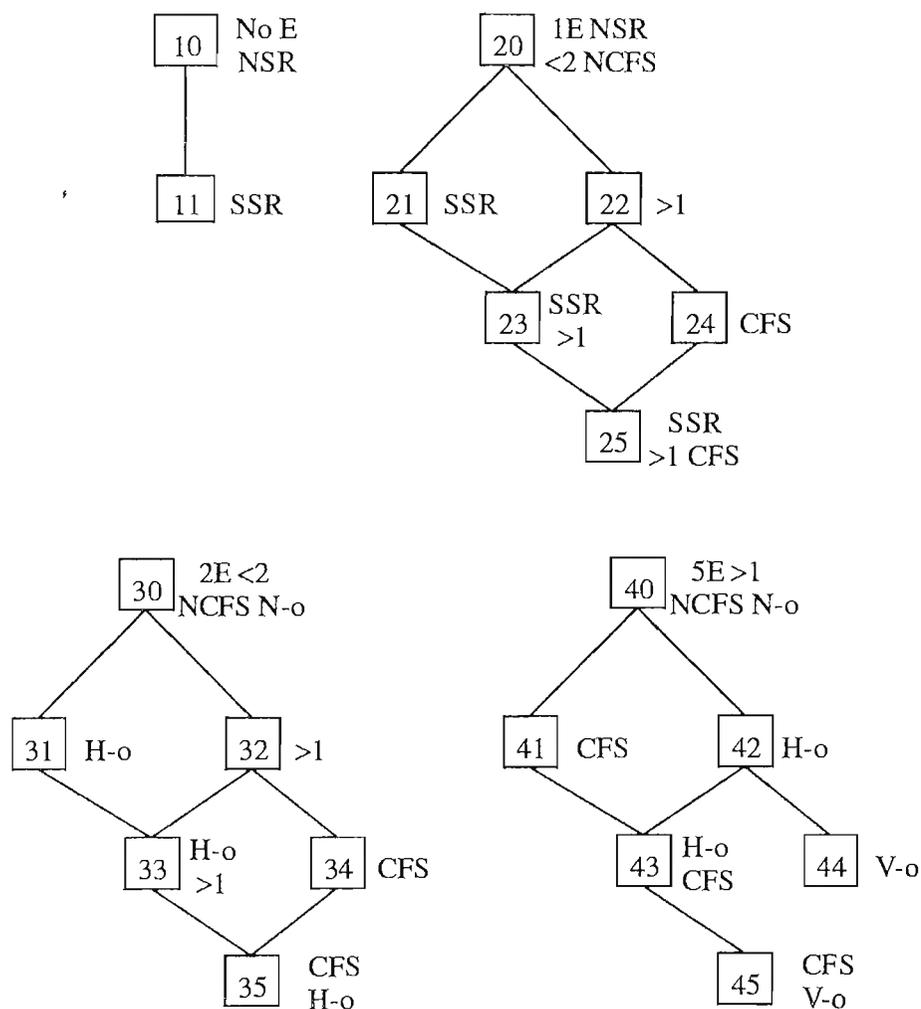


Figura 7. Estructura de mapas posibles

Consideremos, por ejemplo, la estructura propuesta con las cajas marcadas con el número tres como primer dígito. Estas cajas representan mapas en los que hay más de uno y menos de cinco sistemas de representación estructurados (2E). La caja "30" identifica un mapa con menos de dos formas simbólicas (<2), sin conexiones entre las formas simbólicas (NCFS) y sin conexiones con otros sistemas de representación (N-o). Debajo de ella hay dos cajas ("31" y "32"). La primera identifica el mapa en el que hay por lo menos una y máximo tres conexiones con sistemas de representación diferentes del simbólico o el gráfico (H-o), mientras que la segunda identifica el mapa en el que hay más de una forma simbólica (>1). Estas cajas se unen en la caja "33" que tiene las características de las dos cajas anteriores. Por otro lado, la caja "34" identifica el mapa en el que sí hay conexiones entre las formas simbólicas (CFS). La estructura termina en una caja que identifica el mapa que tiene todas las características anteriores.

Esta categorización de los mapas es evidentemente una simplificación de la variedad posible en las producciones de los profesores. Nosotros estábamos buscando esta simplificación, porque ella nos permite categorizar los mapas y comparar los mapas producidos por un mismo grupo en diferentes momentos del tiempo. De hecho, los números insinúan un esquema de comparación. Estos números son un indicativo de la "complejidad" de las producciones de los profesores, dado que a mayor número, mayor el número de características (excepto para aquellos números que se encuentran al mismo nivel como, por ejemplo, 33 y 34).

Un mapa conceptual producido por un grupo de profesores se puede entonces codificar con un número de dos dígitos. A este número podremos agregar una o dos letras para identificar el papel de la ecuación cuadrática (C, si el mapa está centrado en ella) y de las técnicas de manipulación simbólica (O, si se tratan como objetos y R, si se tratan como relaciones). Finalmente, agregaremos un asterisco (*) al número correspondiente si el mapa no cumple estrictamente con las condiciones. Por ejemplo, el código 32* puede identificar un mapa que tiene más de un sistema de representación estructurado, pero que no está organizado por sistemas de representación. Un mapa codificado con 33-CR es un mapa en el que hay más de un sistema de representación estructurado y menos de cinco, más de una forma simbólica, sin conexiones entre ellas, con menos de cuatro conexiones con otros sistemas de representación, centrado en la ecuación cuadrática y en el que las técnicas de manipulación simbólica se presentan como relaciones (Ver Tabla 1 y Figura 7).

Resultados

Análisis intergrupar

La Tabla 2 presenta los resultados obtenidos como producto de este proceso de codificación.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S1A	A1	S1B	S2A	A2	S2B	S3A	A3	S3B
G1	34	35-R	43-R		45-R				
G2	10-C				11	44*		44-R	
G3	20-O		22		23		32*		
G4	20-CO	20-CR	45-R						
G5	32-CO	32*-R			43				45

Tabla 2. Codificación de producciones de los profesores

La primera fila de la tabla contiene la numeración de los nueve mapas conceptuales. La segunda fila identifica los momentos de la interacción (SiA: para el primer seminario del módulo i y SiB: para el segundo seminario; Aj para la entrevista del módulo j). En la primera columna se referencian los cinco grupos de profesores. Los números en las casillas del interior de la tabla corresponden a la codificación descrita en el apartado anterior. Las casillas vacías significan que el mapa correspondiente es equivalente (con respecto al instrumento) al mapa de la casilla anterior. Con base en los resultados presentados en la tabla 2, podemos producir algunas reflexiones de carácter global en las que comparamos las producciones de los diferentes grupos.

Resulta evidente que hay diferencias en las producciones de los grupos. Hay grupos que comienzan con producciones relativamente avanzadas (como el G5) y otros que comienzan en el primer nivel de la estructura (como el G2). Es muy posible que estas diferencias sean producto de las diferencias en el conocimiento y las visiones de los profesores, como consecuencia, entre otras cosas, de su capacitación previa.

En todos los grupos hubo evolución. Se corrobora la hipótesis inicial del estudio, en el sentido de que el tipo de interacción realizada y las herramientas utilizadas con los profesores puede afectar las producciones de los profesores. Esta evolución también se puede justificar a partir de la confrontación que cada grupo tuvo entre sus propias producciones y las de sus colegas. No obstante, este efecto no fue uniforme. Por otro lado, dos grupos (el G1 y el G4) presentaron cambios importantes en sus producciones con motivo de la primera entrevista.

En algunos grupos se evidencia la existencia de “concepciones arraigadas” que no cambiaron fácilmente en el tiempo. Este tipo de concepciones se observan por ejemplo en los grupos G2 y G3. El primero porque permanece durante mucho tiempo en producciones que no tienen sistemas de representación estructurados. Y el segundo porque permanece en producciones que tienen un solo sistema de representación estructurado, sin conexiones entre las formas simbólicas.

Se observan diferencias en la estabilidad de las estructuras. Mientras que algunos grupos mantienen su aproximación más o menos constante y su trabajo se centra en la mejora de las producciones anteriores (como el caso de los grupos G1 y G5), hay otros grupos en los que se observan reorganizaciones estructurales en sus producciones (como el caso de los grupos G2, G3 y G4).

El esquema de codificación resultado de este estudio caracteriza parcialmente las producciones de los profesores. Esto se evidencia en el hecho de que de la gran cantidad de mapas posibles, las producciones de los profesores se restringen a unas pocas. La evolución de estas producciones parecen seguir el camino sugerido por la estructura de atributos propuesta en la Figura 7. Esta evolución se puede caracterizar por unos caminos de evolución representativos con respecto al manejo de los sistemas de representación, al manejo de las técnicas de manipulación simbólica y de la ecuación cuadrática y al manejo de las conexiones entre sistemas de representación. Estos caminos de evolución de las producciones constituyen los modelos explicativos del desarrollo didáctico de los profesores (Simon, 2000) que hemos podido construir a partir de nuestro marco conceptual, de la información recogida y de la manera como hemos codificado y analizado esa información.

Análisis intragrupal

Adicionalmente al análisis anterior, hicimos un análisis de las características y evolución de las producciones de cada uno de los grupos. Para ello, tomamos en cuenta una descripción

cuantitativa de los mapas conceptuales, el análisis de los textos producidos que acompañaban algunos de los mapas y los registros que realizamos de nuestras discusiones con ellos en cada una de las tres entrevistas. Presentamos aquí el ejemplo de uno de los grupos (G1). El análisis de todos los grupos se encuentra en (Gómez y Carulla, 1999a).

Codificación

La Tabla 3 presenta la evolución de las producciones de este grupo de acuerdo con la codificación descrita anteriormente.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	S1A	A1	S1B	S2A	A2	S2B	S3A	A3	S3B
G1	34	35-R	43-R		45-R				

Tabla 3. Codificación de mapas del grupo G1

Vemos que este grupo comenzó el proceso con un mapa bastante sofisticado en el que ya existía más de un sistema de representación estructurado, más de una forma simbólica y había conexiones entre estas formas simbólicas. Algunos miembros del grupo habían participado en programas de formación permanente en los que los temas de mapas conceptuales y sistemas de representación habían sido trabajados. El grupo avanzó muy rápidamente, mejorando sus producciones, pero manteniendo la estructura inicial, hasta llegar, en la entrevista del segundo módulo, a producir un mapa que contiene todas las características que era posible apreciar con el instrumento. La información que proporciona el instrumento se confirma con las otras fuentes de información.

Descripción cuantitativa

La tabla 4 presenta el número y porcentaje de cajas pertenecientes a cada sistema de representación y el número y porcentaje de conexiones implícitas y explícitas en cada uno de los mapas de este grupo.

	1		2		3		4		
	#	%	#	%	#	%	#	%	
Sistemas de representación									
Simbólica	16	64%	24	53%	48	47%	111	51%	
Gráfica	7	28%	17	38%	34	33%	44	20%	
Númerica	1	4%	2	4%	6	6%	28	13%	
Aplicaciones	1	4%	2	4%	7	7%	21	10%	
Geométrica	0	0%	0	0%	7	7%	15	7%	
Total	25		45		102		219		
Conexiones									
Implícitas	6	100%	23	77%	12	67%	17	57%	
Explícitas	0	0%	7	23%	6	33%	13	43%	
Total	6		30		18		30		

Tabla 4. Sistemas de representación y conexiones. Grupo G1

La Figura 8 muestra gráficamente la evolución de las proporciones para los sistemas de representación y para las conexiones. La figura de la izquierda presenta el porcentaje de elementos pertenecientes a cada sistema de representación de un mapa conceptual con respecto al número total de elementos de ese mapa, número que se presenta en el eje horizontal. La figura de la derecha presenta el porcentaje de conexiones implícitas y explícitas. El número total de conexiones en cada mapa se presenta en el eje horizontal.

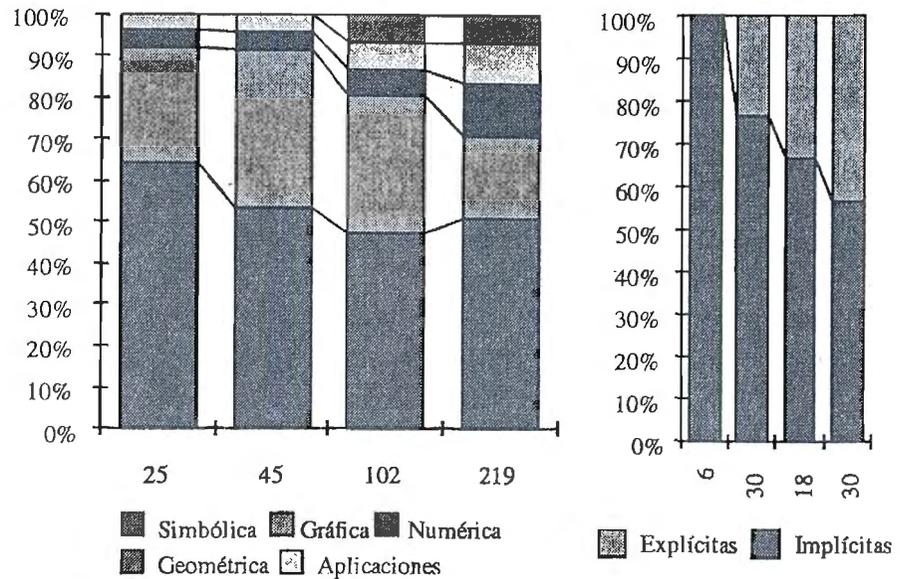


Figura 8. Sistemas de representación y conexiones. Grupo G1

En esta tabla y en estas gráficas se aprecia de nuevo la evolución de las producciones del grupo. Por un lado, desde el primer mapa, aparecen los otros sistemas de representación. La evolución en la complejidad de las producciones se hace evidente en varios aspectos: el aumento en el tamaño de los mapas cuando se mira el número de cajas y el número de conexiones; el aumento en la importancia relativa de los otros sistemas de representación; y el aumento en la proporción de conexiones explícitas.

Análisis de textos y registros de entrevistas

En el módulo de análisis de instrucción los grupos de profesores describieron, utilizando como referencia los mapas conceptuales que habían producido hasta el momento, la secuencia con la que diversos libros de texto y algunos colegas presentan el tema de la función cuadrática. Los grupos de profesores produjeron adicionalmente un documento con sus reflexiones como consecuencia de esta actividad. En este documento, el grupo G1 resalta el énfasis en la representación simbólica y la carencia de conexiones entre los sistemas de representación existentes en los libros de texto analizados; también reconoce que no se tratan con profundidad las representaciones gráfica y verbal; reconoce que los textos tienden a centrarse en la forma general de la representación simbólica; y logra diferenciar la visión procedimental de la visión “argumentativa”. Su visión “avanzada” del tema, en el momento de hacer el análisis de instrucción, se aprecia en los comentarios y críticas que hacen a los textos. El grupo dice que (G1-Soporte Mapa 6, p.2):

Lo propuesto en los textos, no es suficiente para garantizar la obtención de los logros que se plantean. Del tema se trabajó muy poco, tanto en los textos, como en las clases, por parte del profesor. Se dictan los conceptos desligados. Se hace mayor énfasis en una de las representaciones simbólicas (general [estándar]) y [las] otras se ignoran. De las expresiones simbólicas que se estudian, no se profundiza en ellas, ni se relaciona con las otras expresiones y representaciones.

En el módulo de análisis cognitivo los grupos de profesores describieron el nivel de comprensión que los estudiantes alcanzan al finalizar la educación media, identificaron los elementos del mapa conceptual que representan dificultades para los estudiantes y los errores en los que ellos pueden incurrir con motivo de esas dificultades. Al realizar este análisis, este grupo enfatiza la importancia de los sistemas de representación y las conexiones entre ellos. Da una visión clara de la comprensión con base en estos conceptos. También reconoce el papel de la modelización y los sistemas de representación en la resolución de problemas. Reconoce el papel de lo procedimental como técnicas para la solución de problemas y no como centro del proceso de enseñanza-aprendizaje. Llega a dar una definición propia de sistema de representación y a describir el papel que ellos pueden jugar, junto con la importancia de las conexiones. Define los sistemas de representación como (G1 - Soporte Mapa 9, p.1):

formas distintas de analizar un mismo objeto matemático y por tanto permiten que el estudiante comprenda un concepto en toda su complejidad. Al establecer conexiones entre las representaciones el estudiante adquiere un dominio conceptual amplio, que le permite estar en capacidad de identificar las características propias de la función cuadrática en cada representación y su significado en los otros sistemas; así como también identificar de acuerdo con un ejercicio o problema específico cuál es el sistema de representación que más se ajusta a las condiciones establecidas.

Por otra parte, el grupo insiste en que las diversas maneras de mirar la función cuadrática deben ser utilizadas en las ocasiones o situaciones que generen la resolución eficiente de un problema específico y en la importancia de la aplicación de procedimientos en cambio de aplicar fórmulas preestablecidas para pasar de una forma simbólica a otra. El grupo describe su experiencia en el esquema de interacción de la siguiente manera (Martínez y Garay, 1999):

El trabajo nos permitió ver y explorar conexiones dentro del mapa, para comprender la complejidad del tema. Permitted crear una herramienta donde se puede observar la profundidad con que se aborda el tema. Y aún hay fallas en el mapa.

Conclusiones

El problema que dio lugar a este estudio tenía que ver con la contrastación de una hipótesis que surgió a lo largo de la realización de varios programas de formación permanente de profesores realizados por nosotros. Nosotros percibimos que, cuando los profesores se enfrentan al problema de analizar una estructura matemática desde la perspectiva del aná-

lisis didáctico con la ayuda de los mapas conceptuales como herramienta de representación, entonces los profesores se hacen paulatinamente más conscientes de la complejidad del contenido matemático en cuestión y de la problemática de su enseñanza y aprendizaje. Resultaba evidente que, para aproximarse a esta hipótesis, era necesario darle un significado al término “consciencia de la complejidad”, significado éste que permitiera una aproximación sistemática y objetiva a las actuaciones de los profesores, único medio de exploración disponible. Para explorar sistemáticamente esta hipótesis, se diseñó un esquema de interacción basado en el análisis didáctico y se recolectó información por parte de los grupos de profesores. Esta información fue presentada en forma de mapas conceptuales. Para analizarla, se diseñó un instrumento de codificación que, basado en el marco conceptual del análisis didáctico y en la identificación de propiedades de los mapas conceptuales, permitió caracterizar las producciones de los diferentes grupos. Esta caracterización, junto con el análisis de la evolución de cada uno de los grupos (basada, adicionalmente, en los textos producidos por ellos y en el registro de su interacción con los investigadores), corroboró la hipótesis inicial. Las producciones de los diferentes grupos muestran una evolución a lo largo de los tres meses de trabajo. Mientras que hay grupos que avanzan rápidamente, hay otros que logran producciones sofisticadas, pero después de bastante esfuerzo. Por otro lado, hay grupos que lograron una evolución menos desarrollada, a pesar de haber trabajado juiciosamente en el proyecto. El análisis intragrupal insinúa que el conocimiento previo de los profesores, los aportes de los investigadores en las entrevistas, el conocimiento de las producciones de los otros grupos y la posibilidad de trabajar e interactuar en grupo son factores que afectan la evolución de las producciones de los profesores. Por lo tanto, no es posible afirmar, como era de esperarse, que las herramientas didácticas propuestas puedan, por sí mismas, afectar el conocimiento didáctico de los profesores. La evolución en las producciones de los profesores es producto de una experiencia de trabajo e interacción en la que ellos pudieron poner en juego su conocimiento previo y en la que ellos enfrentaron retos que los llevaron a reestructurarlo y desarrollarlo. Aunque tenemos información parcial (de profesores que participaron en programas anteriores) sobre la permanencia de estas reestructuraciones, no podemos afirmar con seguridad que los efectos observados en este estudio permanezcan en el tiempo.

El estudio muestra una manera sistemática (pero particular⁶) de abordar la problemática de la evaluación del impacto de programas de formación permanente de profesores. Esto se debe a que partimos de lo que podrían ser unos objetivos de un programa de este tipo y diseñamos, implantamos y evaluamos una serie de instrumentos que permiten explorar la medida en que estos objetivos se pueden lograr. Consideramos que éste debe ser un aspecto central de la evaluación de impacto de programas de formación permanente de profesores. Una característica adicional de esta manera de evaluar el impacto consiste en que la evaluación proporciona información relevante para la mejora de los programas que se evalúan, como lo sugiere Simon (2000). En este caso particular, comprobamos, por ejemplo, la importancia del trabajo en grupo y de la socialización permanente de las producciones de los profesores.

La exploración del desarrollo didáctico de los profesores involucra una problemática compleja. En muchas ocasiones esta exploración tiende a estar descrita en términos pura-

⁶ En Gómez (2001c) presentamos un esquema más general para el análisis del diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

mente cognitivos que involucran modelos que no permiten hacer observaciones y análisis sistemáticos. La manera como nos hemos aproximado a esta problemática resuelve, al menos parcialmente, esta situación. Al abordar el conocimiento didáctico de los profesores a partir de sus producciones y al escoger un cierto tipo de producciones (los mapas conceptuales), hemos podido diseñar una estrategia operacional para indagar de manera sistemática y objetiva el conocimiento didáctico de los profesores sobre la función cuadrática. Somos conscientes de que esta aproximación operacional ofrece una “ventana parcial” que sólo permite “observar” algunas de las características y facetas del conocimiento didáctico.

Aunque este estudio se centró en una “exploración dinámica” del conocimiento didáctico de los profesores y, por lo tanto, se interesó primordialmente en la evolución de sus producciones (desarrollo didáctico), también nos aporta información sobre las concepciones “iniciales” de los profesores. En particular, se observa que aquellos profesores que no han tenido contacto previo con los mapas conceptuales y el análisis didáctico, tienden a tener una visión esencialmente procedimental y simbólica de la estructura matemática en cuestión. Ellos ven la ecuación cuadrática y los esquemas de manipulación simbólica (fórmula cuadrática, completación de cuadrados, factorización, etcétera) como el centro de la descripción de la “cuestión cuadrática”. Como se observó en otro estudio (Gómez y Carulla, en prensa) ésto es, al menos parcialmente, consecuencia de la manera como los libros de texto presentan el tema⁷, y ésto, a su vez, es consecuencia de las directivas nacionales que existieron durante un buen tiempo. Por consiguiente, no debe sorprender que los estudiantes tengan también esta visión parcial del tema matemático en cuestión.

Las producciones de los profesores se agrupan en un conjunto bastante reducido de mapas conceptuales, dentro de un espectro bastante amplio de posibilidades (ver Figura 7). Los resultados insinúan unos “camino típicos” de evolución de las producciones de los profesores. No podemos afirmar que éste sea el caso para otros profesores y otros esquemas de interacción⁸. No obstante, la caracterización de las producciones propuesta en este estudio puede ser una guía para exploraciones futuras del desarrollo didáctico de los profesores.

El instrumento de codificación que utilizamos basa su potencia en el hecho de que analiza los mapas conceptuales teniendo en cuenta tanto su estructura, como su contenido, a diferencia de otros esquemas que analizan únicamente la estructura (i.e., McGowen, 1998). El análisis de producciones de profesores (o estudiantes) sobre otra estructura matemática podría, con base en un análisis de contenido detallado, identificar nuevos atributos para ese tema que permitan diseñar un nuevo instrumento con las características similares a las del que utilizamos en este estudio.

Consideramos que ésta es, en todo caso, una aproximación parcial a la problemática del desarrollo didáctico de los profesores sobre la función cuadrática. Si se desea profundizar sobre el tema, es necesario diseñar instrumentos de recolección, codificación y análisis que permitan explorar otros aspectos de su conocimiento didáctico e inducir nuevas formas de triangular los resultados de los análisis.

Los resultados del estudio sugieren que las herramientas didácticas y el esquema de interacción propuesto afectan las concepciones de los profesores. Sin embargo, no es

⁷ Y, también, del conocimiento inicial de los profesores.

⁸ De hecho, en Gómez (2001a) presentamos resultados parciales de un estudio similar a éste. Allí se aprecia que, en el caso de la formación inicial, el desarrollo didáctico de los futuros profesores recorre caminos claramente diferentes a los presentados aquí.

posible concluir, a partir de estos resultados, que la práctica docente del profesores haya sido afectada⁹. Para ello, es necesario estudiar esta práctica e intentar explorar las posibles conexiones entre ella y las concepciones de los profesores. Adicionalmente, tampoco es posible hacer afirmaciones sobre la formación matemática de los estudiantes. Esto requeriría, de nuevo, otro proyecto de investigación.

Referencias

- Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. En J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching. Vol. 2. Teacher's knowledge of subject matter as it relates to their teaching practice. A research annual* (pp. 1-48). Greenwich, CT: Jai Press.
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers professional knowledge. En R. Biehler et al. (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer.
- Carulla, C., y Gómez, P. (1999a). *Sistemas de representación y mapas conceptuales como herramientas para la construcción de modelos pedagógicos en matemáticas*. Documento no publicado. Disponible en <http://cumbia.ath.cx/pna.htm> [Documento PNA 2276]. Bogotá: "una empresa docente".
- Carulla, C., y Gómez, P. (1999b). Codificación de mapas conceptuales y concepciones de los profesores de matemáticas. *Aula Urbana*.
- Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (Eds.). (2000). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Cooney, T.J. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), 608-636.
- Dörfler, W. (2000). Means for meaning. En P. Cobb, E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms. Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 99-131). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Goldin, G. A., & Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 1-4.
- Gómez, P. (2000). Los organizadores del currículo en matemáticas. *Revista EMA*, 5 (3), 267-277.
- Gómez, P. (2001a). *Desarrollo didáctico de los futuros profesores de matemáticas: el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación*. Documento aceptado para el V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 2001. Disponible en <http://cumbia.ath.cx/pna.htm> [Documento PNA 2589]. Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2001b). Conocimiento didáctico del profesor y organizadores del currículo en matemáticas. En F. J. Perales, A. L. García, E. Rivera, J. Bernal, F. Maeso, J. Muros, L. Rico, & J. Roldán (Eds.), *Congreso nacional de didácticas específicas. Las didácticas de las áreas curriculares en el siglo XXI* (pp. 1245-1258 Vol. 2). Granada: Grupo Editorial Universitario.
- Gómez, P. (2001c). *Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Documento no publicado. Disponible en <http://cumbia.ath.cx/pna.htm> [Documento PNA 2639]. Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, P., y Carulla, C. (1999). *La enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares del Distrito Capital*. Documento no publicado. Disponible en <http://cumbia.ath.cx/pna.htm>

⁹ Aunque comprobamos claramente que el esquema de interacción preparó y motivó a los profesores para diseñar actividades de clase sobre el tema.