ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide

Fecha de recepción: Abril, 2000

Educación Matemática
Vol. 13 No. 2 agosto 2001
55-67

Vicenç Font Moll
Universidad de Barcelona
Departamento de Didáctica de las CCEE y de la Matemática,España
vfont@pie.xtec.es
Rosa Peraire
L' Hospitalet de Llobregat
I.E.S. Margarita Xirgu, España
rperaire@pie.xtec.es

Resumen: *El objetivo de este artículo es mostrar la "ingenuidad" del punto de vista que considera a las representaciones ostensivas de los objetos matemáticos simplemente como diferentes significantes de objetos a-históricos. Consideramos que para la educación matemática es importante poner de manifiesto la ingenuidad de este punto de vista, puesto que sus repercusiones didácticas tienden a minusvalorar la importancia de las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la producción de sentido.*

Para conseguir este objetivo, en lugar de lo que es habitual en el campo de la investigación en educación matemática, hemos realizado una investigación que pone el acento en la evolución histórica de las diferentes representaciones ostensivas. Para ello, hemos considerado un determinado objeto matemático: la cisoide de Diocles y hemos estudiado la aparición de sus diferentes formas de representación, las traducciones entre ellas, y los diferentes programas de investigación en los que éstas se enmarcan.

Abstract: *The aim of this paper is to demonstrate the "naïveté" of the point of view that simply considers the ostensive representations of mathematical objects as different significants of ahistorical objects. We therefore consider that for the mathematical education it is important to keep in mind the ingenuousness of this point of view, as its effects in didactics tend to underestimate the importance of the different ostensive representations and the translations among them in the production of sense.*

In order to obtain our goal we have carried out an investigation that takes more into account the historical evolution of the different ostensive representations instead of using other standard methods of this research field. In this paper we have considered a fixed mathematical object: the cissoid of Diocles and we have recreated its different representation types and the translations among them. We have also remarked the investigation program that fits into each representation type.

1 Introducción

Numerosas investigaciones han dedicado tiempo y esfuerzos a resaltar la relación que hay entre las concepciones que tienen los profesores sobre las matemáticas y su manera de enseñarlas. Hoy en día es un hecho ampliamente aceptado que las concepciones de los profesores y de las instituciones escolares sobre la naturaleza de las matemáticas influyen sobre su enseñanza.

Una de las concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas es la platónica. Este punto de vista considera que los objetos matemáticos tienen una existencia intemporal que es independiente del conocimiento que cada uno de nosotros tenga de ellos. Frege, Russel, Gödel, Thom, Penrose y muchos otros, en algún momento de su trayectoria intelectual, han sido defensores de algún tipo de platonismo. En 1884 Frege publica "Fundamentos de Aritmética", obra en la que distingue el mundo objetivo de los conceptos del mundo subjetivo que es perceptible por los sentidos: *"(...) el número es un objeto de la psicología o un resultado de procesos psíquicos tanto como lo pueda ser, digamos, el mar del Norte. La objetividad del mar del Norte no viene afectada por el hecho de que dependa de nuestro arbitrio qué parte de toda la superficie de agua en la tierra delimitemos y cubramos bajo el nombre de <<mar del Norte>>. Éste no es motivo para querer estudiar este mar por vía psicológica."* (citado en Frege 1998, pág 23). En 1901 Russell escribía: *"El número 2 debe ser de todos modos una entidad, que tendría una entidad ontológica, aunque no esté en ningún espíritu (...) La aritmética debe ser descubierta en el mismo sentido que Colón descubrió las islas occidentales y nosotros no creamos los números ni él creo a los indios"* (introducción a los Principios de la matemática, citado en Omnès 2000, pág 146). Thom en 1971 escribe: *"Habida cuenta de todo, los matemáticos deberían tener el valor de sostener sus convicciones más profundas y afirmar, por tanto, que las formas matemáticas tienen existencia independiente de la mente que las está contemplando... A pesar de ello, en un instante dado cualquiera, la visión que tienen los matemáticos de este mundo de ideas es tan solo incompleta y fragmentaria".* (citado en Davis y Hersh 1988, pág. 236). Por su parte, Gödel, en sus ensayos inéditos escribe: *"Por otro lado, la segunda alternativa, en la que existen proposiciones matemáticas absolutamente indecidibles, parece refutar la concepción de que la matemática (en cualquier sentido) es sólo nuestra propia creación. Pues el creador conoce necesariamente todas las propiedades de sus criaturas, ya que ellas no pueden tener más propiedades que aquellas que él les ha dado. Así, esta alternativa parece implicar que los objetos y hechos matemáticos, o al menos algo en ellos, existen objetiva e independientemente de nuestros actos mentales y decisiones, es decir supone alguna forma de platonismo o <<realismo>> respecto a los objetos matemáticos."* (Gödel 1994, pág 156). Penrose en 1989 en "La mente del emperador" también aboga por un cierto de tipo de platonismo : *"En este capítulo he argumentado que tales ideas <<infusas>> tendrían algún tipo de existencia intemporal, independientes de las nuestras terrenales"* (Penrose 1989, pág. 135).

En la concepción platónica, las representaciones ostensivas[1] de los objetos matemáticos son secundarias y relativamente "neutras", ya que se consideran como diferentes significantes de objetos matemáticos a-históricos. El efecto que producen las diferentes representaciones ostensivas en la producción de sentido es un tema que no preocupa en demasía a la concepción platónica, ya que este posible efecto corresponde al "contexto de descubrimiento" y no al "contexto de justificación". Frege fue de los primeros en introducir la diferencia entre el "contexto de justificación" y el "contexto de descubrimiento" al considerar que la psicología no puede aportar algo a la fundamentación de la aritmética. Frege no niega que la psicología puede proporcionar explicaciones causales de cómo surge el pensamiento de que $2\cdot 2=4$, pero tal explicación genética no tiene nada que ver con la aritmética que se ocupa de la "verdad" de proposiciones de este tipo y no de "cómo surgen". Para Frege, un pensamiento es verdadero independientemente de que alguien lo esté pensando efectivamente: el teorema de Pitágoras no deja de ser verdadero cuando dejo de pensarlo, como el sol no deja de existir cuando cierro los ojos. Frege distingue entre el mundo subjetivo (sensaciones, imágenes, etc.) y el mundo objetivo de los conceptos. La psicología se encarga del estudio del reino de lo subjetivo. Pero al mundo de los conceptos no pertenecen ni las sensaciones ni las imágenes; los conceptos no son la propiedad de alguna persona individual y no surgen en un momento determinado ni sufren evolución alguna. Dado que el campo de la matemática tiene que ver con el estudio de los conceptos -que nada tienen que ver con la psicología-, cualquier infección de ésta sólo puede llevar a la confusión.

La crítica al platonismo se ha realizado básicamente desde dos frentes: el psicologismo y la historia de las matemáticas. Ésta crítica ha llevado a considerar a las matemáticas como una determinada organización de los productos de la actividad matemática, que no es estática sino que va evolucionando históricamente.

La actividad matemática se puede considerar tanto como una actividad social (institucional) como una actividad individual. La actividad matemática se puede considerar como un conjunto de prácticas realizadas en el seno de una institución, o bien como la actividad que desarrolla un sujeto individual. La sociología del conocimiento explica como se genera la actividad personal a partir de las instituciones y como la actividad institucional se genera a partir de la actividad de los miembros de la institución.

En la actividad matemática se han de resolver problemas utilizando determinadas técnicas. Estas técnicas se aplican a un conjunto organizado de objetos matemáticos cuyas características las justifiquen y se plasman en ciertas representaciones ostensivas que son utilizadas en determinadas prácticas investigativas. Este conjunto de prácticas se puede parcializar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de representación, produciendo un determinado sentido. Un cambio de representación puede activar un sentido diferente al desarrollar y utilizar técnicas que permiten facilitar la resolución de un problema dado. Por este motivo consideramos que las diferentes representaciones ostensivas de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para su comprensión y, por tanto, para su enseñanza y aprendizaje. Las diferentes formas ostensivas que pueden representar a un objeto (o sistema organizado de objetos) matemático son el resultado de una larga historia en la que, en algunos casos, una nueva forma de representación plasma un nuevo programa de investigación[2].

El objetivo de este artículo es mostrar la "ingenuidad" del punto de vista que considera a las representaciones ostensivas de los objetos matemáticos simplemente como diferentes significantes de objetos a-históricos. Consideramos que para la educación matemática es importante poner de manifiesto la ingenuidad de este punto de vista puesto que sus repercusiones didácticas tienden a minusvalorar la importancia de las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la producción de sentido.

Para conseguir este objetivo, en lugar de lo que es habitual en el campo de la investigación en educación matemática, hemos realizado una investigación que pone el acento en la evolución histórica de las diferentes representaciones ostensivas. A continuación consideraremos un determinado objeto matemático: *la cisoide de Diocles* y recrearemos la aparición de sus diferentes formas de representación, las traducciones entre ellas, y comentaremos los diferentes programas de investigación en los que éstas se enmarcan.

2 Traducciones entre las diferentes representaciones ostensivas de la cisoide

Los intentos para solucionar los tres problemas clásicos: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección de un ángulo, fueron uno de los motores del desarrollo de la geometría griega. Si bien desde la perspectiva actual la cuadratura del circulo es, de los tres, el problema más relevante, en la antigua Grecia el más importante era la duplicación del cubo. Diocles (240-180 a.C.) utilizó la cisoide para resolver la duplicación del cubo.

Definición de la cisoide

Sea C una circunferencia de radio $a/2$ y centro O, AB un diámetro de C y l la recta tangente a C en B. Para cada recta AM, $M \in l$, consideramos su intersección N con C y un segmento AP, $P \in AM$, de igual longitud que MN. El lugar geométrico de los puntos P así obtenidos es una curva llamada *Cisoide de Diocles.*

Esta definición nos presenta la cisoide como un objeto que se puede mostrar por diferentes ostensivos asociados. Cada uno de estos ostensivos permite obtener información significativa sobre la cisoide.

Enunciado $\Rightarrow$ Gráfica

La definición anterior permite representar la cisoide por el dibujo de una curva. En efecto, en la construcción de la figura 1, realizada con el programa Cabri[3], la cisoide se obtiene como la traza del punto P al mover el punto M.

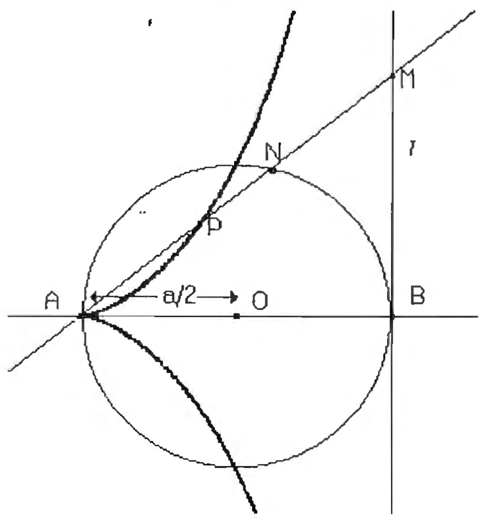

Figura 1

Esta curva sólo es una cisoide particular, ya que si variamos la longitud a obtendremos cisoides diferentes. Ahora bien, aunque la curva de la figura es sólo un caso particular, los resultados obtenidos a partir de las acciones que realicemos sobre esta cisoide en particular son aplicables a cualquier cisoide. Dicho de otra manera, nos situamos en un "juego"[4] de lenguaje en el que se considera que, cuando nos referimos a la figura 1, se entiende que nos interesa su aspecto general, determinado por la definición de las relaciones entre las partes de la gráfica, y que prescindimos de los aspectos particulares.

Interpretación analítica de la gráfica

La construcción anterior la podemos considerar como el paso de una representación de la cisoide en formato "enunciado" a una representación de la cisoide en formato "gráfico".Esta forma de representación de la cisoide permite obtener información significativa sobre esta curva, conociendo la interpretación de las traducciones entre las diferentes formas de representación que se expondrán más adelante:

- Es simétrica respecto del eje de abscisas
- La recta $x = a$ es una asíntota vertical
- Es algebraica
- Es de grado 3
- En el origen de coordenadas presenta una singularidad de orden 2
- Es irreducible
- Es racional

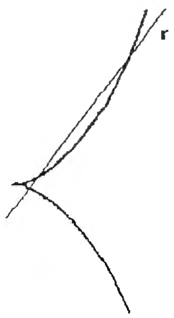

Figura 2

Que es simétrica respecto del eje de abscisas y que tiene una asíntota vertical es visualmente inmediato. Que la curva es algebraica no es tan evidente, pero al obtenerse por una sucesión de movimientos escalonados se puede afirmar que lo es[5]. Para comprobar que la curva es de grado tres basta observar que el máximo número de puntos de intersección de la cisoide con una recta genérica (por ejemplo, la recta r) es tres[6].

Esta figura también nos permite observar que el origen es un punto singular de orden dos, ya que, en el caso que la recta r pase por el origen de coordenadas, ella corta la curva como máximo en dos puntos.

La figura obtenida utilizando el programa Cabri es irreducible, porque no puede ser considerada como la unión de dos curvas algebraicas diferentes, lo cual sí es posible en el siguiente ejemplo:

Ejemplo: la curva plana dada por la ecuación $x^3 + y^2x - a^2x = 0$ tiene dos componentes irreducibles: la recta de ecuación $x=0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - a^2 = 0$; ya que admite la descomposición: $x^3 + y^2x - a^2x = x \cdot (x^2 + y^2 - a^2)$.

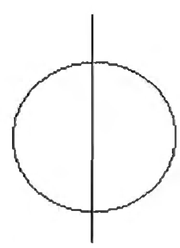

Figura 3

Intuitivamente, una curva es racional si es parametrizable por funciones racionales. Esta propiedad se puede visualizar gráficamente como una "casi-biyección" (una aplicación biyectiva entre la curva y una recta, salvo quizás en un número finito de puntos). Esta biyección se observa claramente en la construcción de la cisoide con el programa Cabri ya que a cada punto M de la asíntota le corresponde un único punto P de la curva.

Gráfica ⇒ Expresión simbólica

Si bien las curvas están presentes en toda la historia de las matemáticas, uno de los momentos en los que se plantea claramente el paso del gráfico de la curva a una expresión simbólica es el nacimiento de la geometría analítica. La lectura de obras como "La Géométrie" de Descartes ayudan a comprender mejor como puede pasarse de la gráfica a la expresión simbólica. Los trabajos de Descartes son muy interesantes porque parten de las dos metáforas[6] clásicas sobre las curvas:

1) Las curvas son secciones.
2) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones para añadir una tercera:
3) Las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones, cuyo análisis permite hallar una ecuación que cumplen los puntos de la curva.

Hasta principios del siglo XIX en que Cauchy aborda la reorganización del análisis infinitesimal, esta última metáfora es la que puede hallarse en la literatura. Es decir, hasta la aritmetización del análisis las gráficas de funciones se consideraban como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la cual podía expresarse mediante una fórmula. A partir de los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet, entre otros, se aceptaron como funciones curvas que no podían ser trayectorias. Con la posterior aplicación de la teoría de conjuntos a las funciones tomó cuerpo la metáfora conjuntista:

4) La gráfica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

Para demostrar la potencia de su método, Descartes, a propuesta de Golius, parte de una cuestión planteada por la geometría clásica, el problema de Pappus, para preguntarse cuáles son los puntos que cumplen las condiciones. El problema de Pappus era un problema no resuelto, a pesar de las tentativas de Euclides, Apolonio y del propio Pappus para resolverlo utilizando los métodos de los "clásicos".

Antes de dar respuesta al problema de Pappus, Descartes se lamenta de una de las grandes limitaciones de la geometría griega, la limitación pitagórica. En efecto, la aparición de la inconmensurabilidad entre segmentos, es decir, el hecho de que dado un segmento unitario existen otros que no pueden ser medidos con exactitud por la unidad, imposibilitó la aceptación de que a cada segmento rectilíneo es posible asociarle un número que da su longitud. Descartes, en el siguiente párrafo, se queja de esta limitación y de la oscuridad que implicaba su aceptación: *"Os ruego que observéis de paso que el escrúpulo que tenían los antiguos en usar notaciones propias de Aritmética en Geometría, que no podía proceder sino de que no veían con bastante claridad su relación, era la causa de la gran oscuridad y dificultad en el modo en que se expresaban, pues Pappus sigue expresándose del modo siguiente: (...)"* (Descartes 1981, pág. 287).

El problema de Pappus es un típico problema de lugares geométricos que Descartes formula de la siguiente manera: *"Sean AB, AD, EF, GH, etc..., varias líneas dadas debiendo hallarse un punto C, desde el que trazando varias líneas rectas sobre las líneas dadas como CB, CD, CF y CH, de modo que los ángulos CBA, CDA, CFE, CHG sean dados, y de modo tal que el resultado de la multiplicación de una parte de estas líneas sea igual al resultado obtenido por la multiplicación de las otras, o bien que guarden alguna otra proporción dada, lo cual en nada dificulta el problema".* (Descartes 1981, pág. 289).

Ilustra el enunciado con un dibujo para cuatro rectas, para después pasar a resolver el caso de las cuatro rectas

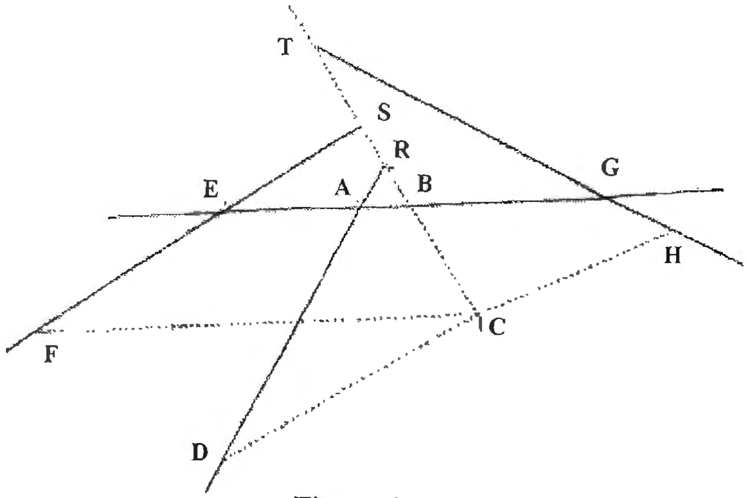

Figura 4

Después de resolver el problema de Pappus, Descartes se encuentra que, según el número de líneas que hay en el problema, obtiene una expresión algebraica con dos variables, la x y la y, que pueden ser de grado cualquiera. Para hallar un punto C que sea solución del problema da un valor arbitrario a x o a y y resuelve la ecuación. Esta solución se obtiene geométricamente de la manera siguiente:

- si es de grado dos utilizando regla y compás.

- si es de grado tres o cuatro utilizando secciones cónicas.

Para resolver ecuaciones de grado superior a cuatro se necesitan curvas más complejas que las cónicas. Pero Descartes, en este momento, se encuentra, por una parte, con la clasificación de los griegos de los problemas en planos, sólidos y supersólidos o lineales[7], y, por otra parte, con la limitación platónica. Platón, para superar el problema de que la diagonal no es conmensurable con el lado del cuadrado, pero es construible a partir del lado, impone la limitación de que todos los segmentos admisibles han de ser construibles con estos dos únicos instrumentos: la regla y el compás. Descartes acepta la limitación platónica en el sentido que solamente son aceptables segmentos construibles, pero lo que no acepta es limitarse a los instrumentos impuestos por Platón.

En el primer apartado del libro segundo, Descartes se pregunta cuáles son las curvas que se pueden admitir en geometría y se pregunta por qué los antiguos no distinguieron diversos grados entre las líneas más complejas y por qué llamaron mecánicas a algunas de ellas. En este primer apartado también divide las curvas en mecánicas y geométricas. Para Descartes una curva es geométrica si la podemos imaginar descrita por un movimiento continuo o bien por varios movimientos sucesivos de manera que los últimos vienen determinados por los anteriores, mientras que las curvas mecánicas son las que resultan de dos movimientos independientes que no guardan entre sí una relación que pueda ser medida.

Antes de Descartes las curvas se consideraban como el resultado de hacer secciones (como por ejemplo las secciones cónicas) o bien se consideraban como el resultado de la composición de movimientos. Descartes se queja de la falta de claridad de los antiguos sobre las curvas y hace una reflexión que le lleva a distinguir, por primera vez, entre curvas algebraicas y trascendentes (según Bourbaki 1976). Para clarificar lo que entiende por curva geométrica, Descartes construye un instrumento que le permite dibujar una serie de curvas más complejas que las cónicas, y que, según él, tienen el mismo derecho a la existencia y a ser estudiadas que las secciones cónicas. La curva geométrica para Descartes es la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre una regla es trasmitido por las diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva.

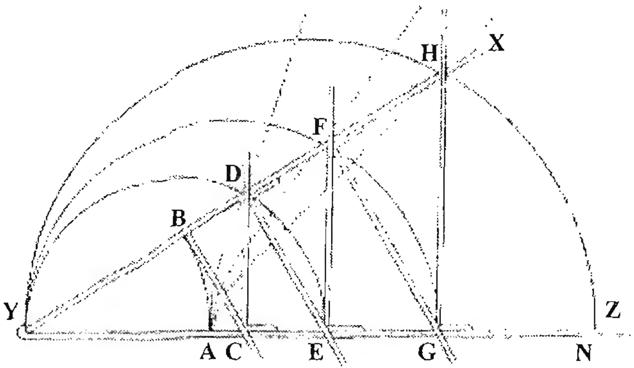

Figura 5

Esta manera de entender la curva y la introducción implícita del sistema de coordenadas permite a Descartes hallar la expresión algebraica de la curva y le lleva a definir claramente el objeto de lo que posteriormente se llamó Geometría analítica: las curvas llamadas por él geométricas; y las técnicas que se han de utilizar para estudiarlas: la teoría de las ecuaciones[8].

La manera que tiene Descartes de hallar la expresión algebraica que cumplen los puntos de la curva consiste en analizar las condiciones que determinan el movimiento del punto que describe la traza y, a partir de este análisis, busca la ecuación que cumplen las coordenadas de los puntos de la curva. A continuación haremos una "simulación histórica" aplicando su método al caso de la cisoide de Diocles [9].

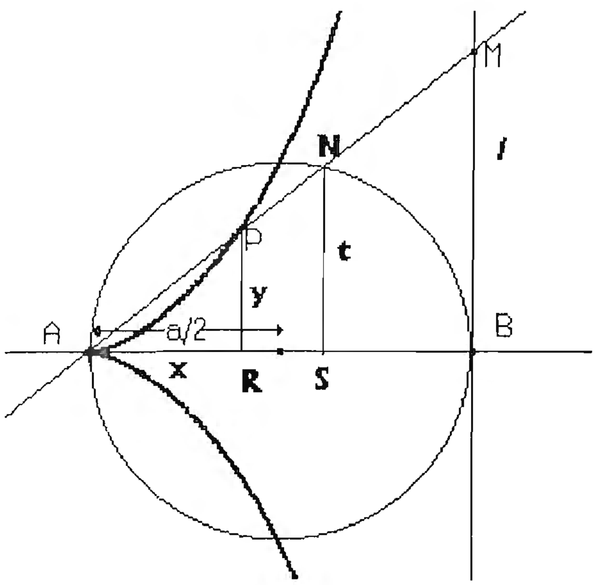

Figura 6

Por construcción, el segmento AP y el segmento NM tienen la misma longitud. El teorema de Thales permite afirmar que AR y SB también tienen la misma longitud (x). Los triángulos ARP y ANS son semejantes, por tanto: $\frac{y}{x} = \frac{t}{a-x}$.

Descartes, al resolver el problema de Pappus, había obtenido una clasificación de las cónicas que le permite asegurar que una ecuación del tipo: $y^2 = lx - x^2$ es la ecuación de una circunferencia[10]. Con esta notación, la circunferencia de la figura anterior tiene por ecuación: $t^2 = ax - x^2$. Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones se obtiene la ecuación de la cisoide

$$\left.\begin{array}{l} \frac{y}{x} = \frac{t}{a-x} \\ t^2 = ax - x^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x^3 + y^2x - ay^2 = 0$$

La traducción "Curva ⇒ expresión simbólica", tal como la hemos descrito, es una técnica que no vive aisladamente sino que necesita un corpus teórico que la justifique y le dé sentido. Bos (1981) considera que esta técnica sólo tiene sentido si la consideramos como parte de un programa de investigación, radicalmente diferente al programa de investigación de la geometría griega, iniciado por Descartes en la Géométrie que consta de tres partes. Primeramente, Descartes tiene que determinar cuáles son las curvas que serán estudiadas (las geométricas). En segundo lugar, tiene que postular un criterio claro para distinguir las curvas simples de las que no lo son (la aplicación del álgebra le permite obtener ecuaciones cuyo grado puede ser usado como indicador de simplicidad). Finalmente, tiene que encontrar un método para hallar la curva más simple posible mediante la cual se puede resolver un problema dado. Este programa de investigación, iniciado por Descartes, es un programa global en el que el estudio local no se considera.

Transformaciones entre expresiones simbólicas

Implícita ⇒ Implícita

Una vez obtenida la expresión implícita de la cisoide podemos buscar otras expresiones equivalentes. Por ejemplo, si hacemos el siguiente cambio de coordenadas: $x = y_1$, $y = -x_1$ la expresión implícita de la cisoide en las nuevas coordenadas es $y_1^3 + x_1^2 y_1 - a x_1^2 = 0$ (*) y la traza de la cisoide ahora es la gráfica de una función.

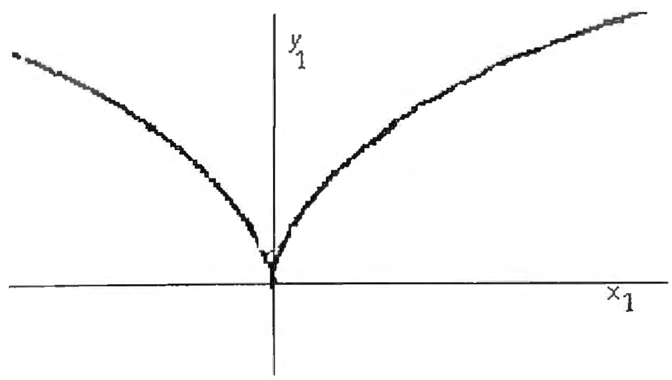

Figura 7

Implícita ⇒ Explícita

En esta última expresión (*) no es ni mucho menos trivial aislar y_1 en función de x_1. De todas maneras aunque no podamos encontrar la función explícita, el teorema de la función implícita nos asegura que en un entorno de un punto no singular (x, y) de la cisoide, la curva se puede parametrizar en la forma $(x, h(x))$. Efectivamente, si consideramos en el caso de la cisoide un punto (x, y) diferente del punto singular, tenemos que la derivada parcial de $f(x_1, y_1) = y_1^3 + x_1^2 y_1 - a x_1^2$ respecto a y_1 es no nula y por tanto existen un intervalo abierto I, $x \in I$, un abierto W de $\mathbf{R}^2$, $(x,y) \in W$ y una función $h: I \to \mathbf{R}$ diferenciable (es decir, la función h tiene derivadas de todos los órdenes en todos los puntos de I) tal que

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ (x,y)\in W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I \\ y = h(x) \end{cases}$$

Mientras nos limitemos a buscar la expresión implícita nos estamos moviendo en un punto de vista global. Ahora bien cuando nos planteamos obtener la forma explícita estamos obligados a introducir razonamientos de tipo local. Situados dentro de este nuevo programa de investigación (perspectiva local), las técnicas de desarrollo en series de potencias nos permiten obtener expresiones explícitas de la cisoide.

El desarrollo del cálculo infinitesimal y el de la teoría de series son simultáneos, resultando estas últimas un instrumento imprescindible para el avance de aquél. Los principales científicos del siglo XVIII efectuaron importantes contribuciones en el campo de las series, pero fue Isaac Newton quien realizó un siglo antes la mayor aportación al tema. De hecho los desarrollos en serie son esenciales en el cálculo de Newton y simultáneamente, el cálculo le permite aplicar nuevas técnicas de desarrollo en serie. En siglo XVIII aparecen nuevas y relevantes contribuciones a este campo entre las que destacan las de Euler. La fórmula de Taylor proporciona un método general para el desarrollo en serie de una función.

Si bien en las organizaciones actuales del análisis matemático la fórmula de Taylor se presenta como una técnica de aproximación local, también se puede utilizar para la predicción. De una manera metafórica podemos entender la fórmula de Taylor como una técnica que permite predecir el futuro $h(a+t)$ conociendo el presente $(a, h(a), h'(a), h''(a), \ldots\ldots)$, por ejemplo: conociendo la velocidad y la aceleración de un objeto en un momento dado permite predecir su posición en un momento posterior. Cantoral y Farfán (1998) sostienen que la notación de la época (por ejemplo la notación del binomio de Newton) plasma, más que un punto de vista de aproximación, un programa de investigación que buscaba modelar y predecir fenómenos naturales con el respaldo matemático. Un amplio programa de matematización de los fenómenos que se podían modelar con una muy fructífera metáfora del flujo del agua, una metáfora que se aplicaría por igual a la evolución de muy diversas magnitudes reales. Se trata de predecir los valores que tomará un sistema en evolución si se conocen sus valores iniciales y determinar de qué forma evoluciona el sistema.

Si se conocen los valores de cierta función en un único punto espacial o temporal, sea este valor x_0, se trata de predecir el estado posterior de esta función en x_0+g, utilizando los valores iniciales x_0, $h(x_0)$, $h'(x_0)$, $h''(x_0)$, ..., y la fórmula de Taylor. Volvamos al caso de la cisoide. Fijemos coordenadas como en (*). Supongamos que la trayectoria de un móvil es la cisoide y que conocemos los valores iniciales para un valor x (tal que $(x, h(x))$ es un punto no singular). La fórmula de Taylor permite predecir la posición del móvil en el instante $x+\varepsilon$, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño.

Utilizando derivación implícita en (*) se obtiene:

$$h'(x)=\frac{2ax-2yx}{3y^2+x^2} \quad \text{y} \quad h''(x)=\frac{(2y-2a)3x^2(3ay+3y^2+3x^2)}{(3y^2+x^2)^3}$$

Por tanto:

$$h(x+\varepsilon)=h(x)\frac{2ax-2h(x)x}{3h(x)^2+x^2}\varepsilon+\frac{(2h(x)-2a)3x^2(3ah(x)+3h(x)^2+3x^2)}{(3h(x)^2+x^2)^3}\frac{\varepsilon^2}{2!}+\ldots\ldots\ldots$$

Si bien la fórmula de Taylor permite encontrar una expresión explícita en un entorno de cualquier punto no singular, no es aplicable en un entorno de un punto singular. Los desarrollos de Puiseux[11] permiten solucionar parcialmente el problema, ya que nos permiten factorizar localmente el polinomio que define la curva de la manera siguiente:

Sea (0,0) un punto singular de la curva $f(x,y)=0$, entonces existe un entorno V del origen tal que para todo punto (x,y) de V se tiene:

$$f(x,y)=u(y-s_1(x))\ldots\ldots(y-s_n(x)) \quad (**)$$

donde u es una serie compleja en dos variables, convergente en un entorno del origen ($u \in \mathbf{C}\{x,\ y\}$) con $u(0,0)$ no nulo y $s_i(x) \in \mathbf{C}\{x^{1/mi}\}$, es decir, s_i es una serie de potencias en $x^{1/mi}$ convergente en un entorno de $x=0$. Estas series $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se denominan y – raíces de f.

La factorización de (**) nos permite, en cierta forma, "parametrizar" la curva en un entorno del punto singular utilizando series con exponentes fraccionarios (series de Puiseux). Para encontrar estas series se utiliza el algoritmo de Newton- Puiseux (Semple-Kneebone 1959). Este algoritmo, aplicado al caso de la cisoide (dada por*), permite obtener el siguiente desarrollo en serie de potencias fraccionarias y coeficientes reales[12] en un entorno del punto singular:

$$y(x)=a^{1/3}x^{2/3}-\frac{x^{4/3}}{3a^{1/3}}+\frac{x^{8/3}}{81a^{5/3}}+\ldots\ldots\ldots$$

3 Conclusiones

Creemos que hemos cumplido el objetivo de mostrar la "ingenuidad" del punto de vista que considera a las representaciones ostensivas de los objetos matemáticos simplemente como diferentes significantes de objetos a-históricos. El caso de la cisoide sirve para ilustrar la complejidad de las relaciones que se establecen entre un objeto matemático, sus ostensivos asociados, las técnicas que permiten manipular estos ostensivos y las situaciones en las que se usa el objeto (juntamente a sus ostensivos y técnicas asociadas) para organizar fenómenos. También muestra que las diferentes formas ostensivas que pueden representar a un objeto matemático son el resultado de una larga evolución en la que, en algunos casos, una nueva forma de representación plasma un nuevo programa de investigación.

Consideramos que para la educación matemática es importante poner de manifiesto la ingenuidad de este punto de vista, puesto que sus repercusiones didácticas tienden a minusvalorar la importancia de las diferentes representaciones ostensivas y las traducciones entre ellas en la producción de sentido. También consideramos importante para la educación matemática ampliar la argumentación con análisis históricos y no limitarla solamente a investigaciones cognitivas sobre el efecto que producen las diferentes representaciones ostensivas sobre la comprensión que genera el alumno.

Notas finales

1 Utilizamos el término "ostensivo" en el sentido de que se puede mostrar a otro.

2 Utilizamos el término "programa de investigación" en el sentido de Lakatos (1983).

3 Programa desarrollado en el Laboratorio de estructures discretas y de didáctica del IMAG de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble.

4 Utilizamos el término "juego de lenguaje" en el sentido de Wittgenstein (1987). La crítica de Wittgenstein al análisis referencial del significado le lleva a considerar las bases subjetivas y sociales de la certeza que se obtiene al seguir una regla lógica o matemática, porque, según su punto de vista, la certeza y la necesidad de las matemáticas derivan de la aceptación de unas "reglas de juego" que se encuentran en una "forma de vida" socialmente preexistente.

5 La demostración de que se pueden identificar el conjunto de curvas algebraicas planas con el conjunto de curvas que pueden ser dibujadas de manera escalonada (al menos localmente) la obtuvo Kempe en el siglo XIX (Bos 1981).

6 Utilizamos el término metáfora tal como lo utilizan Lakoff, Johnson y Nuñez (Lakoff y Johnson 1991, Lakoff y Núñez 2000 y Núñez 2000). Estos autores consideran que *"la esencia de la metáfora es entender y experimentar un tipo de cosa en términos de otra."* (Lakoff y Johnson, 1991, pág. 41).

7 Los problemas planos son aquellos que se pueden resolver construyendo segmentos utilizando regla y compás. Como ejemplo de problema plano tenemos la construcción del cuadrado de la diagonal a partir del lado o bien el problema de Pappus si se propone para 3, 4 ó 5 líneas (exceptuando el caso en que las 5 sean paralelas). La geometría de los "elementos" de Euclides consiste precisamente en construir todo aquello que es posible construir usando solamente la regla y el compás. Es precisamente esto lo que imponen los tres primeros postulados de Euclides.

Los problemas sólidos son aquellos que necesitan la introducción de una sección cónica, o sea es necesario algún instrumento que permita construir cónicas para poder resolverlos. Como ejemplo de problema sólido tenemos la construcción de la diagonal de un cubo a partir de su lado; o bien el problema de Pappus si se propone para 5 líneas paralelas o bien 6, 7, 8 ó 9 líneas (si exceptuamos el caso en que las 9 líneas son paralelas).

Los problemas supersólidos o lineales son aquellos que necesitan la introducción de una curva más compleja que las secciones cónicas. Como ejemplo de problema lineal tenemos el problema de Pappus si se propone para 9 líneas pararlelas o bien para más de 9 líneas.

8 Si bien Descartes considera que las curvas que se pueden dibujar de manera escalonada son algebraicas, no da ninguna demostración.

9 En la biografía que hemos consultado sobre la obra de Descartes no hemos encontrado el cálculo de la ecuación de la cosoide.

10 Al resolver Descartes el problema de Pappus para cuatro rectas obtiene que las soluciones cumplen la ecuación $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2}$. Si a esta ecuación le aplicamos el siguiente cambio de coordenadas: $y_1 = y - m + \frac{n}{z}x$, $x_1 = \frac{a}{z}x + n$, se obtiene, mediante un giro y una traslación, la ecuación reducida de la curva respecto de un sistema de ejes perpendiculares de manera que el origen coincide con un vértice de la curva y el eje de abscisas con un eje de simetría de la curva. La nueva ecuación es $y_1^2 = \sqrt{\frac{o^2 z^2}{a^2} + \frac{4pz^2m}{a^2}}\, x_1 - \frac{pz^2}{ma^2}x_1^2$. Si $\frac{pz^2}{ma^2} = 1$ obtenemos una ecuación del tipo $y^2 = lx - x^2$. Cuando $\frac{pz^2}{ma^2} = 1$, Descartes dice: *"La única excepción sería cuando la cantidad a^2m es igual a pz^2, cuando ILC es un ángulo recto, en cuyo caso tenemos un círculo en vez de una elipse"* (Descartes, 1981, pág. 305).

11 En el marco de las series de potencias, consideramos las series de Puiseux desde un punto de vista de aproximación en un entorno de un punto singular. Los desarrollos de Puiseux se obtienen mediante una técnica puramente algebraica (algoritmos de Newton-Puiseux) y permiten probar propiedades algebraicas (factorización, noetherianidad, teoremas de preparación y división de Weierstrass,...) del anillo de series convergentes en dos variables $\mathbf{C}\{x, y\}$.

12 Además del desarrollo en serie de Puiseux con coeficientes reales hay que considerar otras dos series con coeficientes complejos.

Bibliografía

Bos, H.J.M. (1981). <<On the Representation of curves in Descartes's Géométrie>>. *Archive for History of Exact Sciences*, 24, 295-338.

Bourbaki, N. (1976) *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad.

Cantoral, R.; Farfán, R.M. (1998). <<Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis>>. *Epsilon*, 42, 353-369.

Davis, P.; Hersh, R.(1988) *Experiencia Matemática*. Barcelona: Labor-MEC.

Descartes, R. (1981). *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Madrid: Alfaguara.

Frege, G. (1998) *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*. Madrid: Tecnos.

Gödel, K.: (1994) *Ensayos inéditos*. Barcelona: Mondadori.

Lakatos, I. (1983) *La metodología de los programas de investigación científica*. Madrid: Alianza Universidad.

Lakoff, G.; Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.

Lakoff, G.; Nuñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books.

Nuñez, R. (2000). <<Mathematical Idea Analysis: What Embodied Cognitive Science can say about the Human Nature of Mathematics>>, en T. Nakaora & M. Koyama (eds). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol 1, pp. 3-22). Hiroshima: Hiroshima University.

Omnès, R. (2000) *Filosofía de la ciencia contemporánea*. Barcelona: Idea Books.

Penrose, R. (1989) *La nueva mente del emperador*. Barcelona: Grijalbo Mondadori

Semple, J.G.; Kneebone, G.T. (1959). *Algebraic curves*. Londres: Oxford University Press.

Wittgenstein, L.: (1987). Observaciones sobre los fundamentos de matemáticas. Madrid: Alianza Editorial.