NOTAS DE CLASE

Educación Matemática
Vol. 13 No. 2 agosto 2001
98-111

Análisis didáctico de la relación entre el uso del lenguaje simbólico y los teoremas de cambio de variables para el cálculo de las primitivas o de integrales

Fecha de recepción: Junio, 2000

Eduardo Lacués
Universidad Católica de Uruguay
elacues@ucu.edu.uy

Resumen: *El objetivo de este trabajo es analizar la relación existente entre el uso del lenguaje simbólico y los teoremas de cambio de variables para el cálculo de primitivas o el de integrales.*
En él se analizan ciertas prácticas comunes en la notación usada para establecer el enunciado de cada teorema, los motivos que existen para justificar estas prácticas y se describen algunas consecuencias de ellas. A partir de aquí se efectúa una crítica de esos modos de presentación y se propone una alternativa. Se termina el análisis con la consideración de las distintas formas de tratamiento de los contenidos que cada abordaje proporciona.

Abstract: *This article analyzes the relationship between the use of symbolic language and the theorems of substitution for the calculus of antiderivatives or integrals .*
Common practices in the notation used to enounce each theorem and some of the reasons that exist to justify them are analyzed; some consequences of these practices are described. Based upon this analysis, these practices are criticized and an alternative is proposed. Finally, it is considered the different treatment of the conceptual, procedural and attitudinal contents that each presentation provides.

Introducción

El objetivo de este trabajo es analizar la relación existente entre el uso del lenguaje simbólico y los teoremas de cambio de variables para el cálculo de primitivas o el de integrales.

En él se analizan ciertas prácticas comunes en la notación usada para establecer el enunciado de cada teorema, los motivos que existen para justificar estas prácticas y se describen algunas consecuencias de ellas. A partir de aquí se efectúa una crítica de esos modos de presentación y se propone una alternativa. Se termina el análisis con la consideración de las distintas formas de tratamiento de los contenidos que cada abordaje proporciona.

La estructura del trabajo es la siguiente:

- en primer término se discute el papel del lenguaje simbólico en la Matemática;
- en segundo lugar, se presentan el enunciado del teorema de cambio de variables

para cálculo de primitivas y las notaciones usuales para establecerlo, se dan algunas justificaciones para el uso de estas notaciones y se efectúa una crítica del mismo;

- en el tercer punto se hace lo propio para el teorema correspondiente a integrales;
- en el cuarto apartado se propone una alternativa al tratamiento de este tema;
- en la quinta sección se analizan la forma en que cada presentación trata los contenidos, y se plantea un conjunto de consideraciones que pretenden justificar la propuesta alternativa desde el punto de vista de sus efectos educativos.

En el anexo 1 se plantean algunas demostraciones y en el anexo 2 se dan ejemplos.

1. El papel del lenguaje formal en la matemática

Es reconocido el hecho de que Matemática y Lógica son consideradas como *ciencias formales*, distinguiéndolas de las ciencias naturales y las humanas. En su acepción más estricta, esto significa que ambas se limitan a operar exclusivamente con símbolos, sin tener en cuenta referencias a sus significados o a los entes con ellos representados.

Sin embargo, esta postura extrema no es la única posible. Algunos autores (Kline, 1962; Tavares, 1990) rescatan la importancia de tener en cuenta que los sistemas simbólicos constituyen medios de representar objetos y las relaciones mentales que se establecen entre ellos, en forma cada vez más abstracta, y con la ventaja de que al existir un consenso acerca de la utilización de ciertas notaciones, estas representaciones tienen un carácter universal, constituyendo así una particular forma de comunicación.

Éste perspectiva sirve para señalar que parte del poder de la matemática reside en que un pequeño número de símbolos permite la construcción de distintas formulaciones simbólicas que pueden usarse para representar una gran diversidad de situaciones. La práctica de la matemática tiene como uno de sus componentes esenciales el uso de un lenguaje propio, con el que se formulan y abordan los problemas que se reconocen de interés por parte de la comunidad que elabora el conocimiento matemático.

Además, Romberg (Romberg, T., pág. 374) sostiene que es posible organizar el tratamiento de los enunciados simbólicos de manera que las situaciones que han llevado a crear los símbolos sean las que permitan desarrollar las reglas de representación, de transformación y de procedimientos. Esta afirmación es verdaderamente importante en el momento de analizar cómo dotar de sentido a las formulaciones simbólicas.

Al tratar la propuesta alternativa para el teorema de cambio de variables para integrales se verá una forma de presentación en la que consideraciones provenientes de aplicaciones en otras áreas permiten conjeturar la forma que debe tener el enunciado matemático.

La preocupación por lograr que el uso de símbolos refleje aspectos esenciales de lo que se representa está más o menos explícita en los trabajos de muchos de los matemáticos que fueron precursores en este tema.

Probablemente, uno de los mayores inventores de signos para representar entes matemáticos haya sido Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716), a quien se debe, junto con Newton, la creación del cálculo diferencial. En sus primeros escritos sobre este tema, Leibnitz tuvo el acierto de proponer una notación, $\frac{dy}{dx}$, para la derivada de la función $y=y(x)$ que tiene la enorme ventaja de evocar que el ente que representa es definido a partir del proceso de límite sobre un cierto cociente. Es posible que la diferencia entre la notación de Leibnitz y la de Newton sea en parte responsable del atraso con el que se desarrolló el cálculo en Inglaterra en relación con el resto del continente europeo (Pita, C., pág. 121). A él también es debido el uso de $\int$ para representar primitivas. Otros trabajos de Leibnitz en Lógica Simbólica revelan su interés por lograr el desarrollo de un sistema notacional que simplificara el razonamiento (Stewart, J., pág. 118).

Otro matemático preocupado por este aspecto fue Giuseppe Peano (1858-1932). Entre otros signos propuso el de $\in$ para la pertenencia de un elemento a un conjunto, como una deformación de la letra griega épsilon (ε); a su vez ésta es la primera letra de la frase "estar en", con lo que encontramos de nuevo en Peano el mismo interés que en Leibnitz de usar representaciones que evoquen algún aspecto de lo representado.

El alcance que Peano daba al uso del lenguaje simbólico puede apreciarse en la siguiente cita: *"La Lógica matemática representa con el menor número de convenciones todas las proposiciones matemáticas, aún aquellas muy complicadas, cuya traducción al lenguaje ordinario sería muy fatigoso. Pero ella no se reduce simplemente a una escritura simbólica abreviada, a una especie de taquigrafía; permite estudiar las leyes de estos signos y las transformaciones de las proposiciones"* (*Sur la definition de la limite d'une fonction. Exercise de logique mathématique*, en Brunschvicg, pág.416). Queda claro que Peano está manifestando que el fin último del uso del lenguaje simbólico es poder finalmente "pensar" con él.

Esta posición abre una nueva dimensión de análisis. En este sentido, es posible establecer un paralelo entre el rol del lenguaje como elemento organizador del proceso de llevar a cabo una tarea compleja, como lo señala Vygotski (Vigotski, pág.48), y el uso del lenguaje simbólico en matemática para orientar y dirigir el proceso de búsqueda de soluciones a problemas. En este último proceso interactúan las propiedades que regulan las transformaciones válidas entre expresiones simbólicas (propiedades que están soportadas por resultados conceptuales que autorizan esas transformaciones) y los entes designados por esos símbolos, a través de la proposición de conjeturas intuitivas que guían, o al menos orientan, el proceso formal.

Con relación a este aspecto, Romberg ha señalado que "...el conocimiento matemático debe desarrollarse en dos dimensiones distintas. La primera es simbólica e incluye los signos, los símbolos y las reglas para la utilización de estos símbolos en ámbitos matemáticos específicos. La segunda es el conjunto de situaciones problema para las que se usan y a las que dan sentido estos símbolos" (Romberg, pág. 382).

En otro orden, Kieran (Kieran, 1992) señala que históricamente pueden distinguirse tres etapas en el desarrollo del simbolismo algebraico. La primera es la etapa retórica, hasta aproximadamente el año 250 a.C., caracterizada por el uso exclusivo del lenguaje usual para la descripción de los procesos de solución de algunas clases de problemas. Ésta es seguida por la etapa diofántica, iniciada precisamente por Diofanto de Alejandría y que se prolonga hasta el comienzo del siglo XVI, en la que se introducen letras para representar cantidades desconocidas; a través de matemáticos árabes se difunde en Europa el trabajo de Diofanto, que finalmente es traducido al latín. Comienza así la tercera etapa, la simbólica, cuando a partir de estas traducciones los matemáticos europeos retoman el proceso de construir representaciones y no solamente se usan letras para representar variables o incógnitas, sino que se comienza a elaborar soluciones generales y a producir reglas para enunciar relaciones numéricas. Este proceso permite finalmente el desarrollo de definiciones precisas para distintos conceptos matemáticos, como el de función. En el siglo XX se ha llevado a su extremo este camino de presentación de la matemática en forma simbólica, sobre todo a través del trabajos como los del grupo Bourbaki.

Finalmente, vale la pena señalar que Kieran (Kieran, 1992) hace un repaso de los aspectos involucrados en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra, abordando el análisis desde perspectivas sicológicas o cognitivas. En particular, siguiendo a Sfard (Sfard, 1991), señala que los conceptos matemáticos pueden concebirse fundamentalmente de dos formas: como objetos o como procesos. La transición de una concepción a la otra es considerada como similar al proceso histórico de tres etapas que fue mencionado antes y gran parte del trabajo de Kieran está fundado en el estudio de esta evolución.

La exposición anterior constituye el marco en el que se aborda ahora el tema de la relación entre el teorema de cambio de variables y el lenguaje simbólico.

2. El teorema de cambio de variables para primitivas

Con la notación $\int f$ se designa una función F tal que F'=f en un cierto intervalo J, es decir, $F = \int f$ en J si y sólo si F'=f en J. Frecuentemente, y en particular en las instancias concretas de cálculo, es necesario señalar cuál es la variable involucrada en esta igualdad.

De manera que $F(x) = \int f(x)dx$ significa que se está considerando que a los efectos de esta relación, f depende de la variable x (aunque pudiera depender además de otras variables); también estamos diciendo que F depende de la variable x y que el segundo miembro depende de "x" a través de la aparición de "x" en "dx". Es habitual que el segundo miembro se lea "primitiva de f de x diferencial de x", aún cuando dx no represente en esta notación un diferencial.

Así, no tiene el mismo sentido una expresión como $F(y) = \int f(x)dx$, ya que estaríamos señalando en el primer miembro una función de la variable y, mientras en el segundo la variable es x, lo que implica que ambas son iguales a la misma constante.[1] En este caso, eso sólo puede ocurrir si f es la función nula.

En esta notación, por lo tanto, $F(x) = \int f(x)dx$ y $F(y) = \int f(y)dy$ significan la misma cosa. En cambio, $F(x) = \int f(y)dx$ debe interpretarse en el sentido de que f, que depende de la variable y, es constante respecto de x y entonces F(x)=f(y)x+c, donde c es una constante cualquiera.

Hechas estas precisiones respecto a la notación para una primitiva, se puede enunciar el teorema de cambio de variables.

Sean $F(x) = \int f(x)dx$ *en el intervalo U y* $H(x) = \int f(g(x))g'(x)dx$ *en el intervalo W, donde* g *es una función derivable con dominio W y cuya imagen está incluida en U. Entonces,* $H(x)=F(g(x))+c$, *para cierta constante* c, *en el intervalo W.*

Si g es invertible, resulta $F(x)=H(g^{-1}(x))+d$ *para x en la imagen de* g *y cierta constante* d.

[1] Sean a y b dos funciones, que dependen respectivamente de las variables independientes u y v, tales que a(u)=b(v) cualesquiera sean u y v en sus correspondientes dominios. Si u_0 es un valor fijo en el dominio de a, entonces $a(u_0)=b(v)$ para todo v en el dominio de b, con lo que b resulta constante y, por lo tanto, a también.

Es frecuente que en textos de cálculo se encuentre, posteriormente al enunciado anterior y su demostración, un comentario similar al que sigue.

Analicemos el problema de calcular $H(x)=\int f(g(x))g'(x)dx$. Hagamos la sustitución u=g(x). Entonces du=g´(x)dx ("el diferencial de u es el producto de la derivada de g por el diferencial de x"). Por lo tanto, si además tenemos que $F(u)=\int f(u)du$ resulta $H(x)=\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g'(x)dx}_{du}=\int f(u)du=F(\underbrace{u}_{g(x)})+c=F(g(x))+c$

Esta última formulación presenta graves defectos, considerada desde la perspectiva que se planteó inicialmente en cuanto al significado de la notación para primitivas.

En efecto, la presencia de "dx" en la primera de las primitivas indica que el resultado de esta operación será una función de x, en tanto el "du" de la segunda primitiva señala que ésta será una función de u, por lo que según ya se vio, sólo puede darse cuando H y F sean iguales a la misma constante. El intento de salvar esta dificultad estableciendo que en realidad, "como u=g(x)", tanto el primer miembro como el segundo son funciones de x, no tiene asidero en la notación usada, ya que ésta no permite en ningún momento un manejo de este tipo.

Pueden formularse las mismas objeciones a la presentación que sigue del problema de calcular una primitiva mediante un cambio de variables inverso, tal cual se plantea a continuación.

Para calcular $F(x)=\int f(x)dx$, tomamos x=g(u) y por lo tanto dx=g'(u)du, por lo que si, $H(u)=\int f(g(u))g'(u)du$ y si además tenemos en cuenta que $u=g^{-1}(x)$, finalmente obtenemos $F(x)=\int f(\underbrace{x}_{g(u)})\underbrace{dx}_{g'(u)du}=\int f(g(u))g'(u)du=H(\underbrace{u}_{g^{-1}(x)})+d=H(g^{-1}(x))+d$.

Además de las consideraciones hechas en torno al significado de la notación para primitivas, hay otros aspectos que merecen señalarse.

El primero consiste en el hecho de que el teorema de cambio de variables es una instancia particularmente apropiada para explicitar la importancia de los procesos de composición o de inversión de funciones, junto con los teoremas que, como el de la regla de la cadena o el de derivabilidad de funciones inversas, aportan elementos conceptuales entrelazados con los estrictamente procedimentales de cálculo de compuestas o inversas.

Planteos como los descritos opacan la presentación de estas ideas y el resultado frecuentemente observado en los alumnos es que se termina percibiendo el teorema de cambio de variables como consistiendo exclusivamente en un conjunto de manipulaciones con símbolos, desprovisto de referencias a contenidos conceptuales. En particular, se oculta el proceso de la demostración del teorema.

El segundo aspecto a tener en cuenta es que si bien en el cálculo de integrales aparecen motivaciones para manejos como los descritos, en el caso de cálculo de primitivas estos resultan bastante artificiales.

3. El teorema de cambio de variantes para integrales

Con la notación $\int_a^b f$ se designa un número, concretamente aquel del cual están tan próximas como sea necesario todas las sumas de Riemann de f en [a,b] que correspondan a particiones suficientemente finas de [a,b]. Otra notación para este número es $\int_a^b f(x)dx$. Vale la pena detenerse un poco en ella para describir el papel que juega cada elemento.

En primer lugar, a y b designan los extremos de un intervalo, por lo que en principio a<b. Para generalizar, se define $\int_a^a f = 0$ y $\int_a^b f = -\int_b^a f$ para a>b por motivos que ahora no es del caso discutir.

En segundo término, la "x" que figura en "dx" tiene el papel de indicar cuál es la variable que se está tomando en el intervalo [a,b], de donde resulta que cualquier otra letra deberá representar una constante. Así que $\int_a^b f(u)dx$ no representa lo mismo que $\int_a^b f(x)dx$ (en realidad $\int_a^b f(u)dx$ es la integral de una función constante y entonces $\int_a^b f(u)dx = f(u)(b-a)$).

En tercer lugar, sí es cierto que en $\int_a^b f(x)dx$, x puede ser sustituida cualquier letra, a excepción de las que ya en este contexto tienen un significado asignado (carecen de sentido $\int_a^b f(a)da$ o $\int_a^b f(f)df$). Cabe destacar, entonces, que no es incoherente la igualdad $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$, en tanto la igualdad correspondiente en el caso de primitivas $\int f(x)dx = \int f(u)du$ sólo podía ser interpretada como representando la identidad entre dos funciones constantes.

Hechos estos comentarios acerca de la notación para integrales, es posible enunciar el teorema de cambio de variables para integrales.

Sean g *una función con derivada continua en el intervalo [a,b] y* f *una función continua en un intervalo [c,d] que contenga a* g([a,b]). *Entonces* $\int_a^b f(g(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$.

En la presentación de este teorema en distintos textos de cálculo, es también frecuente encontrar una manipulación como la que sigue: hagamos u=g(x); tendremos, pues, que g'(x)dx=du y para x=a, será u=g(a) en tanto cuando x=b se encontrará u=g(b). Entonces $\int_a^b f(\underbrace{g(x)}_{u})\underbrace{g'(x)dx}_{du} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$.

Las críticas realizadas para este proceso en el caso del teorema correspondiente para primitivas tienen la misma vigencia aquí. Sin embargo, en esta ocasión se agrega un elemento más, que se considerará cuando se analicen procedimientos alternativos de tratamiento de estos temas.

4. Propuesta alternativa para el tratamiento del tema

En primer lugar, parece razonable buscar alguna manera de motivar el enunciado del teorema de cambio de variables para integrales, donde algunas consideraciones informales son útiles.

Si f es continua en [c,d], una suma de Riemann de f para una partición $P=\{u_0,u_1,...,u_n\}$ es $s(f,P) = \sum_{k=1}^{k=n} f(u_k^*)(u_k - u_{k-1})$ donde u_k^* se elige en el k-ésimo intervalo $J_k=[u_{k-1},u_k]$.

Ahora bien, en muchas aplicaciones, en particular en el área de la Física, u debe ser considerada como una función de otra variable, digamos x, por lo que es posible transformar esta suma en otra donde la variable sea x.

Más precisamente, sea $u=g(x)$ para cierta g, cuya derivada es continua y tiene signo positivo en [a,b] y cuyo recorrido [g(a),g(b)] coincide con [c,d](estas hipótesis que se imponen a g son las que frecuentemente se cumplen al considerar aplicaciones). Entonces resulta g invertible, por lo que para cada u existe x único tal que $g(x)= u$. Además, si ponemos $u_k=g(x_k)$ para cada $k=0,1,2,\ldots n$, por el teorema del valor medio para derivadas de Lagrange, existe x_k^+en el intervalo (x_{k-1},x_k) para el que $u_k-u_{k-1}=g(x_k)-g(x_{k-1})=g'(x_k^+)(x_k-x_{k-1})$.

Sustituyendo en el segundo miembro de la suma de Riemann para f, se tiene $\sum_{k=1}^{k=n} f(g(x_k^*))g'(x_k^+)(x_k - x_{k-1})$; ahora bien, las hipótesis de continuidad de la derivada de g y de continuidad de f, junto con el hecho que x_k^* y x_k^+ están próximos (ya que ambos están en J_k) si la partición P es suficientemente fina, tienen como consecuencia que la suma anterior difiera poco de $\sum_{k=1}^{k=n} f(g(x_k^*))g'(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$. Esta última es una suma de Riemann para la función (f°g).g' en el intervalo [a,b].

En definitiva, tenemos que cada suma de Riemann de f en [c,d]=[g(a),g(b)] difieren poco de una cierta suma de Riemann de (f°g).g' en [a,b]; de ahí a conjeturar que $\int_a^b f(g(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$ hay un paso.

Se encuentra aquí una instancia en la que un enunciado, que es sugerido por diversas situaciones, propone determinadas reglas de manipulación simbólica, que surgen precisamente de los procesos llevados a cabo en esas diversas situaciones, como se anticipó (página 3) al tratar la posición de Romberg a este respecto.

Una vez establecida la formulación del teorema de cambio de variables para integrales, puede darse la del correspondiente a primitivas mediante una simple analogía de forma.

Una propuesta alternativa a los planteos tradicionales se formula a continuación.

En primer lugar, se aborda el cálculo de $H(x) = \int f(g(x))g'(x)dx$. La información disponible es que si se conoce $F(x) = \int f(x)dx$, resulta $H(x)=F(g(x))+c$, para cierto número real c. Si se quisiera transformar el problema de calcular H en el de hallar F, se podría, para comenzar, mirar el integrando de H como un producto, y tratar de identificar un factor como la derivada g' de una cierta función g; si a continuación se encuentra una función f tal que la composición f°g sea el restante factor, se habrá logrado el objetivo.

Desde esta perspectiva, el teorema de cambio de variables provee un método de cálculo de primitivas que puede ser descrito en cuatro pasos:

a) Mirar el integrando como un producto e identificar uno de sus factores como la derivada g' de una cierta función g.

b) Hallar una función f tal que f°g sea el restante factor del integrando.

c) Calcular $F(x) = \int f(x)dx$.

d) Escribir H usando su relación con F, es decir, $H(x)=F(g(x))+c$.

Cada uno de estos pasos requiere cierto tipo de habilidades.

En a), la práctica en primitivizar en forma inmediata, es decir, en detectar que cierta función es la derivada de otra, determina el éxito o el fracaso en la aplicación del método, o al menos afecta su eficiencia. Esto plantea la necesidad de haber tratado en forma previa este tema, de manera que pueda ser aquí retomado por los estudiantes sin demasiadas dificultades, como parte de un proceso más complejo.

En b), es necesario un manejo algebraico fluido para identificar f. Es evidente que un buen dominio de los distintos aspectos relacionados con el proceso de composición de funciones es condición necesaria para salvar esta fase con éxito. En particular, parece que sería de utilidad haber trabajado con anterioridad no solamente el procedimiento de componer dos funciones, sino también y sobre todo, otros dos relacionados con este, a saber, el de descomponer una función como compuesta de otras y el de determinar una de las funciones componentes a partir del conocimiento de la compuesta y de la otra componente.

El grado de dificultad al abordar la solución de c) depende fuertemente de la elección hecha en a) que es la que determina el resultado de b). Parece que la presentación de ejemplos en los que este hecho se hace evidente a los estudiantes, podría ayudar a la comprensión del problema y al desarrollo por parte de ellos de la habilidad de elegir adecuadamente.

Finalmente, d) sólo requiere el adecuado manejo algebraico de composición de funciones.

En otro orden, si el problema es el cálculo de $F(x) = \int f(x)dx$, lo que se sabe es que si $H(x) = \int f(g(x))g'(x)dx$, entonces es $F(x)=H(g^{-1}(x))+d$ para cierto número real d.

Aquí lograr el éxito depende de encontrar una g adecuada para que el cálculo de H sea sencillo. Después será necesario invertir g para obtener f.

Desde este punto de vista, este cambio de variables "inverso" puede formularse como un plan de cuatro etapas, como el anterior, según se describe a continuación:

a) Seleccionar una g adecuada al problema.

b) Calcular H.

c) Hallar g^{-1}.

d) Dar F a partir de su relación con H, es decir, $F(x)=H(g^{-1}(x))+d$.

Como antes, cada etapa tiene sus requerimientos propios, aunque la a) merece un comentario especial. En efecto, el proceso de selección de una g adecuada es en gran medida un trabajo que fue hecho a lo largo de mucho tiempo, en el que mediante ensayos y errores fueron siendo elaboradas listas de elecciones apropiadas a ciertas clases de funciones. Entre otros, los miembros de la familia Bernoulli se destacan en el descubrimiento de muchos procedimientos exitosos de cálculo (Purcell, E, pág.360). Estos cambios de variables figuran en casi cualquier texto de cálculo de primitivas, en muchos casos a manera de recetas. A pesar de esto, es posible presentar algunos ejercicios donde el desafío de "inventar" una g que sirva para el cálculo requerido pueda ser abordado por los estudiantes.

En cuanto al paso b), parece claro que su dificultad dependerá de la elección de g. Al igual que en el tercer paso del proceso anterior, la ejemplificación de distintas instancias de este problema puede ayudar a los estudiantes a mejorar en su habilidad para elegir adecuadamente.

El abordaje de c) presenta una excelente oportunidad para insistir en el tratamiento del tema de la inversión de una función, prestando atención a las condiciones en las que es posible hallar la inversa, en particular, haciendo notar que la elección del intervalo donde se busca la inversa está en relación con el intervalo donde se busca la primitiva.

La etapa final d) tiene las mismas características que el del caso de un cambio de variables "directo".

Al abordar el teorema para integrales, en primer lugar merece resaltarse que este teorema plantea una igualdad entre integrales. Por lo tanto, no parece que aquí haya otra justificación para hablar de cambios de variables directos o inversos que el de mantener la terminología correspondiente al teorema para primitivas.

En segundo lugar, las consideraciones hechas en cuanto a mirar el teorema como elemento inspirador de procedimientos de cálculo mantienen aquí su vigencia.

En efecto, la igualdad $\int_a^b f(g(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$ puede mirarse en dos sentidos, como se describe a continuación.

Si se hace de izquierda a derecha permite transformar el cálculo de $\int_a^b f(g(x)g'(x)dx$ en el de $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$ mediante la identificación de un factor del primer integrando como derivada de una cierta función g y el reconocimiento del otro como la composición de la g identificada con otra función f a determinar.

Si por el contrario se va de derecha a izquierda, inventando una g apropiada se puede cambiar el problema de hallar $\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$ por el de encontrar $\int_a^b f(g(x)g'(x)dx$ (nótese que aquí no es necesario pedir que g sea invertible, aunque podría simplificar el problema que sí lo fuera).

Como anotación final, se debe señalar que estas similitudes constituyen una instancia en la que se puede presentar la práctica de procedimientos que ya se han ensayado en un ámbito, en otro diferente, y de esta forma mostrar algunos de los aspectos que en torno a la naturaleza del lenguaje simbólico fueron señalados antes.

5. Consideraciones finales

Vale la pena tomar en consideración el tratamiento que dan a los diferentes tipos de contenidos las dos formas de presentación que se han discutido.

En cuanto a los conceptuales, ambas propuestas presentan rigurosamente tanto los enunciados de los teoremas como las demostraciones, y dan ciertas motivaciones que preparan el tratamiento del tema. Sin embargo, el aspecto donde se nota la mayor diferencia es en el papel jugado por el lenguaje simbólico en cada una. En la descrita en primer término no se da mayor importancia al cuidado con el que se usa, en tanto que en la alternativa propuesta este cuidado forma parte esencial.

Algunos de los contenidos procedimentales, fundamentalmente los que tienen que ver con las habilidades operatorias (composición o inversión de funciones, reconocimiento de funciones como derivadas de otras), aparecen en las dos formas de presentación. Sin embargo, en la segunda se explicitan los momentos en los que cada uno se aplica en el contexto de un proceso más complejo, lo que podría contribuir al aprendizaje de estrategias como lo describe Pozo (Pozo, pág. 300). Otra diferencia entre ambas puede notarse en que en la primera se procede mecánicamente a partir de un conjunto de listas que contienen casos tipificados, en tanto en la otra, sin dejar de reconocer la importancia de estas listas, se las valora desde otra perspectiva (como se discutirá más adelante) y se insiste en la posibilidad de que cada uno puede sugerir cambios de variables, explorarlos para ver si resultan adecuados, y modificarlos o rechazarlos totalmente si fallan. En la presentación tradicional, entonces, se aborda el cálculo casi como si se estuviera aplicando un algoritmo, en tanto en la alternativa se lo ve más bien como un procedimiento heurístico. Por último, en la propuesta alternativa se pone de manifiesto cómo es posible desarrollar un plan para abordar la solución de un problema a partir de un resultado conceptual, procedimiento que los matemáticos tratan de llevar a cabo permanentemente.

Los contenidos actitudinales aparecen más encubiertos y es necesario un comentario más extenso que los anteriores que trate de explicitarlos.

Cuando a los alumnos se les muestra cómo a partir de un resultado conceptual puede diseñarse un plan para buscar soluciones a una cierta clase de problemas, se está presentando una forma de actuar diferente de la sola manipulación de símbolos. De esta forma se propone una concepción de lo que significa matemática como herramienta diferente de la que en general se admite, estableciendo el énfasis en que el adecuado uso de la herramienta necesita un soporte conceptual sin el cual su utilización es meramente superficial.

Cuando en la fase de aplicación concreta del plan se plantean a los estudiantes ejercicios que constituyan un desafío que pueden abordar con los elementos que han ido adquiriendo (por ejemplo, que "inventen" una función para llevar a cabo un cambio de variables) se les está invitando a ser creativos, a que propongan alternativas, que las exploren y, si es necesario, las desechen o las modifiquen, en fin, que noten que el proceso de construcción de soluciones a situaciones para las que no existen algoritmos desarrollados está lleno de marchas y contramarchas, de intentos que aún fallidos pueden aportar elementos para el éxito.

Esto es bastante distinto a establecer una lista de cambios tipificados y remitir la solución a buscar en la lista el adecuado. El valor de la construcción de estas listas puede ser mostrado planteando una perspectiva histórica, en la que se señale la importancia que tuvo en su momento el abordaje de este problema. Es posible mostrar a la vez cómo esta importancia ha disminuido, dada la disponibilidad de programas para computadoras que pueden reconocer las situaciones en las que esas listas son aplicables y ejecutar los cálculos correctamente, o, por supuesto, computar numéricamente una integral. Este planteo posiblemente hará que se perciba la matemática como una creación humana, en la que los problemas de interés para los matemáticos, la forma de abordarlos, e incluso la aceptación de lo que es una solución válida, sufren cambios en el tiempo que a veces no son enteramente provocados por factores internos a la matemática (la irrupción de las computadoras es un ejemplo actual de uno de estos factores).

Cuando se apela a una motivación que tiene sus raíces y su rango de aplicabilidad fuera del ámbito estricto de la matemática, como la que se mencionó con relación a la interpretación de las manipulaciones con los diferenciales, se está mostrando que los procesos que otras disciplinas llevan a cabo se convierten en los inspiradores de desarrollos que corresponde a los matemáticos concretar con el nivel de rigor que su disciplina requiere. De esta manera, se fundamenta la creación del conocimiento matemático en la realidad. Pero también, una vez que el tema ha sido depurado y puesto en forma matemática, su rango de interpretación y de aplicabilidad en la realidad suele trascender los ámbitos que lo generaron.

Esto permite mostrar la evidencia de un proceso que es continuo en el desarrollo de la matemática: tomar su fuente de inspiración en la cuestión de describir aspectos de la realidad, elaborar conceptos adecuados para llevar a cabo esta descripción, comparar ésta con los problemas que la originaron y volver a comenzar, en un camino de aproximaciones sucesivas.

Es imposible mostrar esto a los estudiantes si sólo se procede a manipular símbolos, porque en este último caso se está presentando a la matemática como desvinculada de cualquier otro conocimiento.

En definitiva, puede sostenerse que con un planteo como la alternativa propuesta se promueve la creatividad de los estudiantes y la búsqueda en la realidad de los problemas que motivan la creación de los conceptos matemáticos. Al mostrarse el papel imprescindible del rigor matemático en los procesos de formalización y destacarse el rol que en ellos juega el lenguaje simbólico, se hace admisible para los alumnos la necesidad de un manejo cuidadoso de los símbolos, que incluye las reglas con las que estos pueden transformarse, pero también las interpretaciones que es posible darles.

Bibliografía

Brunschvicg, L.(1945); *Las etapas de la filosofía matemática*, Lautaro.

Kieran, C. (1992); *The learning and teaching of school algebra*. En Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan. Hay traducción al español en: http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/traducciones/default.html#Kieran(92)

Kline, M. (1962); *Mathematics, a cultural aproach*, Reading,MA, Addison Wesley, (en Romberg, 1991).

Pita, C. (1998); *Cálculo de una variable*, Prentice Hall Hispanoamericana.

Pozo, J.I. (1998); *Aprendices y maestros*, Alianza, Madrid.

Purcell, E.J y Varberg, D. (1987); *Cálculo con geometría analítica*, Prentice Hall Hispanoamericana.

Romberg, T. (1991); *Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas*, Handbook of Research on Curriculum, compilado por Philip W. Jackson, (publicado en Revista de Educación, número 294.

Sfard, A.; *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin;* Educational Studies in Mathematics, 22, 1-36; en Kieran, C.

Stewart, J. (1998); *Cálculo de una variable*, International Thomson Editores.

Tavarez, M.L. (1990); *Do cotidiano à construçao do pensamento lógico-matemático*, Cadernos de Pesquisa, Fundaçao Carlos Chagas, Fevreiro, n°7.

Vygotski, L.S.; *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Editorial Crítica, Barcelona, España.

ANEXO 1

Teorema de cambio de variables para primitivas.

Sean $F(x) = \int f(x)dx$ *en el intervalo U y* $H(x) = \int f(g(x))g'(x)dx$ *en el intervalo W, donde* g *es una función derivable con dominio W y cuya imagen está incluida en U. Entonces,* $H(x)=F(g(x))+c$, *para cierta constante* c, *en el intervalo W.*

Si g es invertible, resulta $F(x)=H(g^{-1}(x))+d$ *para x en la imagen de* g *y cierta constante* d.

Demostración

La demostración de este teorema usa fundamentalmente la regla de la cadena y el resultado (consecuencia del teorema del valor medio para derivadas de Lagrange), que establece que dos funciones con igual derivada en un intervalo difieren en una constante.

En efecto, de acuerdo con la definición de primitiva, se tiene $F'(x)=f(x)$ en U y $H'(x)=f(g(x)).g'(x)$ en W; sustituyendo f se obtiene $H'(x)=F'(g(x)).g'(x)=(F°g)'(x)$ por lo que $H(x)=(F°g)(x)+c$ para cierta constante c en W.

La segunda parte del enunciado resulta simplemente de componer ambos miembros con g^{-1}.

Teorema de cambio de variables para integrales

Sean g *una función con derivada continua en el intervalo [a,b] y* f *una función continua en un intervalo [c,d] que contenga a* g([a,b]). *Entonces* $\int_a^b f(g(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$.

Demostración

La demostración usa el teorema fundamental del cálculo integral, la regla de Barrow y el teorema de aditividad de intervalos.

En efecto, si $H(t) = \int_a^t f(g(x))g'(x)dx$ y $F(t) = \int_c^t f(x)dx$, por el teorema fundamental del cálculo integral resulta $H'=(f°g).g'$ en [a,b] y $F'=f$ en [c.d], por lo que $H'(t)=F(g(t)).g'(t)=(F°g)'(t)$ para t en [a,b], es decir, F°g es una primitiva de (f°g).g' en [a,b].

Así, por la regla de Barrow primero, y el teorema de aditividad de intervalos después, es que resulta finalmente

$$\int_a^b f(g(x)g'(x)dx = (F\circ g)(b) - (F\circ g)(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_c^{g(b)} f(x)dx - \int_c^{g(a)} f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

ANEXO II

Ejemplo 1

Calcule $F(x) = \int x\sqrt{x-1}dx$ en el intervalo $[1,+\infty)$.

Una posible solución es "inventar" una función g de manera que cuando se la componga con $f(x) \doteq x\sqrt{x-1}$ "desaparezca " la raíz cuadrada y resulte un polinomio. Ahora bien, $f(g(x)) = g(x)\sqrt{g(x)-1}$ y una forma de lograr este objetivo es poner $g(x)-1=x^2$ o sea, $g(x)=x^2+1$.

Con esta elección para g, el cálculo de F se transforma en el de $H(x) = \int (x^2+1)\sqrt{x^2}2xdx$. Ahora bien, necesitamos calcular H en un intervalo donde g sea invertible y para esto es posible elegir, por ejemplo, entre $(-\infty,0]$ y $[0,+\infty)$. Según cuál se elija, teniendo en cuenta que $\sqrt{x^2} = |x|$, habrá dos posibilidades para H.

Tomando el intervalo $(-\infty,0]$, quedará $H(x) = \int (x^2+1)(-x)2xdx = -2\int (x^4+x^2)dx$ y $g^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$. Finalmente, después de operar tendremos $H(x) = -2x^3(\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{3})+d$ y $F(x) = 2\sqrt{(x-1)^3}(\frac{1}{5}x+\frac{2}{15})+c$.

Otra posibilidad es mediante un cambio de variables directo; para esto, puede verse como $g'(x) = \sqrt{x-1}$, con lo que $g(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$. Con estas selecciones, f debe tomarse de forma que $(f^\circ g)(x)=x$, es decir $f=g^{-1}$, de donde se obtiene $f(x) = 1+\left(\frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3}}$. Así, el cálculo de F se reduce al de $\int \left(1+\left(\frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{3}}\right)dx = x+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{2}x\right)^{\frac{5}{3}}+c$. Por último, resulta $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+\frac{2}{5}(\sqrt{(x-1)^3})^{\frac{5}{3}}+c$. Verificar que esta expresión para F es equivalente a la anterior es sólo un proceso algebraico.

Ejemplo 2

Calcule $\int_1^4 x^3\sqrt{x^2-1}dx$.

Si se escribe el integrando como $x^3\sqrt{x^2-1} = x^2\sqrt{x^2-1}.x = \frac{1}{2}x^2\sqrt{x^2-1}(2x)$, puede pensarse en que $g'(x)=2x$, con lo que $g(x)=x^2+c$ para cualquier c. Ahora bien, tomando $c=0$, el restante factor puede verse como la compuesta de esta g con $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x-1}$. Como además g(1)=1 y g(4)=16 queda $\int_1^4 x^3\sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int_1^{16} x\sqrt{x-1}dx$. Utilizando el resultado del ejemplo 1 puede ahora terminarse el cálculo.

Si se elige c=-1, se tendrá que tomar $f(x)=\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x}$, dado que se está trabajando en el intervalo [1,4]. Con esto resulta que $\int_1^4 x^3\sqrt{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int_0^{15}(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})dx$ y los cálculos se simplifican notablemente.