ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 13 No. 2 agosto 2001
78-97

De la herramienta al instrumento: una perspectiva informática

Fecha de recepción: Mayo, 2001

Luis Enrique Moreno Armella
CINVESTAV
Departamento de Matemática Educativa, México
lmorenoa@data.net.mx
Luz Manuel Santos Trigo
CINVESTAV
Departamento de Matemática Educativa, México
msantos@mail.cinvestav.mx

Resumen: *En este artículo presentamos una investigación acerca del papel de los instrumentos informáticos en la educación matemática. Nos proponemos, mediante la tematización de los proceso de amplificación y reorganización de los instrumentos computacionales, señalar un camino hacia la articulación de las tecnologías informáticas al curriculum. Las reflexiones presentadas adquieren sustancia a través de los ejemplos diseñados en un ambiente de geometría dinámica. Finalizamos con un examen del proceso de abstracción mediado por la noción de dominio de abstracción que permite concebir la abstracción no como un proceso de resta, de extracción sino como un proceso de adición más de acuerdo con las concepciones contemporáneas sobre el aprendizaje escolar.*

Abstract: *In this paper, we discuss a research project about the role of computational instruments for mathematics education. The discussion takes place through the ideas of amplification and reorganization of computational tools and their place in a new curriculum. We illustrate the general case using Dynamic Geometry as an example. At the end, we examine the abstraction process as mediated by the notion of abstraction domain. This approach allows to see abstraction as an additive process instead of a substraction process. A viewpoint that is in agreement with contemporary learning theory.*

1. Introducción. La tecnología en el sistema educativo

Durante los últimos años, las tecnologías informáticas han ido ganando terreno en los sistemas educativos. Estos recursos informáticos incluyen, de manera sustancial, las calculadoras con capacidad de graficación y más recientemente las "calculadoras algebraicas" como la TI-92 —llamadas así porque traen incorporado un software que permite la manipulación algebraica de expresiones matemáticas.

Dado el énfasis en los medios de comunicación actuales sobre el hecho de que vivimos una época de información y conocimiento —a nadie extraña ya la expresión "sociedad del conocimiento"— la presencia de los instrumentos computacionales electrónicos, en los salones de clase, suscita reacciones vivas de aceptación y rechazo.

Tales reacciones están articuladas, conceptualmente, a las visiones que hemos ido construyendo sobre el mundo contemporáneo.

Las computadoras se han tornado herramientas ubicuas. Están en los torneos de ajedrez, en cualquier oficina pública y, cada vez más, como ya mencionamos, en los salones de clase.

La manipulación de los objetos matemáticos se ve enriquecida por los auxilios que prestan los instrumentos computacionales. Por ejemplo, la manipulación de las figuras de la geometría euclidiana mediante el Cabri, software de geometría dinámica que viene incorporado a la calculadora TI-92, hace viable que dichos objetos lleguen a ser más familiares para los estudiantes y con ello se contribuye a la apropiación de las nociones matemáticas correspondientes. La importancia de estos instrumentos, para la educación, está asociada a la *capacidad expresiva* que otorgan a los estudiantes. Todo ello hace pensar en la conveniencia de articular una reflexión sobre las maneras en que los entornos computacionales funcionan como *instrumentos de mediación* (Kozulin, 1994) para la construcción de los conceptos matemáticos. Ese es el propósito de lo que presentamos a continuación.

Las herramientas a nuestra disposición informan al conocimiento que podamos construír con ellas. Son *recursos estructurantes* al servicio del estudiante. En el caso particular de las calculadoras hay que estar concientes de que, en sí mismas, son instrumentos matemáticos (el software incorporado en la calculadora representa una gran cantidad de conocimiento matemático) y por eso, cuando los estudiantes trabajan con dichas calculadoras, éstas pueden contribuir a generar modificaciones profundas en su conocimiento matemático.

La investigación en este campo, reconoce las siguientes preguntas como orientadoras:

- ¿Cómo se apropian los estudiantes de este tipo de herramienta cognitiva?
- ¿Cómo y por qué el uso de estas herramientas contribuye al aprendizaje de las matemáticas?

  (En particular habría que referirse a teorías psicológicas de la instrumentación.)
- ¿Cómo usan los profesores estas tecnologías?

La experiencia nos ha enseñado que a los profesores les toma tiempo diseñar nuevas tareas que hagan uso integral de las tecnologías computacionales. Pero vale la pena el esfuerzo pues estos instrumentos tienen el potencial de modificar nuestros enfoques de enseñanza ya que permiten incorporar la exploración de problemas mediante la modificación de hipótesis, por ejemplo, a las tareas de los estudiantes. Si graficamos una función polinómica, por ejemplo, los recursos sintácticos de la calculadora nos permiten ir variando los coeficientes para entender la influencia que dichos coeficientes tienen sobre la forma genérica de la gráfica. Este tipo de actividades facilita la convergencia entre actividades de *exploración* y actividades de *sistematización* que son propias, estas últimas, de la organización formalizada de las matemáticas.

2. Amplificación y reorganización

Las nuevas calculadoras incorporan, además de los sistemas de representación numérico y gráfico, un sistema de manipulación algebraica. Esto implica que, además de manipular expresiones numéricas y graficar funciones, también se puede manipular expresiones algebraicas. Por ejemplo, factorizar polinomios, hallar la función derivada de una función y su antiderivada, hallar la expresión en fracciones parciales de una función racional etc. Un instrumento de esta naturaleza abre la posibilidad de estudiar un problema matemático desde distintos puntos de vista: numérico, gráfico y algebraico. Más interesante aún es el hecho que dicho problema puede ser estudiado, de manera articulada, *desde esos tres puntos de vista,* contribuyendo así a establecer nuevas relaciones entre las representaciones en juego y a una mayor elaboración conceptual de los conceptos matemáticos bajo estudio.

No es extraño pues, que dichas calculadoras hayan resultado de interés para la comunidad de investigadores y educadores preocupados por entender la articulación:

Curriculum ⟷ tecnologías informáticas

En una primera etapa habrá que trabajar dentro de las fronteras de un curriculum ya existente, introduciendo en él la tecnología. Entonces, sólo cabe esperar que dicha introducción permita, en términos generales, hacer mejor *lo que ya sabíamos hacer* sin dicha tecnología. Pero las innovaciones exitosas tienen la capacidad de "erosionar" los curricula tradicionales. Esto nos permite hablar de una segunda etapa en la cual el papel de la tecnología ya no es sólo de *amplificación* sino de *re-organización* curricular. Por ejemplo, el re-diseño de las estrategias de resolución de problemas.

Expliquemos la diferencia entre la amplificación y la re-organización mediante una analogía. Una lupa deja ver, amplificado, aquello que podía ser percibido a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto que vemos. Pensemos ahora en un microscopio. Con el microscopio podemos ver lo que no era posible ver sin dicho instrumento. Entramos entonces a un nuevo estrato de la realidad física. Se abre la posibilidad de estudiar algo nuevo y con ello, acceder a un conocimiento nuevo. Podemos pensar en la amplificación y la re-organización inducidas por el uso de una calculadora, en términos parecidos. Es un instrumento cuyas diversas maneras de emplearlo lo re-definen como *otro* instrumento.

En términos cognitivos, el instrumento queda definido por su empleo más que por su "estructura intrínseca". Hablar de la complejidad del instrumento tiene que ver principalmente con el uso que hagamos de él. Más precisamente, lo complejo es *la relación* que establezcamos con el instrumento.

La manipulación de los objetos matemáticos mediante los instrumentos computacionales, los hace tangibles y, quizá con ello, contribuya a facilitar la construcción del sentido de los objetos matemáticos bajo estudio. La importancia de los instrumentos para la educación está asociada a su capacidad de ofrecer medios de expresión matemática.

3. La mediación instrumental en el contexto educativo

Consideremos un telescopio y un lápiz. La actividad del astrónomo necesita, ineludiblemente, un telescopio; para escribir también necesitamos, ineludiblemente, un lápiz, o una máquina de escribir, o una computadora con un procesador de textos. Una aclaración: estamos usando el término "actividad" como sinónimo de un conjunto organizado de acciones voluntarias que tienen una meta bien definida.

Si continuamos esta reflexión sobre la actividad, llegaremos a una conclusión de la mayor importancia:

Toda actividad cognitiva es una actividad mediada por instrumentos.

En los ejemplos precedentes, los instrumentos son materiales, excepto en el ejemplo de la escritura, en donde además del lápiz o la máquina, el alfabeto figura como un instrumento de mediación para la acción de escribir. Es un ejemplo clásico de instrumento de mediación simbólico (Kozulin, op.cit.). Por eso, la autoría de un texto es una *autoría mediada* por ese instrumento cultural constituído por el sistema de escritura. Si uno escribe un texto, debe reconocer que *los autores* del texto son: uno mismo (como escritor) y el sistema de escritura (instrumento de mediación) suministrado por la cultura, pues no es posible escribir prescindiendo de tal sistema. Si uno realiza una operación aritmética, los autores de ese cálculo aritmético son: uno mismo y el sistema numérico que utilizó.

Dado que toda actividad está mediada por un instrumento, este último tiene una influencia fundamental sobre la forma de articular las acciones de que se compone la actividad y de producir como consecuencia, *esquemas de acción* vinculados al instrumento mediador. Pensemos, por ejemplo, en un piano. El pianista ha necesitado de un esfuerzo intenso y prolongado para aprender a tocar ese instrumento. Su conocimiento no es independiente del instrumento. Uno no va a escuchar cantar al pianista: va a escucharlo tocar el piano.

Las herramientas, como instrumentos de mediación, han sido desarrolladas en distintos medios culturales y en diversos periodos históricos. *Son parte integral de las actividades humanas.*

En todos los casos, el conocimiento producido por una actividad, depende de los instrumentos de mediación que pongamos en juego para su realización.

Este enfoque sobre la actividad cognitiva ha recibido una atención creciente en los últimos años debido en parte a la presencia de los instrumentos computacionales en la educación. En este contexto, debe ser explícito que la actividad central es el aprendizaje.

Uno de los ejes curriculares, central en cualquier proyecto instruccional, lo constituye el *Pensamiento Geométrico.* Afortunadamente ha empezado a quedar atrás el estilo de enseñanza basado en la memorización de hechos aislados y se ha ido adoptando un enfoque que estimula y crea las condiciones para una comprensión más conceptual de los hechos geométricos. Para progresar en esta dirección hay que suministrarle al estudiante la oportunidad para construir un *medio expresivo* de sus ideas. Para ello, consideramos como deseables las siguientes acciones:

- *Exploraciones dinámicas de conjeturas.*
- *El uso de la actividad exploratoria como medio para el desarrollo de conceptos.*
- *Organizaciones (deductivas) de pequeñas colecciones de resultados.*

Debemos proponernos un empleo innovador de la tecnología, y esta innovación incluye un primer nivel de comprensión de un problema, a saber, el *visual,* pero acompañado de instrumentos de control que suministra el medio dinámico como son la *medición* y la *verificación de propiedades*. Esto es muy importante pues inicia el camino hacia la *sistematización* y *verificación* de los hechos geométricos; todo esto desemboca posteriormente en la construcción de demostraciones cada vez con mayor nivel de formalización.

4. Invisibilidad de las tecnologías

Hablaremos ahora de una característica de los instrumentos de mediación, a saber: *la invisibilidad* que adquieren tales instrumentos cuando los usuarios rebasan un cierto nivel de familiaridad con ellos. Estamos tan familiarizados con el sistema numérico que cuando efectuamos una multiplicación, no vemos ya el papel que juega la notación decimal. Nos parece que las operaciones realizadas son un ejemplo de acto intelectual "puro" que hemos efectuado con el recurso exclusivo de nuestro intelecto. Igual cuando leemos un texto, ya no somos concientes del papel del alfabeto. Diremos entonces que el sistema decimal y el alfabeto, (que son instrumentos simbólicos) se han hecho *invisibles*. Con el correr del tiempo, las tecnologías se tornan invisibles y las actividades que se generan a partir de ellas se conciben como actividades matemáticas per se, independientes de aquellas tecnologías. Entonces, surge la noción de una "actividad matemática pura" independiente de cualquier instrumento. Las destrezas con los cálculos aritméticos se ven como independientes de la herramienta y son "confundidos" con capacidades matemáticas "puras". Como si el sistema cognitivo estuviera blindado, como si fuera inmune a las herramientas *mediante* las cuales se desarrolla la actividad intelectual.

Insistamos: cuando una nueva tecnología hace su aparición (y no se ha hecho invisible todavía) es natural que su primer empleo sea como instrumento de refuerzo para realizar ciertos cálculos. Gradualmente vamos comprendiendo que el primer papel de esa tecnología es amplificar nuestro radio de acción. Pensemos, por ejemplo, la diferencia entre caminar y transportarse en bicicleta.

Ejemplo: Evaluar la integral de la función $f(x)=sen^3(x)$ entre 0 y π.
Utilizando la TI-92 Plus, obtenemos el valor de dicha integral:

$$(f(x), x, 0, \pi)=1.33333$$

hasta seis decimales. Con papel y lápiz la solución exige una destreza técnica considerable —nos referimos al conocimiento y destrezas de los estudiantes.

Un determinado problema puede tener a la integral anterior como un sub-problema, necesario para dar la respuesta a una pregunta principal. La calculadora sirve entonces como parte de la infraestructura que está a disposición del estudiante. Le auxilia en la amplificación real de sus capacidades de cálculo: le permite obtener de manera automática el cálculo de la integral y concentrarse en la solución del problema principal, digamos, un problema de modelación.

Las calculadoras con las cuatro operaciones aritméticas han servido para que no tengamos que realizar tediosas operaciones numéricas. Análogamente, las calculadoras más avanzadas (las algebraicas, las que poseen capacidades de procesamiento simbólico) nos sirven para evitar los cálculos engorrosos de integrales, como en el ejemplo anterior. En cierto momento del desarrollo intelectual de los estudiantes, el cálculo de estas integrales deja de ser parte esencial de su pensamiento matemático. Esto se debe a que ha ocurrido un cambio de tecnología (se ha pasado del papel y lápiz al empleo de la calculadora algebraica) y una habilidad, central en un nivel se torna auxiliar en el nuevo contexto. En los textos de las décadas pasadas, era frecuente hallar ejemplos que involucraban cálculos con logaritmos (el logaritmo de 123456) y funciones trigonométricas (el coseno de 47°). Los libros traían al final una reproducción de las tablas de logaritmos y de las tabulaciones de las funciones trigonométricas. Dichas tablas funcionaban como amplificadores. La llegada de las calculadoras científicas las hizo obsoletas: prácticamente no volvieron a aparecer en los libros. Los cálculos con "mantisas" y "características" por ejemplo, eran frecuentes en los cursos de trigonometría. En consecuencia, se dedicaba gran cantidad de tiempo a la adquisición de una destreza con la tabla de logaritmos. Pero, en el contexto de la época, estas destrezas eran valoradas en la escuela como *genuinas capacidades matemáticas*.

Los instrumentos informáticos como las calculadoras y las computadoras, tienen una característica que distingue a sus sistemas de representación de los sistemas escritos, a saber: *la posibilidad de procesar las representaciones*.

En cierto sentido, esta capacidad de procesamiento del sistema de representación equivale a una externalización de una función cognitiva. Conviene por tanto pensar en estas herramientas como parte de una *tecnología cognitiva*, pues ayudan a trascender las limitaciones de memoria y de cómputo que hasta ese momento eran características de la mente humana. Diremos que los nuevos sistemas de representación son *ejecutables*.

5. Una nueva relación alumno-tecnología

Si bien las tecnologías de papel y lápiz nos sirven para liberar la memoria, las tecnologías computacionales nos permiten ir más lejos: no sólo sirven para liberar la memoria (al funcionar como dispositivos de almacenamiento de la información) sino que, además, pueden realizar ciertas "funciones cognitivas" como factorizar un polinomio. Esto es muy importante: la capacidad de procesar matemáticamente información abre nuevas posibilidades para una nueva relación entre el estudiante y su calculadora. Insistamos en el ejemplo de la factorización. Supongamos que se quiere graficar un polinomio como

$$P(x)=2x^3+5x^2-13x-30$$

Al tener la gráfica del polinomio debemos poder extraer de allí información sustancial acerca del mismo. Por ejemplo, conocer dónde intersecta la gráfica del polinomio al eje de las abscisas. Utilizando la TI-92 y aplicando la herramienta **Factor**, obtenemos:

$$\text{Factor}(2x^3+5x^2-13x-30)=(x+2)(x+3)(2x-5)$$

La expresión factorizada arroja de inmediato la información que se necesita para conocer las raíces del polinomio.

Esto es un pequeño ejemplo de *asociación inteligente* entre el estudiante y la tecnología a su disposición.

Las tradiciones escolares han ayudado a perpetuar la siguiente idea:

la inteligencia es algo que reside enteramente en el intelecto "puro" del individuo

Frente a una nueva etapa tecnológica que nos ha dado *sistemas de representación procesables*, esa concepción de inteligencia representa un obstáculo para imaginar nuevas formas de empleo de las nuevas tecnologías en nuestros sistemas educativos.

Por ejemplo, un estudiante dotado de una calculadora graficadora tiene el potencial de desarrollar nuevos métodos, nuevas estrategias de graficación, sacando partido de las capacidades de procesamiento de graficación de su calculadora. Es importante que esas capacidades sean valoradas en la escuela mediante un nuevo diseño curricular menos centrado en contenidos específicos y más orientado hacia el desarrollo de las habilidades cognitivas de los estudiantes.

La sinergia que puede establecerse, capacitaría al estudiante para trabajar a un nivel de complejidad matemática que puede ser totalmente inalcanzable sin dicha tecnología. Imaginando al estudiante con su calculadora como un sistema inseparable y aceptando que la actividad de este sistema es una forma legítima de actividad matemática, entonces la evaluación de lo que constituye "inteligencia matemática" debe incluir la evaluación de tal sistema. Cuando admiramos lo que hace un ciclista estamos admirando el desempeño de la sociedad que él constituye con su instrumento de mediación: la bicicleta.

Estimamos crucial que los profesores comprendan estas ideas y contribuyan al florecimiento de esa sinergia entre el estudiante y la tecnología (Rabardel, 1995). Miremos ahora esta asociación desde otro ángulo.

6. La calculadora: un nuevo socio cognitivo

La calculadora se puede concebir como un sistema cognitivo con el que tenemos oportunidad de comunicarnos y de colaborar para la solución de ciertos problemas. Es un instrumento que ofrece la oportunidad para construir nuevos significados ya que permite ver los objetos matemáticos como *manipulables* y en consecuencia abre la posibilidad de actuar sobre ellos. No es casual entonces que muchos investigadores hayan considerado que el impacto epistemológico basado, en gran medida, en la reificación de objetos y relaciones matemáticas haya sido el principal rasgo, hasta ahora, de la presencia de las nuevas tecnologías en el sistema educativo (Balacheff&Kaput, 1996).

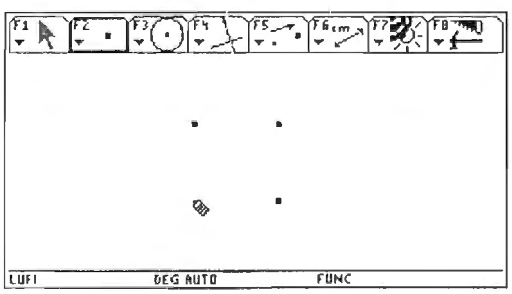
El carácter estático que poseen los sistemas de representación tradicionales desaparece con *las representaciones ejecutables*, que nos permiten actuar directamente sobre ellas. La nueva vida que cobran los objetos matemáticos, cuando se les define en un entorno computacional, es especialmente palpable en los ambientes de geometría dinámica.

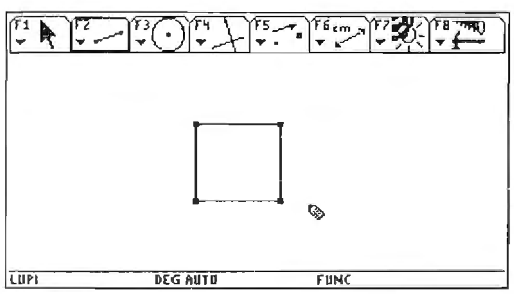
7. Construcciones dinámicas: del dibujo al objeto geométrico

La naturaleza de los dibujos que se hacen en un entorno de geometría dinámica es diferente a los que hacemos con papel y lápiz. La construcción de un *Cabri-dibujo*, por ejemplo, se hace mediante la utilización de las cajas de herramientas para crear elementos geométricos básicos como puntos, rectas o circunferencias, y otras construcciones que se sostienen sobre estas, como rectas perpendiculares, simetrías, etc. Pero la cualidad más rica de este ambiente es la posibilidad de transformar de manera continua las construcciones creadas mediante la opción de **arrastre de una figura** (*dragging*).

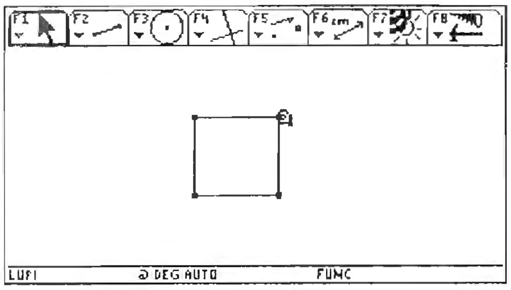
Con esta característica se puede establecer una manera de medir la bondad de una construcción en un entorno dinámico como Cabri, según si ese arrastre conserva las propiedades matemáticas de dicha construcción o si, por el contrario, dichas propiedades se pierden (Laborde, 1995). Tomemos com ejemplo la construcción de un cuadrado en un ambiente de geometría dinámica:

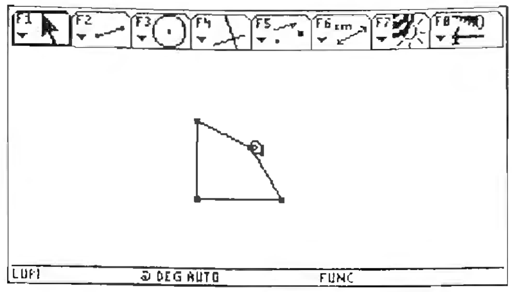
Una primera opción podría ser señalar cuatro puntos y trazar los segmentos que los unen:





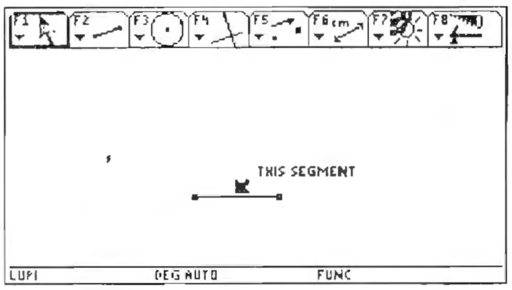
Pero aunque la construcción parezca correcta, cuando sometemos esta figura a la prueba de arrastre, vemos que la propiedad "ser cuadrado" no se mantiene:

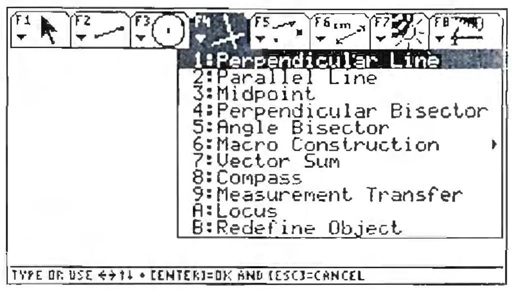




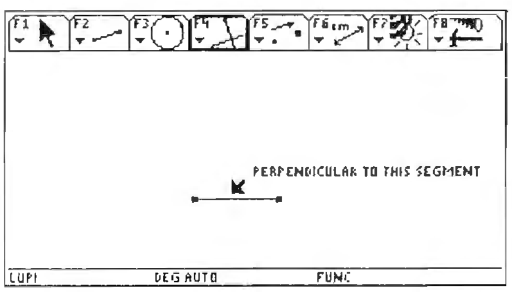
Realizar actividades de este tipo tiene un gran potencial educativo pues permite que la exploración de los estudiantes se circunscriba a las propiedades que definen y caracterizan los (nuevos) objetos matemáticos. Sigamos con el ejemplo del cuadrado, y realicemos la construcción con regla y compás dinámicos:

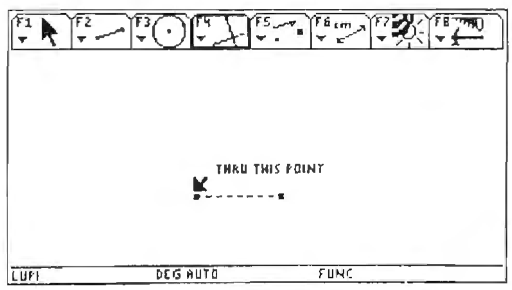
Partimos de dos puntos y del segmento que los une, que será el lado de nuestro cuadrado. Como los lados adyacentes de un cuadrado son perpendiculares entre sí, utilizaremos la herramienta para construir rectas perpendiculares:

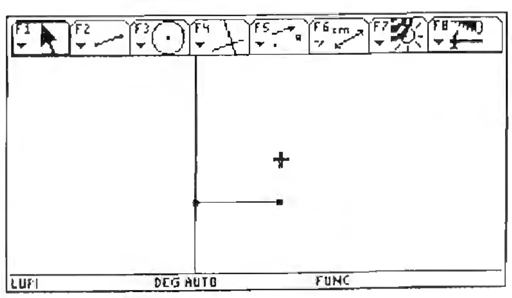




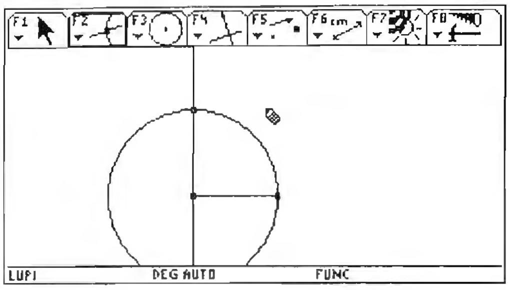
Para usar este comando, es necesario indicarle a la máquina con respecto a qué será perpendicular la recta, y por dónde queremos que pase:

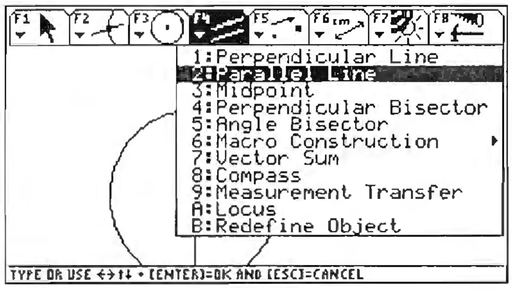


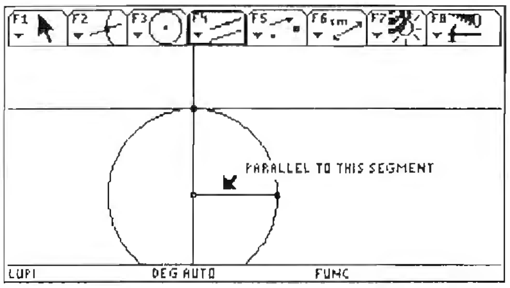


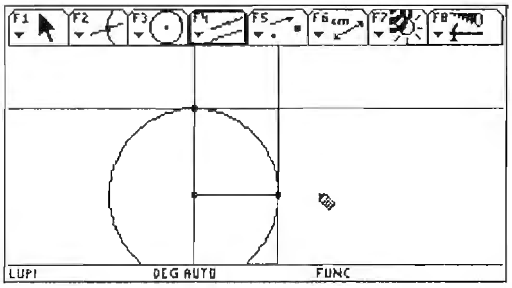


Ahora debemos trasladar la medida de nuestro segmento inicial a la recta para garantizar que los dos primero lados midan lo mismo. Para esta operación podemos usar una circunferencia. A continuación trazaremos una recta paralela al segmento que pase por el punto de intersección de esa circunferencia con la primera recta, y una tercera que defina el último de los lados:

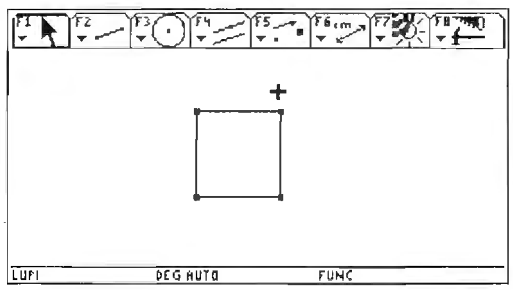


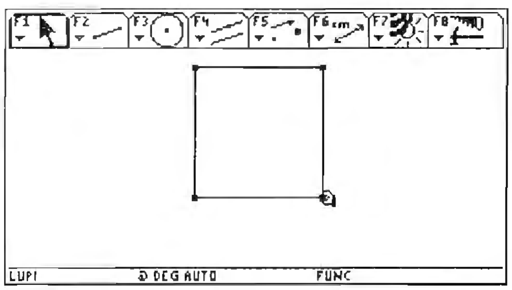


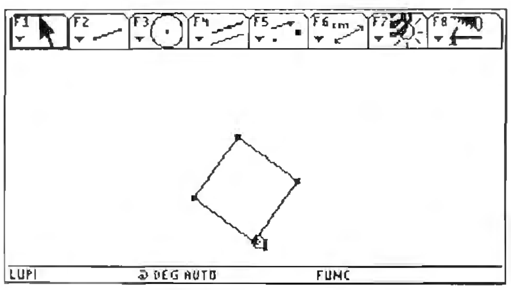




Finalmente, podemos *ocultar* las rectas y el círculo y quedarnos con los cuatro puntos. Si los unimos con segmentos y realizamos la misma operación de deformación, observaremos cómo esta vez la propiedad de ser cuadrado se mantiene: "ser cuadrado" es una propiedad invariante:





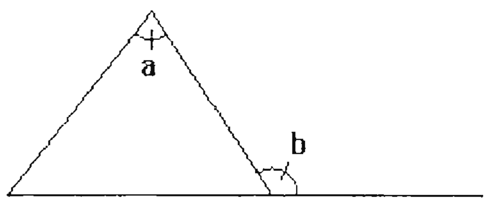


Esta capacidad de arrastre favorece la búsqueda de propiedades de la figura, así construida, que permanecen "vivas" durante la deformación a la que sometemos a la figura original. Estas son las propiedades geométricas *genuinas*. El *objeto geométrico* queda definido entonces por dichas propiedades. Hay una ganancia didáctica inmediasta: quien explora en un ambiente dinámico, tiene a mano un instrumento para reconocer patrones de comportamiento invariantes. Ello puede conducir a consolidar, un conocimiento matemático en construcción.

Otras rasgo característico del medio dinámico lo constituye la posibilidad de *exteriorizar* el lugar geométrico definido mediante una propiedad. Por ejemplo, sirve para abordar problemas del tipo: ¿cuál es el lugar geométrico que describe un punto cuando....?

Pero no se agotan aquí los recursos de un entorno dinámico. También se tiene la posibilidad, de representar la huella que deja un punto u otro objeto geométrico al irse desplazando. Estas características, entre muchas otras, nos van a permitir una exploración más a fondo que la que es posible con la regla y el compás clásicos: nuestro plano geométrico tendrá movimiento; los puntos dejarán huella al desplazarse: se podrá exteriorizar el lugar geométrico de los puntos que satisfacen determinada propiedad. Y sobretodo, podremos visualizar una propiedad invariante bajo las deformaciones que se hagan mediante el arrastre.

La distinción insuficiente entre un dibujo y el objeto geométrico que dicho dibujo representa, ha sido explorada como una de las fuentes de inhibición del desarrollo del pensamiento geométrico. Por ejemplo, al tratar de explicar que un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los ángulos interiores no adyacentes, el profesor -con inusitada frecuencia- se apoya en un dibujo como el siguiente:

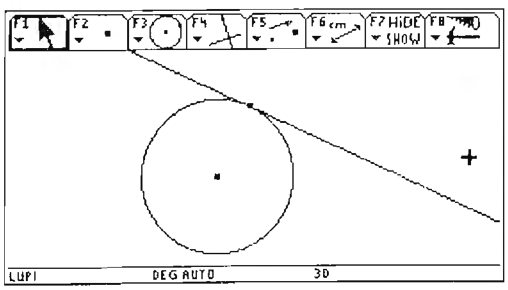


Se trata de probar que $a < b$. Después de quedar perplejo al escuchar a su profesor, el estudiante se pregunta: ¿no es obvio que ***a es menor que b***, dado que a es un ángulo agudo y b uno obtuso?

El estudiante no capta la generalidad del argumento del profesor y el profesor no siempre es consciente del "ruido" que ese dibujo introduce a su argumento.

En términos generales, entonces, un medio dinámico como Cabri, nos permite seguir la ruta que ejemplifica la siguiente situación hipotética:

Entramos al salón de estudio y vemos en la pantalla de la computadora de un estudiante la siguiente figura:



Si nos limitamos a consideraciones visuales, exclusivamente, diremos que la recta es tangente a la figura ("parece" que sólo la toca en un punto). Pero ¿acaso ese hecho visual es un hecho geométrico?

Debemos comprobar que lo que vemos en la pantalla es una relación entre la circunferencia y la recta que no se destruye, al modificar mediante el arrastre, a la circunferencia o a la recta. Podemos modificar la posición de la circunferencia arrastrándola por su centro. Al hacerlo, observamos que se "despega" de la recta, con lo cual comprobamos que la situación ilustrada en el dibujo anterior era sólo aparente: no se había llegado a ella como resultado de una construcción geométrica, sino tan sólo acercando entre sí los dos objetos geométricos considerados.

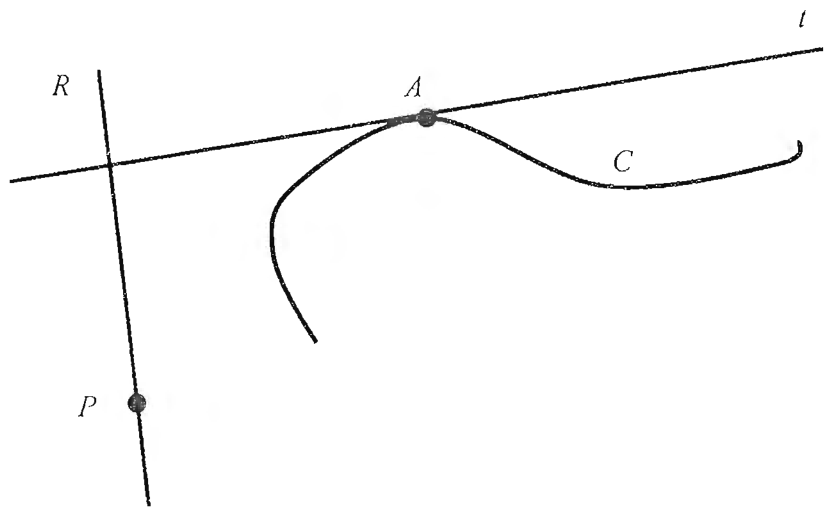
Cuando la recta es tangente, la relación de tangencia no se puede destruir modificando la figura. Esto, que podemos implementar en el medio geométrico propio de Cabri, contiene el criterio fundamental para distinguir entre "dibujo" y "objeto geométrico" sobre el cual consideramos necesario insistir: *un hecho geométrico es tal, cuando es capaz de pasar el test del arrastre.*

9. Lugares geométricos y curvas notables de la geometría

La geometría dinámica cambia la forma de enseñanza de la geometría. Tanto la práctica educativa como la investigación, han reconocido que la nueva forma de exploración geométrica es diferente a la que se puede llevar a cabo mediante los instrumentos clásicos, regla y compás y el razonamiento "basado en figuras mal dibujadas". No son diferencias de apariencia: son diferencias de fondo.

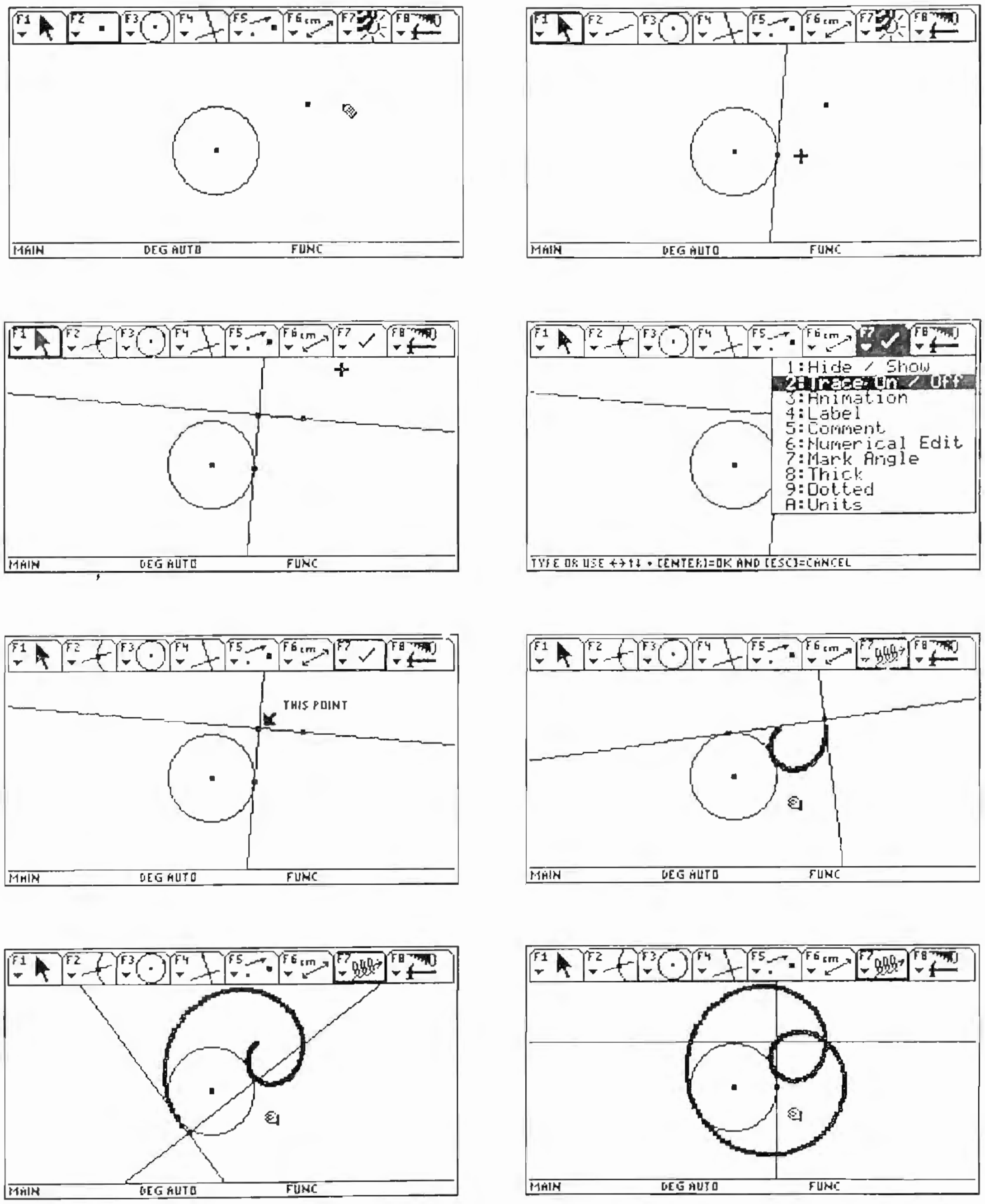
¿Cómo hacer viable la nueva forma (dinámica) de enseñar geometría? A continuación presentamos, esquemáticamente, una estrategia que consideramos posible: *mediante la construcción de curvas como lugares geométricos.*

La dificultad de materializar la graficación a partir de la descripción sintética del lugar geométrico correspondiente, hace que no se aproveche la oportunidad de articular dicha descripción sintética con su traducción visuográfica. Mostraremos ahora cómo pueden llevarse a cabo tales construcciones, dentro del entorno Cabri. Empecemos recordando la definición de *curva pedal.*

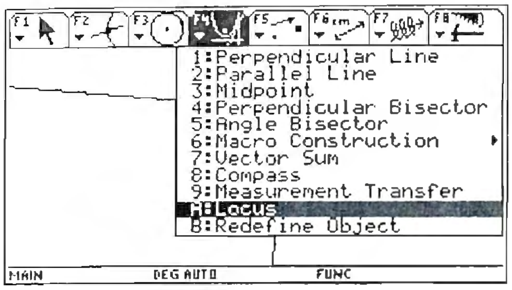


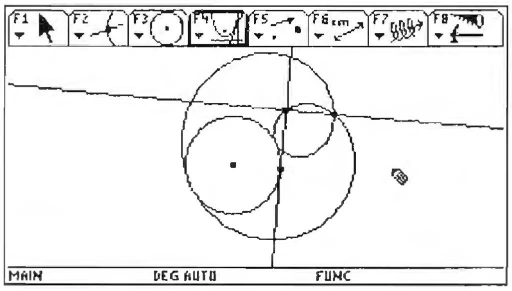
Tomemos una curva C cualquiera y un punto P en el plano. Por un punto A de la curva trazamos la tangente (t) correspondiente a la misma, y desde P trazamos la perpendicular s a la recta t. La curva pedal asociada a la curva C y al punto P es aquella descrita por el punto de intersección R de las rectas t y s cuando el punto de tangencia A se desplaza sobre la curva C.

Tomemos como curva C una circunferencia y un punto exterior a ella P. La siguiente secuencia de imágenes (leídas de izquierda a derecha y de arriba a abajo) ilustra la construcción en Cabri de la curva pedal asociada a C y P. Usando el comando *Trace* para que el punto de intersección R deje su rastro el moverse, y moviendo el punto A de la circunferencia, obtenemos la curva deseada que, en este caso, es el *Caracol de Pascal*::

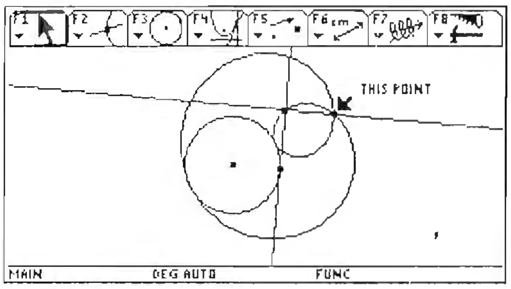


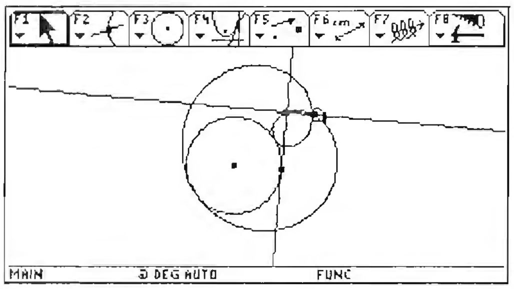
Otra opción es usar el comando *Locus* del menú F4 de la TI-92 para hallar el lugar geométrico de forma automática:

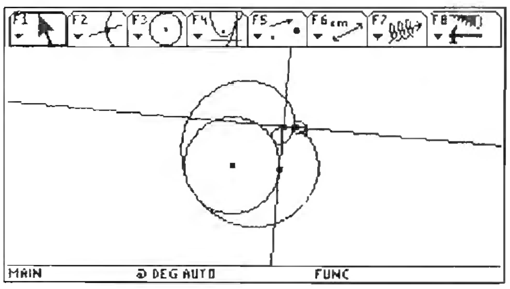


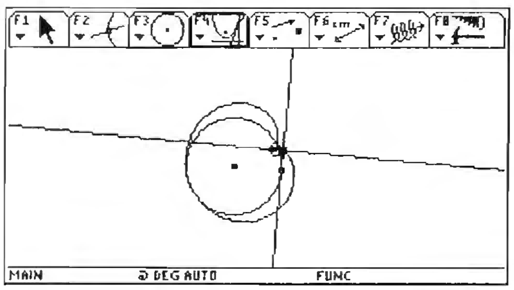


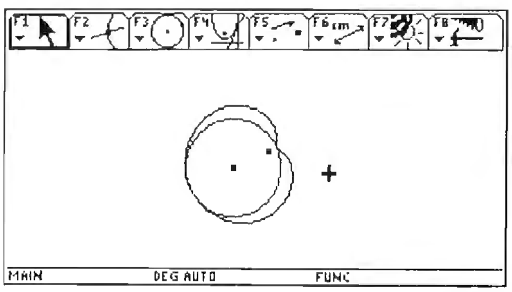
Sin embargo, este recurso no permite *ver* la construcción de la curva cuando se desplaza manualmente el punto de tangencia. Hay que distinguir entre las posibilidades intrínsecas de los recursos computacionales a disposición del estudiante. En este caso, obtener la curva pedal mediante Locus, permite ver cómo este Caracol de Pascal se convierte en una *Cardioide* cuando alejamos el punto exterior de la circunferencia, o cuando lo situamos en el interior de ésta:





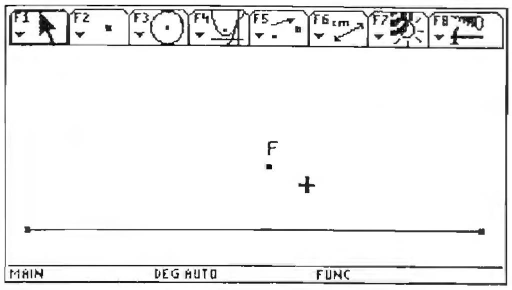




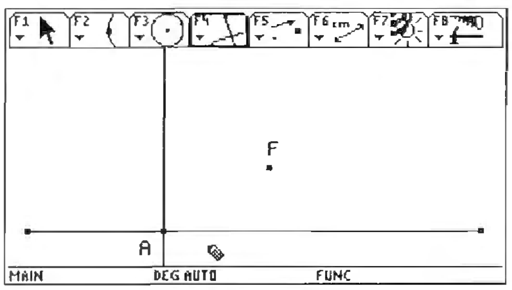


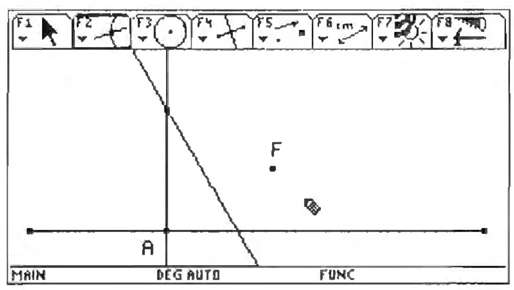
Consideramos que estos acercamientos constituyen no sólo una actividad de gran atractivo geométrico sino que además pueden hacer ver a los estudiantes las relaciones existentes entre objetos geométricos que, generalmente, se estudian de manera aislada. Si quisiéramos hallar las curvas pedales asociadas a las cónicas, un paso previo sería construir tales cónicas, para lo cual emplearemos su definición como lugar geométrico. Comencemos con la parábola.

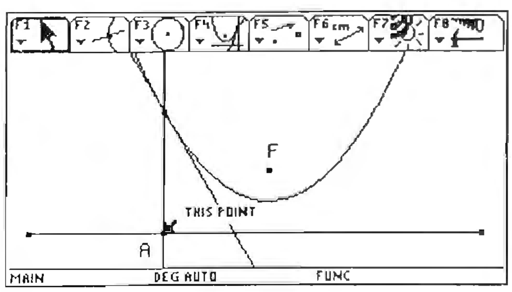
La *parábola* se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado *foco* y de una recta llamada *directriz*. Por la limitación de las dimensiones de la pantalla de la calculadora, nuestra directriz será un segmento, y notaremos con F el foco de la parábola:



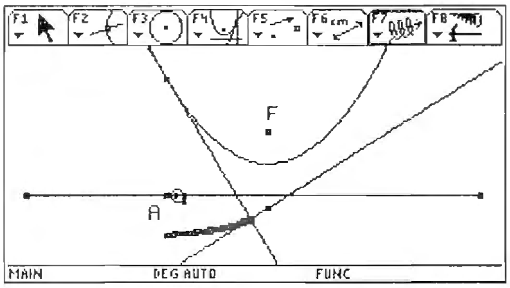
Seleccionamos un punto arbitrario A en el segmento, y trazamos por él una perpendicular al mismo. Como el punto A se puede desplazar a lo largo de nuestra directriz, lo que hay que hallar son los puntos que equidistan de F y de A, y esos son los que se encuentran en la mediatriz del segmento que une ambos puntos. En el menú F4 de la calculadora hallamos el comando necesario para tal construcción. Si a continuación calculamos el lugar geométrico del punto que es intersección de esta mediatriz con la perpendicular a la directriz que pasa por F, obtenemos la parábola deseada:

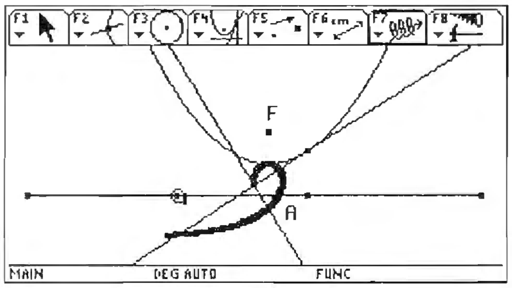


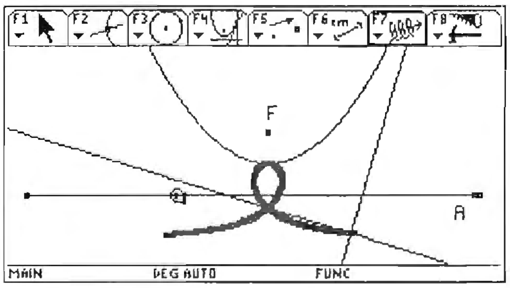




Pero esta construcción nos reporta algo más, y es que la mediatriz que usamos para crear la parábola, es la tangente a dicha parábola en cada uno de sus puntos, por lo que podemos usarla para hallar la curva pedal asociada a la parábola por un punto exterior a ella. Si elegimos el vértice de la parábola como punto P encontraremos que la curva pedal correspondiente es la llamada *hoja de Descartes*:





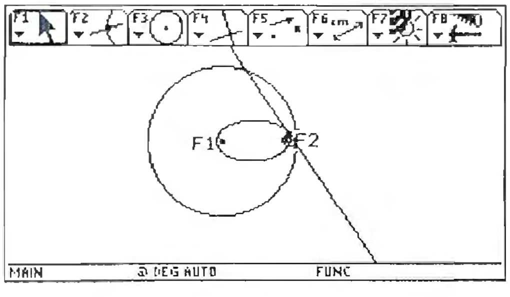


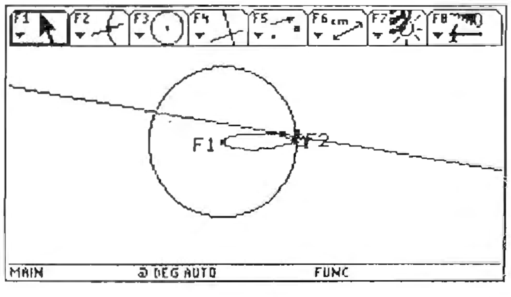
La *elipse* se define como el lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos, llamados focos de la elipse, se mantiene constante. Para realizar esta construcción en la TI-92, tomaremos una circunferencia y un punto interior a ella. Ese punto (*F2*), y el centro de la circunferencia serán los dos focos de la elipse. Señalamos un punto arbitrario en la circunferencia, y trazamos la mediatriz del segmento que une este punto con el foco *F2*. El punto de intersección de esta mediatriz con el radio que une el centro de la circunferencia con el punto que situamos en ella, define la elipse cuando éste se mueve a lo largo de la circunferencia. De nuevo, la mediatriz del segmento es la tangente a la elipse. El lector atento podrá comprobar que la curva pedal asociada a la elipse coincide con la hallada para la circunferencia

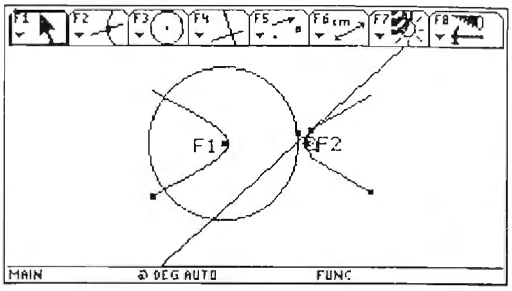
Una pregunta interesante es:

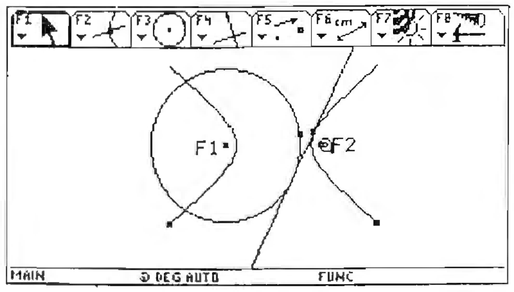
¿qué pasa con esa elipse cuando el foco *F2* se desplaza?

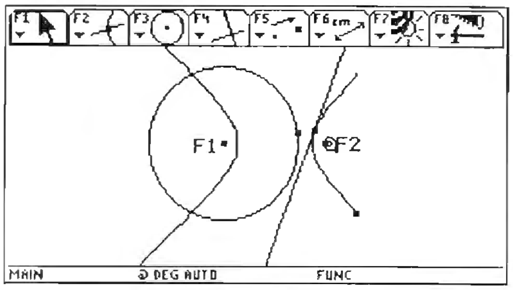
Si hacemos coincidir los dos focos, observamos cómo la elipse se convierte en circunferencia, mientras que si arrastramos F2 hacia el exterior de la circunferencia original, la elipse se transforma en una hipérbola (véase la secuencia siguiente).

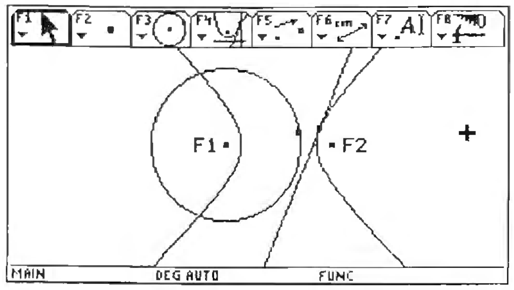




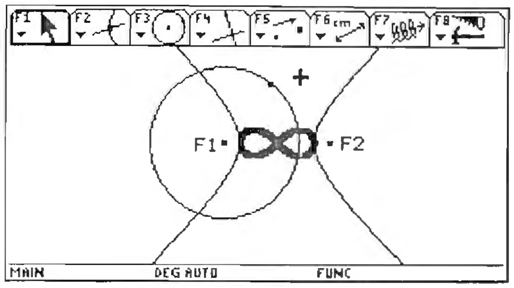








En este caso, podemos crear la curva pedal asociada a la hipérbola apoyándonos en la tangente que nos suministra la construcción realizada. Encontramos especialmente interesante el caso cuando el punto exterior a la hipérbola sobre el que construimos la curva pedal, es justamente el punto medio entre los dos focos: Aparece la *Lemniscata de Bernoulli*:



Estas actividades dan idea del gran poder que poseen estos ambientes de geometría dinámica para consolidar y transformar el conocimiento matemático de los estudiantes, así como para crear nuevas relaciones entre las piezas de conocimiento ya existentes. No sólo podemos realizar las mismas tareas que se hacen con papel y lápiz, sino que además ampliamos substancialmente el horizonte de la creación geométrica en el salón de clases.

8. El problema de la abstracción en contextos educativos

El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas nos enfrenta, entre otros, al siguiente problema: cómo tratar, en los contextos educativos, con la naturaleza descontextualizada de las proposiciones matemáticas. Estas forman parte de una cultura matemática que podemos considerar como universal. Al mismo tiempo, hay que admitir que el conocimiento que un estudiante construye, produce, asimila, se da siempre *mediado por un contexto*.

El desarrollo de las ciencias muestra que a medida que sube el nivel de organización de una disciplina, sus enunciados tienden a ser generales y descontextualizados. Para ilustrarlo, basta recordar algunos ejemplos: la ley universal de la gravitación, en la física; el teorema de Pitágoras; la fórmula general para resolver cualquier ecuación de segundo grado; el principio de selección natural.

En la introducción de sus *Fundamentos de la Geometría (1899)*, Hilbert fué muy claro al decir que el significado de los puntos, de las líneas y de los planos es algo que está determinado por las *relaciones* que podemos establecer entre ellos. De esta manera, los postulados de la geometría pueden interpretarse como *definiciones implícitas* de los objetos geométricos. Este punto de vista ha tenido, y sigue teniendo, un éxito enorme en el desarrollo de las matemáticas. Se ha convertido en un ideal el poder lograr una presentación formal de una rama del conocimiento. Entre otras cosas, es un *ideal de simplicidad*. Esta forma de abstracción, puesta a consideración de modo tan persuasivo por Hilbert, ha tenido mucho éxito en las presentaciones organizadas de las matemáticas que toman el ideal de simplicidad como su meta a alcanzar. Sin embargo, desde el punto de vista educativo, las dificultades se hacen evidentes si identificamos ese propósito de sistematización de la matemática en sí, como un principio didáctico.

La demanda cognitiva que estaríamos haciendo a un estudiante, si de entrada lo enfrentamos al aprendizaje de la geometría introduciendo la materia con un nivel de formalización elevado, es enorme. Estaríamos suponiendo (aunque de esto no fuésemos concientes) que la cognición del estudiante se adapta de modo natural, al camino ya organizado de una disciplina. Como si los procesos cognitivos adoptaran la forma de la organización formal, así como un líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene. Esto ha sido una tentación permanente pues, de ser factible, representaría un ahorro considerable de esfuerzo. Los problemas curriculares, por ejemplo, estarían resueltos a través de la formalización de la matemática.

Pensemos en las circunstancias del aprendizaje en un salón de clases. Para los estudiantes es un obstáculo poder pasar de los dibujos de triángulos particulares a *el triángulo* como objeto geométrico al cual se refieren los teoremas de la geometría. Si la enseñanza de las matemática pretende partir de los enunciados generales, entonces ¿cómo "inyectar" significado en estos enunciados generales, para beneficio de los estudiantes?

La experiencia ha mostrado que el camino de lo general a lo particular está plagado de dificultades. Pero tampoco es posible acceder a los enunciados generales, a los conceptos de una ciencia siguiendo un camino estrictamente inductivo. Las ciencias no son resultado exclusivo de la inducción. Hay una tensión permanente entre el polo inductivo y el polo deductivo que se traduce, para la didáctica, en la tensión entre la exploración sobre un terreno concreto y la necesidad de la sistematización.

La didáctica tiene que respetar la epistemología de las ciencias. Esto quiere decir, refiriéndonos a las matemáticas, que la didáctica no puede construirse al margen de nuestras concepciones sobre lo que es el conocimiento matemático.

En resumen: porque la cognición tiene una naturaleza situada, la didáctica no puede elegir el camino de lo general a lo particular, en sentido estricto, como única estrategia didáctica. Por la otra parte, porque la ciencia no es resultado de un exclusivo proceso inductivo, tampoco puede adoptarse el camino de lo particular a lo general como única estrategia didáctica.

Entonces, ¿qué camino elegir? La construcción de una respuesta a este interrogante pasa por un análisis de lo particular y lo general, de lo concreto y lo abstracto en los contextos educativos. Iniciaremos la construcción de una respuesta en la siguiente sección.

9. Dominios de abstracción

La breve referencia al ideal formalista de Hilbert puede reformularse así: el significado de los enunciados y de los conceptos del cuerpo teórico, surge de las relaciones entre ellos y no ya de las relaciones entre un concepto, digamos, y la realidad que refleja. Sólo importa la lógica interna del sistema al margen de los significados "intuitivos" que podamos asociar a los términos.

La manera usual como entendemos la naturaleza abstracta de la matemática proviene de este enfoque. La didáctica tiene que hacer posible que los estudiantes puedan acceder a estos niveles de complejidad sin descuidar la naturaleza situada del conocimiento (Noss&Hoyles, 1996).

La clave parece estar en imaginar una forma de abstracción que esté más cerca de lo que ocurre realmente en términos cognitivos y que no contradiga, sino que complemente, la noción clásica de abstracción. La noción clásica se fija en la idea de *extracción*. Pero también debemos tomar en cuenta la idea de *re-organización* a un nivel superior, de aquello que ya se había aprendido. Esto es posible si logramos generar redes de significación entre diversas ideas que en determinado momento se nos aparecen como desconectadas.

Los significados extra-matemáticos de una situación se derivan de un escenario que incluye la experiencia previa de quien aprende. Entonces, los recursos que el medio pone a disposición de un estudiante estimulan la construcción de significados. El medio funciona como un soporte para el establecimiento de conexiones entre fragmentos de conocimiento. Desde esta perspectiva, se trata entonces de conectar el conocimiento informal del estudiante con sus fragmentos de conocimiento matemático. En un sentido que puede hacerse más preciso, el medio funciona como una especie de *dominio de abstracción*.

El'trabajo de Nunes et al. (1993), sobre las estrategias aritméticas de los oficios, muestra cómo lo general puede existir dentro de lo particular. Cómo las prácticas de las matemáticas de los oficios pueden servir para expresar relaciones matemáticas más generales. Cómo las semillas de lo abstracto se generan en nuestras interacciones con lo concreto. Esas relaciones matemáticas más generales que todavía dependen del medio de expresión empleado, son ejemplos de *abstracciones situadas*.

Utilizando los *recursos estructurantes del medio*, se abre la posibilidad de que puedan establecerse conexiones entre distintos fragmentos de conocimiento y a partir de allí, producir versiones más generales, de una proposición, de una definición. En otras palabras, *abstracciones* en el sentido clásico del término. Para un topólogo, un espacio de Hausdorff, que evidentemente es abstracto, puede ser al mismo tiempo, tan concreto como una guayaba.

Lo abstracto y lo concreto no son, en consecuencia, propiedades del objeto de conocimiento sino *de la relación* que uno logra establecer con el objeto de conocimiento (Noss&Hoyles, op.cit.).

Los medios computacionales funcionan como recursos de la exploración matemática de los estudiantes. Ayudan a generar ideas que se expresan a través del medio. Para el didacta es fundamental entender que dichas ideas están íntimamente vinculadas al medio y articuladas a él. Es en ese sentido que el medio contituye un *dominio de abstracción*: plataforma de lanzamiento de los posteriores y necesarios procesos de sistematización.

En efecto, dentro de un dominio de abstracción es posible desencadenar una exploración sistemática y construir argumentos a favor de una proposición que si bien no constituyen una demostración formal, sí contituyen, en el interior del dominio de abstracción correspondiente, una argumentación para resultados "locales", es decir, expresados en el lenguaje del medio y cuyo sentido proviene de él, aunque puedan tener un nivel de generalidad mayor. Estas argumentaciones las llamaremos *demostraciones situadas* (Moreno&Sacristán, 1995). En cierta manera son argumentaciones que respetan la "ecología" del entorno que les da *soporte expresivo*.

Los estudiantes son capaces de articular los resultados de sus exploraciones de manera tal que éstos puedan ser llevados más allá del medio computacional o puedan dar lugar a nuevas versiones de un resultado que hacen clara la visibilidad del medio computacional.

10. Los recursos computacionales en la educación

Los recursos computacionales en la escuela tienen el potencial de modificar nuestros enfoques de enseñanza: hacen viable que la exploración pueda incorporarse de manera central en las actividades matemáticas de los estudiantes. De nuevo: puede lograrse una convergencia entre actividades de exploración y actividades de sistematización que son propias, estas últimas, de los medios de expresión con altas dosis de formalización.

Exploración y sistematicidad, rasgos definitorios de la actividad matemática, se encuentran posibilitados en los instrumentos computacionales. La manipulación de los objetos matemáticos mediante los instrumentos computacionales, los hace tangibles, visibles, y quizá con ello contribuya a facilitar la construcción del sentido de los objetos matemáticos bajo estudio. La importancia de los instrumentos para la educación está asociada a su capacidad de ofrecer medios de expresión matemática. Pero el potencial real de los instrumentos no se despliega mientras permanezcamos en el nivel de la amplificación, del uso proteico de los instrumentos computacionales. Es necesario acceder al nivel de re-organización para lograrlo.

La institucionalización de la educación facilitó el uso de ciertos sistemas externos de representación, a saber, los de la aritmética y la escritura. Los sistemas educativos consideran que estos sistemas semióticos de representación son parte del bagaje natural del estudiante y, con el paso del tiempo, han olvidado que se hallan en relación simbiótica con la memoria natural. Insistamos: uno de los factores inerciales que mas afectan a la educación es la creencia en un desarrollo "natural" del sistema cognitivo. Como si los sistemas de representación (que son herramientas conceptuales) no estuviesen en una profunda relación dialéctica con el conocer.

Debido a las aceleradas transformaciones de los cuerpos conceptuales que se transforman posteriormente en organizaciones curriculares, conviene re-pensar la educación en términos de desarrollo de herramientas cognitivas. Es a través de la metacognición como se pueden desarrollar habilidades vinculadas con la inteligencia reflexiva. No mediante los procesos de acumulación de información.

Los griegos descubrieron que el texto no era sólo un registro externo de la memoria sino, también, un espacio de reflexión y exploración. En otras palabras: era un laboratorio para la reflexión. Pues bien, la computadora (en todas sus versiones) es una herramienta que trae articulada una potencialidad semejante al texto: es un *laboratorio matemático*.

La importancia de las herramientas computacionales para la educación matemática está asociada a su capacidad para ofrecernos medios alternativos de expresión matemática. A su capacidad para ofrecer formas innovadoras de manipulación de los objetos matemáticos. Cuando se usa la tecnología en la escuela, hay que reconocer que no es la tecnología en sí misma el objeto central de nuestro interés, sino el pensamiento matemático que pueden desarrollar los estudiantes bajo la mediación de dicha tecnología.

Referencias

Balacheff,N. & Kaput,J. (1996). Computer-Based Learning Environment in Mathematics. In Bishop, A.J. et al, *International Handbook of Mathematical Education*, 469-501.

Kozulin, A. (1994). *La Psicología de Vygotski*. Alianza Editorial, Madrid.

Laborde,C. (1995). Designing tasks for Learning Geometry in a Computer-based Environment. En Burton,L & Jaworski, B. (eds) *Technology in Mathematics Teaching*, Chartwell-Bratt.

Moreno, L., & Sacristan, A. (1995). On Visual and Symbolic Representations, en: Sutherland, R. & Mason, J. (eds) *Exploiting Mental Imagery with Computers. Springer-Verlag.*

Noss,R.&Hoyles,C. (1996). *Windows on Mathematical Meaning*. Kluwer, Dordrecht, Boston, London.

Nunes,T.&Schliemann,A.L.&Carraher,D. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*, Cambridge U. Press.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies*. A. Colin, Paris.

Wertsch, J. (1993). *Voces de la mente*. Editorial Visor, Madrid.