ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas?[1]

Fecha de recepción: Agosto, 2000

Educación Matemática
Vol. 13 No. 3 diciembre 2001
22-63

Josep Gascón
Departamento de Matemáticas
Universitat Autónoma de Barcelona
gascon@mat.uab.es

Marianna Bosch
Facultat d'Economia. IQS
Universitat Ramon Llull
mbosch@emi.iqs.url.es

Pilar Bolea
Departamento de Matemáticas
Universidad de Zaragagoza
pbolea@posta.unizar.es

RESUMEN: *En este trabajo queremos poner de manifiesto cómo evoluciona la problemática de investigación en torno al* álgebra escolar *con el desarrollo de las perspectivas teóricas en didáctica de las matemáticas. En la primera parte mostramos cómo se plantea dicha problemática, considerada inicialmente como una* problemática docente, *desde las diferentes teorías didácticas que se sitúan dentro del* Programa Cognitivo *de investigación en didáctica de las matemáticas. En la segunda parte, analizaremos cómo se transforman los problemas de investigación en torno al álgebra escolar cuando se abordan desde las perspectivas teóricas situadas dentro del* Programa Epistemológico.

RÉSUMÉ: *Dans ce travail nous voulons mettre en évidence comment évolue la problématique de recherche autour de l'*algèbre scolaire *avec le développement des différentes perspectives théoriques en didactique des mathématiques. Dans la première partie, nous montrons comment se formule cette problématique, considérée initialement comme une* problématique d'enseignement, *dans les différentes théories didactiques qui se situent dans le* Programme Cognitif *de recherche en didactique des mathématiques. Dans la seconde partie, nous analyserons comment se transforment les problèmes de recherche autour de l'algèbre scolaire lorqu'on les aborde selon les perspectives théoriques situées dans le* Programme Épistémologique.

Parte I: El álgebra escolar en el programa cognitivo[2]

Introducción

En este trabajo queremos mostrar hasta qué punto pueden cambiar los enunciados de los problemas (y los propios problemas) de investigación didáctica, que surgen inicialmente

[1]Una primera versión de este trabajo fue presentada por Josep Gascón en el marco del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM), celebrado en Baeza (Jaén) en febrero de 1998. Queremos agradecer a Michéle Artigue, Luziana Bazzini, Paolo Boero, Guy Brousseau, Juan D. Godino y Marie-Helen Salin, sus críticas, comentarios y sugerencias. Gracias a su colaboración hemos mejorado ostensiblemente las sucesivas versiones provisionales de este artículo.

[2] Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT (MCT, Madrid).

en la *problemática espontánea de la enseñanza-aprendizaje*, a medida que son planteados en diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas[3].

Los problemas que tomaremos como punto de partida forman parte del área de investigación didáctica surgida alrededor de la ***enseñanza del álgebra***. Para estudiar la evolución de esta problemática científica, haremos uso de un esquema[4] que ya hemos utilizado en otras ocasiones (Gascón, 1998) y que permite llevar a cabo una *reconstrucción racional* (Lakatos, 1971) de la evolución de una de las líneas de desarrollo de la didáctica de las matemáticas a partir de la *problemática de la enseñanza-aprendizaje*. Esta reconstrucción, que no pretende ser una descripción neutral y "objetiva" de los hechos históricos, contempla esencialmente dos ampliaciones sucesivas del objeto de estudio de esta disciplina que dan origen, respectivamente, al *enfoque cognitivo* y a la "*didáctica fundamental*"[5]. En la terminología de los Programas de Investigación de Lakatos hablaremos del ***Programa Cognitivo*** y del ***Programa Epistemológico*** (Gascón, 1999b).

Es muy importante subrayar aquí que nuestra reconstrucción tampoco pretende, en absoluto, agotar la totalidad de enfoques existentes en esta etapa fundacional de la didáctica ni, mucho menos, abarcar la enorme riqueza y variedad de investigaciones que suelen incluirse dentro del ámbito de la "*Mathematics Education*" tal como se describe, por ejemplo, en Kilpatrick (1992).

Queremos subrayar que aunque inevitablemente utilizaremos trabajos de autores concretos para "representar" o "encarnar" las diferentes perspectivas, no hay que olvidar que tanto éstas como los enfoques en los que se integran son *construcciones teóricas* que no se corresponden miméticamente con los hechos históricos reales, "observables". Es por esta razón que, dicho de una forma enfática, *no existe en realidad ningún investigador que pueda situarse estrictamente en ninguna de las perspectivas consideradas*. Debe quedar muy claro que estamos analizando e interpretando tendencias pero, en ningún caso, autores. Como dice Lakatos: "...la historia de la ciencia es frecuentemente una caricatura de sus reconstrucciones racionales; las reconstrucciones racionales son frecuentemente caricaturas de la historia real; y algunas historias de la ciencia son caricaturas de ambas: de la historia real y de sus reconstrucciones racionales" (Lakatos, 1971, p.73).

---

[3] Postulamos que la didáctica de las matemáticas es una disciplina científico-experimental (en fase fundacional) y, como tal, *construye sus propios problemas* utilizando las nociones de que dispone en cada momento. Somos conscientes de que este punto de vista epistemológico respecto de la naturaleza de la didáctica de las matemáticas no es, ni mucho menos, universalmente compartido. Así, por ejemplo, en el reciente ICMI Study "*Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*" se adopta un punto de vista mucho más "ecléctico" en lo que se refiere al objeto de estudio de la Educación Matemática, a los tipos de problemas de los que se ocupa y, en definitiva, a la naturaleza de la Educación Matemática como disciplina científica (Sierpinska y Kilpatrick, 1998).

[4] No podemos justificar a priori la pertinencia de nuestro esquema, esto es, de los criterios que guían nuestra reconstrucción racional. Digamos que se trata de una reconstrucción que pretende principalmente "explicar" la emergencia del Programa Epistemológico y, en particular, la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Su fecundidad deberá ser juzgada a posteriori, en función de los frutos que se obtengan gracias a su utilización (y no sólo en este trabajo). Como sucede con todas las hipótesis científicas, también se puede aplicar a nuestro esquema aquello de "por sus frutos se le conocerá".

[5] En lugar de denominar "didáctica fundamental" al tipo de investigaciones didácticas inauguradas por Guy Brousseau en la década de los setenta y que él denominó inicialmente "epistemología experimental" (Brousseau, 1998), consideraremos que dichas investigaciones fundan el que denominamos "Programa Epistemológico" de investigación en didáctica de las matemáticas.

No debería sorprendernos que, a medida que evoluciona la didáctica de las matemáticas, los diferentes tipos de problemas que van apareciendo queden, aparentemente, cada vez más alejados de la problemática inicial. De hecho, esto es lo que sucede en todas las disciplinas científicas desde la física, la química, la biología, la psicología y la economía, hasta las propias matemáticas. Dicho alejamiento no debería interpretarse, sin embargo, como un olvido de la problemática inicial, sino como una reformulación de ésta (a veces muy profunda e inesperada) propiciada por la elaboración de nuevos instrumentos teóricos y técnicos. Veremos así que, al igual que las restantes disciplinas científico-experimentales, también la didáctica de las matemáticas *construye sus propios campos de problemas* y que éstos, lejos de ser eternos e inmutables, *evolucionan conjuntamente con la evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica* (Gascón, 1993)[6].

El mecanismo mediante el cual una disciplina (en nuestro caso, la didáctica de las matemáticas) construye sus campos de problemas, constituye uno de los principales rasgos definitorios de la misma. La descripción de dicho mecanismo para cada uno de los enfoques de la didáctica que aquí consideraremos y el estudio paralelo de la evolución de la problemática del álgebra escolar, serán los objetivos principales de este trabajo.

1. El álgebra escolar en la problemática de la enseñanza-aprendizaje

Llamamos *problemática de la enseñanza-aprendizaje* al conjunto de problemas y cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que pueden ser planteados desde dentro del Sistema de Enseñanza de las Matemáticas. Sucede, además, que en la cultura corriente (y hasta en ciertos documentos curriculares) se considera, de forma ingenua, que el profesor es el responsable de resolver la citada problemática y el que, en último instancia, debe dar respuesta a la misma. Por ello, para abreviar, denominaremos "*problemática docente*" a la problemática de enseñanza-aprendizaje (de las matemáticas)[7].

Postulamos que la cultura escolar contiene un conjunto de *nociones* y un conjunto de *ideas dominantes* (que pueden expresarse utilizando dichas nociones), que determinan fuertemente el alcance de la problemática docente; esto es, el tipo de preguntas que pueden ser planteadas y hasta el tipo de respuestas aceptables (o comprensibles) en el seno de la institución escolar. Entre las ***nociones*** que se manejan de forma más o menos transparente en la cultura escolar están las de "*motivación*", "*actitud*", "*resolución de problemas*", "*tratamiento de la diversidad*", "*enseñanza personalizada*", "*interdisciplinariedad*", "*he-*

[6] Por esta razón, y dado el gran desarrollo de la didáctica de las matemáticas en los últimos 20 años, no tiene sentido plantearse hoy en día *los mismos problemas didácticos* que era posible enunciar en los albores de nuestra disciplina. Una buena muestra de dichos problemas "preliminares" fue propuesta por Hans Freudenthal en una sesión plenaria del ICME-4, en Berkeley, el 10 de agosto de 1980. (Freudenthal, 1981). Mostraremos que con la evolución de la didáctica no sólo cambian los *enunciados* de los problemas, sino la propia problemática de investigación y, por tanto, la *naturaleza* de los problemas.

[7] En realidad la cultura corriente (y gran parte de la cultura escolar) ignora completamente la posibilidad de la investigación didáctica y, por tanto, asigna al profesor la responsabilidad última de la resolución de los problemas relacionados con la enseñanza-aprendizaje (por ejemplo, de las matemáticas). En concordancia con esta idea dominante, las Administraciones Educativas suelen considerar al profesor (de manera no completamente desinteresada) como la "piedra angular" sobre la que descansa el buen funcionamiento del Sistema Educativo. De esta forma la noción social de "profesor" aparece cada vez más sobrecargada de responsabilidades de las que el profesor no puede hacerse cargo.

rramientas informáticas", "*contenidos conceptuales*", "*contenidos procedimentales*", etc. Entre las ***ideas dominantes*** en la cultura escolar (más o menos indiscutibles) podemos citar, sin prejuzgar por el momento su alcance ni su mayor o menor pertinencia, las siguientes:

- "La enseñanza de las matemáticas debe centrarse en (o girar entorno a) la actividad de *resolución de problemas*".
- "*Motivar* a los alumnos y conseguir que *mejoren su actitud* respecto a las matemáticas y su aprendizaje es una de las responsabilidades principales del profesor de matemáticas y constituye uno de los factores que determinan el éxito o el fracaso de la enseñanza de las matemáticas".
- "La *interdisciplinariedad* es preferible a la enseñanza de las matemáticas separada de las demás disciplinas escolares".
- "La educación matemática debe tender hacia una enseñanza cada vez más *individualizada y personalizada*". Mientras las limitaciones presupuestarias no permitan alcanzar este objetivo óptimo, la enseñanza de las matemáticas debería tener como objetivo primordial el *tratamiento de la diversidad* en el aula.
- "Las *herramientas informáticas* son eficaces para mejorar la enseñanza de las matemáticas".
- "La enseñanza de las matemáticas debe dar cada vez más importancia a los *contenidos procedimentales*, esto es, a los "métodos", "estrategias", "técnicas", "procedimientos", etc. que ayudarán al alumno a "*aprender a aprender*". La amplitud y hasta la elección de los *contenidos conceptuales* son menos importantes".

Aunque estas ideas dominantes no son universalmente compartidas, delimitan el ámbito de discusión dentro del que se sitúa la problemática de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Dado que en el Sistema de Enseñanza se da por supuesto que el profesor conoce aquello que debe enseñar, *el profesor* (esto es, la instancia enseñante del sistema, que personalizamos, para simplificar, en la figura del profesor) *se ve llevado a pensar el álgebra elemental únicamente como un objeto de enseñanza*. De esta forma, como tal profesor, y al igual que sucede con la geometría, (Chevallard, 1990), no se preguntará ***"¿qué es el álgebra?"*** sino más bien:

D0. *¿Qué tengo que enseñar y cómo tengo que enseñar a mis alumnos a propósito del álgebra?* o, en otras palabras, *¿Qué conceptos y qué procedimientos algebraicos tengo que enseñar a mis alumnos y cómo tengo que enseñárselos?*

Todas las cuestiones relativas a la enseñanza y al aprendizaje del álgebra que forman parte de la *problemática docente* girarán alrededor de esta pregunta inicial. Entre dichas cuestiones podemos citar:

D1. *¿Por qué los alumnos cometen tantos errores en las manipulaciones algebraicas? ¿Por qué utilizan con más seguridad cualquier regla mnemotécnica figurativa, por arbitraria que ésta sea, que la más sencilla de las reglas algebraicas?*

D2. *¿Cómo podemos evitar la fractura que se produce en el grupo-clase cuando se inician los primeros pasos en el aprendizaje del álgebra elemental en la Enseñanza Secundaria Obligatoria?*

D3. *¿Por qué es tan difícil para la mayor parte de alumnos traducir al lenguaje algebraico las condiciones de un problema verbal? ¿Es posible enseñar este proceso de traducción? ¿Cómo?*

D4. *¿Cómo podemos coordinar la enseñanza formal del cálculo algebraico con la enseñanza de la resolución de problemas verbales? En el proceso de evaluación del aprendizaje del álgebra, ¿en cuál de los dos polos hay que poner el énfasis?*

Dado que la *problemática de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas*, tal como la hemos definido, se sitúa en un estadio previo a la constitución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica[8], no puede proporcionar, por definición, instrumentos teóricos ni técnicos, que sean verdaderamente eficaces para abordar sistemáticamente las cuestiones tal como emanan de dicha problemática. Será preciso reformular dichas cuestiones e integrarlas en una problemática más amplia antes de que puedan ser tratadas científicamente.

2. El álgebra escolar en el marco del Programa Cognitivo

El punto de vista *cognitivo* en didáctica considera el aprendizaje de las matemáticas como un *proceso psico-cognitivo* fuertemente influenciado por *factores motivacionales*, *afectivos* y *sociales*.

Se trata de uno de los primeros enfoques que sistematiza los hechos didácticos y a él le corresponde el honor de haber roto con la mentalidad precientífica en lo que se refiere al análisis de *lo didáctico*[9]. El Programa Cognitivo en didáctica de las matemáticas, que tiene como principal referente histórico la *psicología genética* de Piaget, incluye múltiples perspectivas y continúa evolucionando. Constituye, en conjunto, una importante amplia-

[8] Es evidente que existen muchas investigaciones científicas que abordan cuestiones planteadas inicialmente en la problemática de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Pero tales investigaciones, en la medida que son sistemáticas, utilizan instrumentos teóricos y técnicos que sobrepasan el ámbito de dicha problemática, reformulan los problemas iniciales y los sitúan en un marco más amplio como, por ejemplo, el marco del Programa Cognitivo.

[9] Chevallard indica que una de las causas por las que es difícil abordar científicamente *lo religioso* hay que buscarla en el hecho de que ha sido históricamente *intocable*. Por razones casi inversas, relacionadas con la *peyoración cultural y social de lo didáctico*, también ha sido y sigue siendo difícil abordar científicamente *lo didáctico* (Chevallard, 1991b). Se subraya de esta forma la importancia histórica del cambio que tiene lugar, gracias al Programa Cognitivo, en la forma de considerar *lo didáctico*: pasa de ser un objeto *precientífico*, a ser un objeto de estudio *científico*.

ción de la problemática de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y una sistematización progresiva de dicha problemática, situándola definitivamente dentro del ámbito científico.

Brousseau caracterizó este enfoque, que denominó "enfoque clásico", diciendo que, en la explicación de los hechos didácticos, considera que la *actividad cognitiva del sujeto* es central presuponiendo, además, que *dicha actividad puede ser descrita y explicada de manera relativamente independiente de los restantes aspectos de la relación didáctica* (Brousseau, 1986).

La problemática didáctica, en el marco del Programa Cognitivo, giró inicialmente alrededor de la noción de "*aprendizaje significativo*" en el sentido de Ausubel (1968) y su *objeto primario de investigación* era el ***conocimiento matemático del alumno y su evolución.*** Según Novak (1977), discípulo y colaborador de Ausubel, es esencial tomar una Teoría del Aprendizaje Humano como base para elaborar un modelo de *Curriculum* (esto es, una *serie estructurada de resultados previstos del aprendizaje*) y, a continuación, diseñar un *Programa de Instrucción* adecuado.

En este esquema hay que resaltar la Teoría Cognitiva del Aprendizaje Humano de Conceptos (Ausubel, 1968) que hacía el papel de "núcleo firme" del incipiente Programa de Investigación (Lakatos, 1978). Esto quiere decir que dicha teoría funcionaba como la parte explícitamente no cuestionable en las primeras formulaciones del Programa Cognitivo. Pero debemos subrayar aquí que la "Estructura Conceptual de la Ciencia", que era el segundo componente básico para llevar a cabo el "Análisis del Curriculum Escolar", también funcionaba, en la práctica, como un elemento transparente y no cuestionable. A lo sumo, se cuestionaba la forma de organizar mejor la Ciencia a fin de facilitar el aprendizaje significativo de los alumnos. El análisis de la Estructura conceptual de la Ciencia (en particular, de las matemáticas) consistía en investigar "secuencias y estructuras jerárquicas alternativas" de,una Ciencia que se concebía como el "conjunto de conceptos que son construidos por especialistas creativos" (Moreira y Novak, 1988, p. 10). No caben, pues, en las primeras formulaciones del Programa Cognitivo, reconstrucciones ni reorganizaciones de la matemática a enseñar que vayan más allá de variaciones en la *secuenciación* y en la *temporalización* de los contenidos científicos.

A medida que evolucionaba el Programa Cognitivo se fue poniendo de manifiesto la insuficiencia de esta noción general de "aprendizaje humano" y de los medios de que se disponía para describir el conocimiento matemático del alumno. Entonces surgió con fuerza un movimiento, el *Grupo Internacional de Psicología de la Educación Matemática* (*PME*, por sus siglas en inglés) (Bauersfeld y Skowronek 1976), que reivindicó la necesidad de tomar en consideración una especie de "*aprendizaje específicamente matemático*" (Kieran y Filloy, 1989). Los investigadores de este grupo tomaron, como nuevo objeto primario de investigación, los ***procesos de aprendizaje matemático del alumno*** y empezaron a construir instrumentos para describir dichos procesos. Posteriormente, en 1985, un grupo de trabajo del PME centró su interés en el "*Pensamiento Matemático Avanzado*" (Advanced Mathematical Thinking), profundizando la problemática del Programa Cognitivo y centrándola en la elaboración de un *modelo de los procesos cognitivos que intervienen en la construcción de nociones y conceptos matemáticos* (Dubinsky, 1991).

A lo largo de toda esta evolución, cuya complejidad no pretendemos describir ni siquiera esquemáticamente en este trabajo, el Programa Cognitivo en didáctica de las matemáticas no ha dejado nunca de postular, de una manera más o menos explícita:

(a) Que su objeto primario de investigación lo constituyen determinados *procesos cognitivos del sujeto* los cuales, aunque se han ido enriqueciendo con otros aspectos de la relación didáctica (lingüísticos, lógicos, epistemológicos y sociales), no han dejado nunca de ser considerados el centro de la problemática didáctica.

(b) Que la *actividad docente* tiene una influencia decisiva sobre los *procesos de construcción del conocimiento matemático del alumno*. Se considera que el profesor es un *mediador directo e inmediato* entre la *matemática a enseñar* y los *procesos cognitivos de los alumnos* que se toman entonces como el *sistema enseñado.*

Dentro del Programa Cognitivo, y en lo que respecta al tratamiento de la problemática del álgebra escolar, distinguiremos dos tipos de perspectivas[10]: las ***conceptualistas primitivas***, que tienden a identificar el álgebra escolar con un *sistema de conceptos*, tomando los conceptos como cajas negras sin estructura; y las ***psicolingüísticas***, que amplían la perspectiva puramente conceptualista para incluir la dimensión de *lenguaje* que posee el álgebra escolar. Se trata de una clasificación reduccionista, dada la enorme complejidad de perspectivas que conviven dentro del Programa Cognitivo. Debería cruzarse con otra que, en lugar de definir las perspectivas en función de las diferentes formas de interpretar la naturaleza del álgebra escolar, lo hiciese en función del protagonista de la relación didáctica (el profesor o el alumno). Tendríamos entonces perspectivas centradas en el ***alumno*** (en las que destacarán estudios relativos al *desarrollo del pensamiento algebraico del alumno* y al *proceso de aprendizaje del álgebra*, con un análisis específico de las dificultades, obstáculos y errores que este aprendizaje comporta); y perspectivas centradas en el ***profesor*** –o en el proceso de enseñanza- que incluirían, en particular, estudios relativos a los *procedimientos o métodos de enseñanza del álgebra* (Bazzini, Gallo y Lemut, 1996).

Intentaremos introducir algunos elementos de esta segunda clasificación, pero seguiremos subrayando la distinción entre las perspectivas *conceptualistas* y las *psicolingüísticas*. Consideramos, y trataremos de mostrar en lo que sigue, que la toma en consideración del componente psicolingüístico, unida a la utilización de una *teoría pragmática del significado*, ha provocado un cambio de dirección en el interior del Programa Cognitivo.

2.1. El álgebra es un sistema de conceptos: perspectivas conceptualistas primitivas

Cuando se toman como *objeto primario de investigación* los *procesos de construcción y adquisición de determinados conceptos matemáticos*, asumiendo de una forma más o menos explícita un *modelo conceptualista de la matemática escolar*, esto es, una interpretación de la matemática escolar en términos de un sistema o red de conceptos que el alumno va a construir a través de su experiencia en el aula, entonces hablaremos de *perspectivas conceptualistas primitivas*. Según Rojano (1994), éstas eran las perspectivas dominantes durante la década de los setenta y gran parte de los ochenta. A lo largo de ese periodo, y en

[10] En otro trabajo (Gascón, 1999b) hemos añadido una tercera perspectiva dentro del Programa Cognitivo: la perspectiva ***proceptualista*** que se caracteriza por modelizar los procesos cognitivos asociados a la construcción y al desarrollo de los conceptos matemáticos. El nombre proviene de la abreviatura "***procept***" referida a aquellos objetos de enseñanza que tienen la doble naturaleza de ***proceso*** y ***concepto***. Dicha perspectiva ha surgido principalmente de los trabajos de Tall y Dubinski y suele integrarse dentro del llamado Advanced Mathematical Thinking o, recientemente, en la denominada *APOS Theory* (Asiala y otros, 1996).

lo que a la problemática del álgebra escolar se refiere, se hicieron, incluso, adaptaciones del modelo piagetiano de las *etapas del desarrollo de los conceptos* para poder aplicarlo a las interpretaciones que hacen los alumnos de los símbolos literales (Küchemann, 1981).

Muchas de las investigaciones que pueden incluirse en estas perspectivas conceptualistas parten del *estudio empírico de los errores que cometen los alumnos al pasar de la aritmética al álgebra*. El conjunto de dificultades con las que se enfrentan los alumnos en dicho tránsito (como, por ejemplo: la inadecuada interpretación de las letras; la ausencia de formalización de los métodos de resolución de los problemas aritméticos; y la incorrecta interpretación de la notación y de los convenios algebraicos), se han intentado explicar (Booth, 1984, pp. 87-92) como una consecuencia de los "*errores conceptuales*" de los alumnos, presuntamente originados en la enseñanza de la aritmética.

En otros casos (Matz, 1982), ciertos errores que aparecen en el cálculo algebraico se intentaron explicar apelando a que los alumnos extrapolan una regla, mentalmente construida a partir de ciertos *prototipos*, a otra situación en la que no es aplicable. Así, el prototipo:

$$(B+C)/A = B/A + C/A$$

daría origen al error:

$$A/(B+C)= A/B+A/C$$

Este punto de vista ha sido fuertemente criticado desde una perspectiva cognitivista más sofisticada, como es la basada en la *teoría de los campos conceptuales* inaugurada por Vergnaud[11]. Desde esta perspectiva se intenta explicar la aparición de los errores a partir de una modelización del trabajo cognitivo en términos de *invariantes operatorios* tales como la *conservación de la igualdad*, el *control algebraico* (que permite explicar los errores que cometen incluso alumnos muy avanzados en su construcción conceptual) y el *respeto a la jerarquía de las operaciones aritméticas* (Cortés, 1992).

[11] La teoría de los Campos Conceptuales requeriría, por su importancia y su originalidad, un estudio especial que no podemos hacer aquí. Esta teoría se sitúa explícitamente dentro del Programa Cognitivo: "La théorie des champs conceptuels est una théorie cognitiviste, qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des compétences complexes, notamment de celles qui relèvent des sciences et des techniques. Du fet qu'elle offre un cadre pour l'aprentissage, elle intéresse la didactique; mais elle n'est pas à elle seule une théorie didactique" (Vergnaud, 1991). Pero esta perspectiva incluye en su núcleo firme una modelización explícita y muy operativa del *concepto* como un trío de conjuntos: **C=(S, I, *s*)**, donde **S** es el conjunto de situaciones –identificadas inicialmente con "tareas"- que dan sentido al concepto (la referencia); **I** es el conjunto de invariantes sobre los que descansa la operatividad de los esquemas (el significado); ***s*** es el conjunto de formas de representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos útiles para tratar dichas situaciones (el significante). Además, y aunque la teoría de los Campos Conceptuales no es específica de las matemáticas, cuando intenta explicar los procesos de conceptualización progresiva de las estructuras aditivas, de las estructuras multiplicativas, de las relaciones número-espacio o del álgebra, toma como punto de partida modelos epistemológicos de los conceptos matemáticos involucrados: "Certains cherchers privilégient, pour cette analyse, des modèles de la complexité relevant soit de la linguistique, soit des théories du traitement de l'information. La théorie des champs conceptuels privilégie au contraire des modèles qui donnent un rôle essentiel aux concepts mathématics eux-mêmes." (Ibid, p. 146). En resumen, la teoría de los Campos Conceptuales podría ser considerada como una perspecticva a caballo entre los Programas Cognitivo y Epistemológico.

Según Kieran y Filloy (1989) muchas investigaciones sobre álgebra hechas en el marco del PME se centraron (durante la década de los ochenta) en el estudio de la manera como los estudiantes llevan a cabo la *resolución de ecuaciones*. Dichas investigaciones estudiaban de qué manera el modelo o concepción implícita primitiva que tienen los estudiantes respecto del concepto de "*ecuación*", y que se pone de manifiesto en la manera como enfocan su resolución, permitía explicar los hechos que se observan en la actividad escolar de resolver ecuaciones.

En términos generales, podemos decir que la mayoría de las explicaciones propuestas dentro de las perspectivas conceptualistas primitivas presuponen que el *marco de referencia aritmético* -esto es, el hecho de que los adolescentes, al comenzar el estudio del álgebra, continúan utilizando las nociones y los enfoques que usaban en aritmética (Kieran y Filloy, 1989)- puede dar cuenta de las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje inicial del álgebra y de los errores que cometen.

Es lógico, por tanto, que muchos de los problemas de investigación didáctica detectados y luego abordados desde estas perspectivas conceptualistas primitivas tomen en consideración, aunque sea implícitamente, la incidencia de dicho marco aritmético sobre las concepciones de los estudiantes. Citaremos a continuación algunos de estos problemas[12]:

PC1. *¿Cuáles son las concepciones espontáneas de los alumnos respecto de los conceptos fundamentales del álgebra como, por ejemplo, los conceptos de "variable" y "ecuación"? ¿De qué forma influyen dichas concepciones sobre las dificultades y errores que cometen los alumnos cuando realizan tareas como, por ejemplo, la resolución de ecuaciones, en las que intervienen dichos conceptos?*

PC2. *¿Cómo podrían utilizarse las semejanzas y diferencias entre las estructuras conceptuales de los alumnos y las correspondientes estructuras de los sistemas de conceptos matemáticos, a fin de potenciar el aprendizaje significativo?*

PC3. *¿Cómo deben ser modificadas las prácticas tradicionales de enseñanza para ayudar a los estudiantes a construir (o adquirir) los conceptos algebraicos?*

En general, postulamos que para generar un ***tipo de problemas de investigación didáctica***, dentro de las *perspectivas conceptualistas primitivas*[13], se parte del sistema de

[12] Los problemas que se citan a continuación lo son únicamente a título de ejemplo. Hemos intentado presentar problemas verdaderamente relevantes para cada una de las perspectivas teóricas que presentamos, pero sin presuponer ningún tipo de jerarquía entre los problemas enunciados.

[13] Conservamos el adjetivo "primitivas" para distinguir estas perspectivas conceptualistas de las que hemos denominado "*proceptualistas*" y que, en cierta forma, también podrían denominarse "perspectivas conceptualistas sofisticadas" (Gascón, 1999b). Estas últimas se han integrado recientemente bajo la denominación de *APOS Theory* (Asiala y otros, 1996). Las siglas se refieren a las nociones básicas que, según estas perspectivas, permiten describir la construcción de conceptos matemáticos: A=Acción; P=Proceso; O=Objeto y S=Esquema (Scheme).

conceptos matemáticos involucrados en una determinada actividad "algebraica" (como, por ejemplo, la resolución de ecuaciones) y de un modelo de los procesos cognitivos que intervienen en la construcción de dichos conceptos. Dichos procesos cognitivos se describen con la ayuda de nociones de cierta teoría cognitiva del aprendizaje matemático que suele quedar más o menos implícita.

2.2. El álgebra es más que conceptos: perspectivas psicolingüísticas

En el desarrollo de la investigación relativa a la enseñanza del álgebra escolar llegó un momento en el que las explicaciones puramente conceptualistas aparecieron como claramente insuficientes e inoperantes. En la década de los ochenta empezó a surgir el interés por el estudio de los aspectos *semántico* y *sintáctico* de las matemáticas en general y del álgebra en particular, a fin de poder explicar las observaciones empíricas acerca de las interpretaciones que dan los estudiantes a los símbolos matemáticos (Rojano, 1994).

Dentro de la nueva perspectiva hay que citar el trabajo de Freudenthal (1983)[14] que intenta caracterizar el lenguaje algebraico en contraposición, pero también en relación, al lenguaje natural y al lenguaje aritmético, a partir de los cuales, se supone, el alumno debe adquirir el lenguaje algebraico.

Empiezan así a desarrollarse las ***perspectivas psicolingüísticas*** que amplían el antiguo conceptualismo prolongándolo para incluir el *lenguaje*. Estas perspectivas se mantienen dentro del Programa Cognitivo aunque, como veremos, transforman de manera significativa el tipo de problemas a estudiar debido a que la matemática escolar pasa de ser considerada *una red de conceptos que el alumno ha de construir*, a ser considerada, también, *un lenguaje que puede ser enseñado*. Se amplía de esta forma la perspectiva conceptualista: se trata de *analizar el discurso considerado como el resultado de una actividad conceptual* (Laborde, 1990).

Tomando como modelo de referencia la Lingüística General, se estudia el paso del *Lenguaje Aritmético* al *Lenguaje Algebraico* así como la influencia del *Lenguaje Natural* en dicho tránsito (siempre enmarcado en una actividad conceptual). Algunos investigadores como Clement (1982) y Cooper (1984) han señalado la importancia de factores lingüísticos provenientes de la sintaxis del lenguaje natural que afectan o dificultan su traducción al lenguaje algebraico. Otros autores consideran que muchas de las dificultades que tienen los alumnos para utilizar el lenguaje algebraico tienen su origen en el estudio de la aritmética y, especialmente, en el paso de la aritmética al álgebra (Reggiani, 1994). En términos generales, podríamos decir que desde las perspectivas psicolingüísticas se considera que los alumnos de 12-16 años cuando se empiezan a enfrentar con problemas algebraicos verbales no logran integrar el *manejo sintáctico del álgebra* en su actividad de resolución de problemas.

[14] Este trabajo marca una nueva línea de desarrollo del Programa Cognitivo que no incluiremos en nuestra reconstrucción racional. Digamos, únicamente, que su "análisis fenomenológico" de un concepto o de una estructura matemática consiste en describir cuáles son los "fenómenos" (objetos de nuestra experiencia matemática) para los que el concepto o la estructura matemática en cuestión es el "medio de organización" (¿modelización?) y cuáles son las relaciones mutuas entre los "fenómenos" y los "medios de organización" correspondientes. Dado que los objetos matemáticos se incorporan al mundo de nuestra experiencia a través de los *objetos ostensivos* -sonidos, grafismos y gestos- que se manipulan en la actividad matemática (Bosch, 1994), se convierten en nuevos "fenómenos" que, a su vez, requieren nuevos medios de organización y así sucesivamente.

Kaput (1987) describió el fenómeno de la "*alienación del álgebra*" provocada por el *manejo escolar de un sistema simbólico formal aislado* de todo contexto que pudiese dar significado a dichas acciones. En un trabajo más reciente este autor continúa considerando que el álgebra que se enseña en EEUU ha ido evolucionando hasta convertirse en una "manipulación de cadenas de caracteres alfanuméricos guiada por varios principios sintácticos y convenciones, interrumpidas de manera ocasional por "aplicaciones" de problemas cortos presentados por textos breves de estilo peculiar" (Kaput, 1996). Surge así la *problemática inicial* de las investigaciones psicolingüísticas sobre el álgebra escolar:

PS1. *¿Cómo adaptar la semántica algebraica (de los símbolos y de las operaciones algebraicas) a las situaciones que están presentes en los enunciados de los problemas verbales que hay que resolver algebraicamente?*

Dicha problemática puede ser interpretada como el resultado de la disociación *semántica/sintaxis*. Inicialmente, las perspectivas psicolingüísticas pusieron el acento en la disociación *semántica/sintaxis* relativa a los ***conceptos*** y a los ***métodos***. Se estudiaron, por tanto, por un lado las posibilidades que tiene el alumno de "*dar sentido a los conceptos*" que se pretende que adquiera y, por otro, la naturaleza de los métodos que utiliza. En esta segunda dirección se llegó a clasificar a los alumnos según que prefieran (se supone que "espontáneamente") métodos "sintácticos" o "semánticos" en la resolución de ecuaciones (Filloy y Rojano, 1989).

Pero, a medida que se desarrolla la perspectiva psicolingüística va tomando cuerpo la convicción de que, en el caso del álgebra, no parece suficiente con dar sentido únicamente a los conceptos. Aunque en álgebra hay conceptos que se deben enseñar, como: "*variable*", "*operación*", "*polinomio*" y "*ecuación*", también es cierto que: "... en álgebra ciertos objetos de enseñanza no son conceptos. La escritura "$ax+b$" es una expresión bien formada y, como tal, tiene significado. La cuestión de saber si el alumno atribuye efectivamente un significado a esta escritura, y cuál, es crucial en didáctica del álgebra. Pero "$ax+b$" no es un concepto en el mismo sentido que "*multiplicación*" o "*plano afín*" (Drouhard, 1992, p. 6).

Aunque la complejidad de *perspectivas psicolingüísticas* hace difícil proponer un único esquema del proceso de generación de un tipo de problemas de investigación didáctica, puede decirse que, en general, se parte del análisis del discurso matemático considerado como el resultado de una actividad matemática que inicialmente se identificaba con una *actividad conceptual* y que, en los últimos enfoques, se integra en una *actividad de resolución de problemas*. Dicho análisis se lleva a cabo con la ayuda de algunas nociones que se extraen de la Lingüística General y de una Teoría del Aprendizaje Matemático que toma en consideración, además de los elementos conceptuales, las dimensiones procedimental, lingüística y social. Ambas teorías (que juegan el papel de "núcleo firme") se mantienen a un nivel *paradidáctico*, esto es, se utilizan en los análisis didácticos sin ser explicitadas suficientemente ni, muchos menos, ser susceptibles de contrastación empírica a partir de los hechos didácticos[15].

[15] Hemos visto que, en el marco de las perspectivas psicolingüísticas, diversos autores utilizan, como instrumentos de su análisis didáctico, nociones lingüísticas tales como "sintaxis", "semántica", "sentido" y "gramática", sin proponer que la didáctica de las matemáticas tematice dichas nociones, esto es, las tome como objetos de estudio en sí mismas. Resulta entonces que dichos objetos aparecen en el discurso didáctico como "transparentes" y no problemáticos. Esta caracterización responde exac-

Paralelamente a la evolución de las perspectivas psicolingüísticas se observa, como no podría ser de otra forma, una evolución del modelo epistemológico de las matemáticas que dichas perspectivas sustentan de una forma más o menos explícita. Esquemáticamente podría decirse que después de interpretar la matemática escolar como un *lenguaje que puede ser enseñado* (punto de vista que, como hemos dicho, ampliaba la anterior perspectiva conceptualista), se tiende a interpretar la matemática escolar cada vez más como una *actividad de resolución de problemas* en la que el *lenguaje algebraico* juega un papel crucial. Es en este contexto en el que las nuevas perspectivas psicolingüísticas (así como otras perspectivas que, en cierta forma, rebasan el marco psicolingüístico) plantean la problemática de la *discordancia de significados*, tal como se describe a continuación.

2.3. Discordancia de significados en las perspectivas psicolingüísticas

La mayoría de investigaciones didácticas que tratan, de una forma más o menos central, la problemática del *sentido* o del *significado*, utilizan una versión psicolingüística de la noción de *significado*. Esto quiere decir que, de una forma más o menos explícita, dicho término se emplea de una manera próxima a como proponen Godino y Batanero (1998), apoyándose en la noción de *función semiótica* descrita por Eco (1976):

(i) Un plano de expresión (considerado frecuentemente como el *signo*)
(ii) Un plano de contenido (*significado del signo*, esto es, lo representado, lo que se quiere decir).
(iii) Un *código interpretativo* que regula la correlación entre los planos de expresión y de contenido.

Podríamos suponer que debido precisamente a la utilización de una noción psicolingüística de "significado", se toman inicialmente como "signos" (capaces de tener un "significado") objetos matemáticos relativamente puntuales tales como las "incógnitas", los "conceptos", las "expresiones algebraicas" y las "ecuaciones", quizá por ser objetos culturalmente análogos a las "ideas", las "palabras" y las "oraciones gramaticales". Se postula, entonces, que dicha noción de "significado" es un factor clave en didáctica de las matemáticas porque, supuestamente, permite describir y hasta explicar, ciertos hechos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y, en especial, del álgebra, a partir de la ***discordancia** entre el "significado" que adjudica el profesor (o la institución escolar) y el que adjudican los alumnos a dichos objetos matemáticos.* Proponemos a continuación algunas de las principales maneras de interpretar esta *discordancia*, así como los correspondientes tipos de problemas que originan.

(a) Esta discordancia puede ser debida, en algunos casos, a que los alumnos (por las razones que sea) no asignan ningún significado a determinados objetos matemáticos, esto

---

tamente a lo que hemos denominado "*objetos paradidácticos*" (Gascón, 1998, pp. 14-17) y, por tanto, no es posible imaginar ningún conjunto de hechos didácticos que constituyan la base empírica que obligue a modificar alguna de las teorías lingüísticas en las que aparecen dichas nociones. Esta constatación, por lo demás trivial, pone de manifiesto que determinados usos, dentro del análisis didáctico, de nociones paradidácticas, no son compatibles con las reglas de funcionamiento normal de las disciplinas científico-experimentales.

es, el significado que les asignan es "vacío". Esta sería la situación en la que, según Kaput (1987), se encuentran los alumnos de la escuela secundaria americana cuando se ven abocados a manipular sistemas simbólicos aislados de todo *contexto significativo*. Es por esta razón que se plantea el problema **PS1** enunciado anteriormente.

(b) Radford y Grenier (1996), sitúan la *causa del vacío de significación que tienen las ecuaciones para los alumnos* (y, por tanto, la discordancia con el significado que tienen las ecuaciones en la institución escolar) en el brusco *salto de abstracción* al que se les somete (en comparación, por ejemplo, con la lentitud de la génesis y del desarrollo histórico de las ecuaciones). Critican la precipitada introducción del álgebra escolar y la consiguiente imposición al alumno de un "*lenguaje simbólico complejo y sin significación precisa*". Consideran que un símbolo sin un apoyo sobre lo concreto (o sobre otro símbolo con contenido semántico no vacío) no representa nada, es sólo un trazo.

Según estos autores existen dos grandes tipos de investigaciones que estudian la problemática que gira alrededor de los *símbolos algebraicos* y su *significado*. Las investigaciones del primer tipo pretenden explicar la *adquisición de la sintaxis algebraica* por el alumno y están centradas: en la detección y comprensión de los errores que cometen los alumnos en la utilización del lenguaje algebraico (Matz, 1980); en el estudio de las dificultades que sufren los alumnos en la adquisición del lenguaje algebraico en la resolución de ecuaciones (Filloy y Rojano, 1984); o bien, en el problema de la traducción al lenguaje algebraico de proposiciones numéricas enunciadas en lenguaje natural (Bell y Malone, 1993; Burton, 1988; Kaput, 1983). Las investigaciones del segundo tipo tienen por objetivo explicar el *paso del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico en la resolución de problemas verbales* (Bednarz, Radford, Janvier y Lepage, 1992; Bednarz y Janvier, 1994). Se ha descuidado, según estos autores, el estudio de las relaciones entre ambos tipos de investigaciones. En este sentido, pueden plantearse los siguientes problemas de investigación didáctica que, al parecer, han recibido muy poca atención:

PS2. *¿Cuál es el papel que juegan los* símbolos *en la apropiación por parte de los alumnos de las* ideas algebraicas básicas *en el contexto de la resolución de problemas verbales? ¿Cuáles son las* ideas *representadas mediante los* símbolos *del álgebra escolar? ¿Cómo podemos crear en el aula situaciones que lleven a los alumnos a desarrollar las* ideas *que deberán ser representadas mediante los* símbolos *del álgebra escolar? ¿Cómo debemos orientar, en el aula, las actividades destinadas a estimular las relaciones entre los* símbolos *y las* ideas*?*

Radford y Grenier afirman que las relaciones entre los *símbolos* y las *ideas* constituyen hasta tal punto un problema abierto en el caso de las matemáticas que podría hacerse la hipótesis siguiente: cada forma de considerar la relación *idea-símbolo* se corresponde con una "conceptualización de los objetos matemáticos", esto es, con un modelo epistemológico de los objetos matemáticos.

(c) Para Sfard y Linchevski (1994), el origen de muchas de las dificultades de los alumnos, radicaría en que mientras éstos tienden a adjudicar un *significado rígido a una expresión algebraica*, el profesor puede interpretarla desde puntos de vista muy diferentes en función de la situación o el problema de que se trate. Así, por ejemplo, la expresión

$$7\,(x+3)+5$$

suele ser interpretado rígidamente por los alumnos como un *número determinado aunque desconocido*, mientras que el profesor puede interpretarlo, además, según el contexto en el que dicha expresión aparezca, ya sea como la descripción de un *proceso computacional*, como una *función*, como un *polinomio*, o como una *cadena de símbolos* que no significa nada (esto es, como un *objeto algebraico* en sí mismo). Dado que esta pluralidad de perspectivas que pueden tomarse ante una expresión algebraica constituye una de las principales causas de la fuerza del álgebra, surge el siguiente problema de investigación didáctica:

PS3. *¿Cómo hacer de los estudiantes "activos buscadores de* sentido"*? ¿Cómo ayudar a los estudiantes a interpretar las situaciones y sus propias acciones y asignar el significado adecuado en cada caso a los símbolos y a las operaciones?*

(d) Trigueros (1997 y 1999) basándose en la teoría desarrollada por Dubinsky y sus colaboradores (Asiala y otros, 1996) sobre la idea de la descomposición de un concepto matemático, sitúa asimismo la causa de los errores de los estudiantes que empiezan sus estudios universitarios, en el ámbito del álgebra, en el *desajuste entre el significado que adjudican los estudiantes y el que asigna el profesor* (o la institución) *al concepto de variable*; siendo éste último mucho más rico y complejo. Trigueros postula que el concepto de *variable* se caracteriza por una enorme multiplicidad de facetas y por las relaciones que se establecen entre ellas. Entre dichas facetas destacan, en el ámbito de la matemática elemental: la variable como *incógnita*, la variable como *número general* y la variable en la *relación funcional*. El nuevo tipo de problemas de investigación didáctica que surge desde esta perspectiva puede formularse como sigue:

PS4. *¿Cómo construir un concepto determinado (por ejemplo, el de variable) de manera que integre sus diferentes aspectos (o significados) como componentes de un mismo objeto matemático?*

(e) Algunos autores, como Arzarello-Bazzini-Chiappini (1994), utilizan el triángulo semiótico de Frege (1892) para distinguir entre *sentido* y *denotación* (o *referencia*) de una expresión algebraica. Mientras la *denotación de una expresión algebraica* se identifica con el conjunto numérico (o con la función) que representa dicha expresión, el *sentido de una expresión* se identifica con la forma cómo dicho conjunto (o función) viene dado mediante la expresión simbólica en cuestión. En el caso de las expresiones algebraicas puede hablarse de *sentido algebraico* como sinónimo de "estructura algebraica"; así la expresión

$$2\,(2x+1)$$

tiene diferente *sentido algebraico* que la expresión

$$4x+2$$

porque dichas expresiones involucran reglas computacionales diferentes, aunque *denotan el mismo conjunto* (o la misma función). Hay que tener en cuenta, además, el *sentido contextualizado* de una expresión algebraica que puede considerarse como la correspondencia entre el *dominio de conocimiento específico* al que la expresión hace referencia y la *estructura sintáctica de la expresión* (en la que se ha incorporado el *sentido algebraico* y la *denotación*). Así el sentido contextualizado de la expresión

$$2(2x+1)$$

podría ser en un caso "el doble de un número impar" y en otro "el área de un rectángulo". Desde esta perspectiva el *significado de un problema* emerge precisamente de este sentido contextualizado de las expresiones algebraicas que se utilizan para resolverlo. Uno de los nuevos tipos de problemas de investigación didáctica que se plantea en esta perspectiva, puede formularse como sigue:

PS5. *¿Qué papel juega la interacción entre el "sentido" y la "denotación" de las expresiones simbólicas en el pensamiento algebraico en situación de resolución de problemas? En particular, ¿qué papel juega dicha interacción durante el proceso de asignar nombres a los elementos del problema?*

Desde este punto de vista "hacer álgebra" se identifica con un proceso de interacciones recíprocas entre el "sentido" y la "denotación", esto es, con un juego de interpretaciones. Se comprende entonces que, desde esta perspectiva, se intenten explicar los errores y dificultades que tienen los estudiantes para utilizar el lenguaje algebraico en la resolución de problemas, postulando que dichos estudiantes identifican "sentido" y "denotación" y, en consecuencia, consideran que las expresiones simbólicas se denotan únicamente a sí mismas, confundiendo y reduciendo el álgebra a una pura sintaxis (Bazzini, Gallo y Lemut, 1996).

(f) Drouhard (1992) también utiliza el triángulo semiótico de Frege, aunque de una forma ligeramente distinta. Su problemática inicial está muy centrada en la *sintaxis algebraica*. Se plantea problemas del tipo:

PS6. *¿Cómo podemos describir mediante un modelo lingüístico, una gramática, los "sistemas" de "Escrituras Simbólicas en Álgebra elemental"(ESA)? O bien, ¿Cómo elaborar un sistema que modelice las prácticas efectivas de los "expertos" en el dominio del cálculo algebraico elemental formal?*

Puede responderse a la primera cuestión con la tesis de que las ESA constituyen un "lenguaje" en el sentido de Chomsky (1965), es decir, un conjunto potencialmente infinito de expresiones bien formadas generadas por una *gramática*, esto es, por un conjunto finito de reglas de reescritura. Las *transformaciones* de las ESA pueden asimismo ser descritas aunque no de una forma sencilla. De hecho, la modelización didácticamente pertinente de la factorización (como ejemplo de transformación) ya es terriblemente compleja.

Y es precisamente para responder a la segunda cuestión cuando se utilizan las nociones de *sentido* y *denotación* (o *referencia*) introducidas por Frege. De esta forma se intentan reinterpretar las producciones sintácticas de los alumnos y, muy en particular, los errores algebraicos que eran interpretados invariablemente en las perspectivas conceptualistas como meros *errores conceptuales*. Desde esta perspectiva se postula que para que el alumno comprenda la *significación de una escritura algebraica* debe tomar en cuenta conjuntamente:

(i) Su *sintaxis*, esto es, el hecho de que se trate de una escritura algebraica "*bien formada*".

(ii) Su *denotación*, lo que comporta saber que el *valor de verdad de un enunciado* (que es su *denotación* -o *referencia*- según Frege, 1892, p. 62) se puede calcular en todo momento y saber cuando es interesante hacerlo.

(iii) Su *sentido*, lo que comporta respetar ciertas meta-reglas de elección de las transformaciones que utiliza. Sólo en ese caso el alumno da *sentido* a lo que hace, aunque no tenga en cuenta la *denotación*. De todas formas, sin tener en cuenta la *denotación*, el *sentido* se convierte en un mero automatismo formal y ciego.

(iv) Su *interpretación* con relación al contexto o sistema, sea éste matemático o extramatemático, del cual ha surgido la escritura algebraica en cuestión.

2.4. Perspectivas próximas al Programa Epistemológico

En la compleja evolución (que reconstruimos aquí *racionalmente* sin pretender describir una presunta evolución *histórica*) de la problemática del *significado*, puede observarse una ampliación progresiva de los "objetos" que son susceptibles de tener un "significado". A los "conceptos" y los "métodos", se añaden las "expresiones bien formadas" y algunos objetos matemáticos relativamente puntuales como, por ejemplo, el "signo igual", los "signos de las operaciones", la "variable" y la "ecuación", entre otros. Se acaba por intentar adjudicar un significado a objetos mucho más globales como son el "lenguaje simbólico", las "ideas algebraicas" y los propios "problemas".

Esta evolución, lejos de ser fortuita, pone de manifiesto cómo evoluciona paralelamente la manera de interpretar el álgebra en el ámbito de la matemática escolar: se pasa de considerar el álgebra como el *lenguaje prototípico* en el marco de una matemática escolar entendida como un *lenguaje que puede ser enseñado* –y entonces el ***lenguaje algebraico*** es el objeto principal de la investigación-, a interpretarla como el *instrumento principal* de una actividad matemática más rica que es considerada esencialmente como una *actividad de resolución de problemas* –y, en este caso, el objeto primario de la investigación es *el papel del* ***instrumento algebraico*** en la *actividad matemática*. En la medida que la citada *actividad matemática* toma un papel central entre los objetos de estudio, podemos hablar (desde el punto de vista de nuestra reconstrucción racional que, naturalmente, no es un punto de vista "neutral") de "perspectivas próximas al Programa Epistemológico". Estas perspectivas se alejan cada vez más de la interpretación del álgebra escolar como simple "aritmética generalizada" (Gascón, 1994 y 1999a).

2.4.1. Perspectiva semiótico-antropológica

Godino y Batanero (1998) dan un paso en esta dirección subrayando la necesidad de progresar en el desarrollo de una *semiótica específica* que estudie los sistemas de signos matemáticos puestos en juego en el seno de los sistemas didácticos. Proponen asignar un "significado" no sólo a las *entidades conceptuales* o *generalizaciones* (*significado intensional*) y a los *medios expresivos* (*significado notacional*), sino también a un tercer tipo de entidades u objetos matemáticos que denominan *situaciones-problema*[16] (*significado extensional*).

Se define (o modeliza) el *significado de un objeto matemático* como el *sistema de prácticas* que se llevan a cabo, personal o institucionalmente, con un campo de problemas del que emerge dicho objeto (Godino y Batanero, 1994). A su vez se identifica la *práctica* con una secuencia de *funciones semióticas* que, como tales, son establecidas por una persona en un contexto determinado, con una *intención* comunicativa u operativa. De esta forma es posible tomar en consideración las dos facetas de los sistemas de signos matemáticos: la faceta semiótica –esto es, la función de estar en lugar de algo– y la faceta antropológica –esto es, el papel de instrumento para la acción real o imaginada–.

Se pretende de esta forma complementar el enfoque antropológico de lo didáctico, propuesto inicialmente en Chevallard (1985, 1991a y 1992), subrayando la importancia especial de los *procesos semióticos* y, en particular, (re)introduciendo como objeto primario de investigación el *acto interpretativo* involucrado en toda función semiótica y que, según los autores, puede ser equiparado al "*acto de comprensión*" descrito por Sierpinska (1994). Se pretende relacionar los significados personales de los objetos matemáticos con los correspondientes significados institucionales[17]. Las explicaciones de las dificultades de aprendizaje, de los errores y de los fallos de ejecución de una tarea, por ejemplo en el ámbito del álgebra escolar, deberían buscarse en el hecho de que los estudiantes actúan según una interpretación de la situación que es diferente a la pretendida por el profesor (Godino y Batanero, 1998, p. 14). Desde esta *perspectiva semiótico-antropológica* aparece un nuevo tipo de problemas de investigación didáctica:

PSA. *¿Cuáles son los significados institucionales asociados al uso del término "álgebra" en los distintos niveles de la Enseñanza Secundaria? ¿Cuáles son los significados personales de los alumnos en lo que se refiere al "álgebra" en sus respectivos contextos institucionales? ¿Qué cambios instruccionales podrían realizarse para mejorar el acoplamiento progresivo de los significados institucionales y personales con relación al álgebra en la Enseñanza Secundaria?*

Este acercamiento hacia la actividad matemática considerada globalmente provoca no sólo una importante ampliación de la problemática del significado, sino un cambio profundo de la misma, situándola a medio camino entre las *perspectivas psicolingüísticas* y la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997 y Chevallard, 1999) que será descrita en la segunda parte de este trabajo.

[16] Godino y Batanero proponen una ontología matemática en la que tienen cabida cinco tipos de entidades u "objetos matemáticos" considerados como objetos emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas: (1) "ostensivos" (registros expresivos); (2) "extensivos" (situaciones-problemas); (3) "actuativos" (operaciones, técnicas); (4) "intensivos" (conceptos, proposiciones); y (5) "validativos" (argumentaciones) (Godino y Batanero,1998).

[17] Esto es, se trata de relacionar los "sistemas de prácticas personales" (significado personal) con los "sistemas de prácticas institucionales" (significado institucional) en torno a un objeto matemático determinado que puede ser de cualquiera de los cinco tipos citados en la nota anterior. La institución de referencia es aquí la comunidad matemática escolar.

2.4.2. Perspectiva cognitivo-antropológica

Surgen nuevas cuestiones relacionadas con la naturaleza de la actividad matemática: ¿Es reducible a ciertos *procesos semióticos*? ¿Puede ser analizada en términos de los correspondientes *procesos cognitivos*? ¿Cuál es, en definitiva, el papel de la dimensión *semiótico-cognitiva* en el análisis didáctico de la actividad matemática?

En Boero (1996) se abordan algunas de estas cuestiones poniendo el acento en el *papel de las transformaciones algebraicas en la actividad matemática* (en especial, en la actividad de resolución de problemas) y su relación con los *procesos cognitivos* que dichas transformaciones requieren. Desde una *perspectiva* que nos atrevemos a denominar "*cognitivo-antropológica*", puesto que utiliza explícitamente elementos del enfoque antropológico (como mostraremos en la segunda parte de este trabajo) junto a determinados análisis cognitivos, se plantean nuevos problemas de investigación:

PCA1: *¿Cómo depende la posibilidad de escribir expresiones algebraicas útiles para resolver un problema, de la relación dialéctica que se establece entre los dos polos de la actividad:* (1) *el dominio de los* patrones estándar *de transformación de fórmulas algebraicas y* (2) *la utilización de la* anticipación*?*[18]

Las transformaciones de la estructura matemática de un problema, si son pertinentes y van en la dirección adecuada, constituyen un instrumento crucial en la resolución de problemas algebraicos. Los hechos experimentales ponen de manifiesto que la posibilidad de llevar a cabo dichas transformaciones depende de que el sujeto haya establecido una *relación dinámica y funcional* entre los dos polos citados. A pesar de ello, se constata que en la enseñanza del álgebra escolar hay un gran desequilibrio entre los ejercicios que pretenden desarrollar únicamente el dominio de los *patrones estándar de transformación de fórmulas* (que son la inmensa mayoría), y aquellos que serían útiles para desarrollar la *anticipación* (que están prácticamente ausentes).

En Boero (1998) se presentan las *inecuaciones* como un objeto de estudio paradigmático para demostrar la tesis principal de este trabajo que consiste en afirmar la necesidad de tomar en consideración la *dimensión cognitiva* en didáctica de las matemáticas. Se intenta apoyar esta tesis planteando problemas didácticos relevantes que, presuntamente, no pueden ser abordados sin tener en cuenta la citada dimensión cognitiva. Entre dichos problemas, podemos citar:

[18] La ***anticipación*** es el *proceso mental* a través del cual el sujeto prevé la configuración final –y/o alguna configuración intermedia- de una expresión algebraica útil para resolver el problema, así como la dirección general de las transformaciones necesarias para alcanzar dicha resolución (Boero, 1996). El problema **PCA1** plantea las relaciones que se establecen, en el proceso de resolución de problemas, entre las técnicas algorítmicas de manipulación de expresiones algebraicas (por ejemplo la técnica que permite desarrollar el cubo de un binomio) y aquellas otras que hacen referencia al control de la dirección general de las transformaciones algebraicas que acabarán siendo útiles para la resolución de un problema determinado (se trata de técnicas que algunos autores consideran constitutivas de lo que denominan conocimientos "metacognitivas" y que permiten decidir en cada momento cuáles son las transformaciones concretas que hay que aplicar y en qué orden hay que aplicarlas).

PCA2: *¿En base a qué criterios deberían revisarse y discutirse las tradiciones de los paises en los que domina el tratamiento* lógico-algebraico *de las inecuaciones con la técnica de la tabla de "concordancia de signos"? ¿Cuáles son las potencialidades del tratamiento* funcional *de las inecuaciones*[19]*, en comparación con el tratamiento lógico-algebraico, en términos de desarrollo intelectual?*

Para Boero los criterios para responder a la primera cuestión no pueden provenir únicamente de un análisis de lo que aportan respectivamente los tratamientos lógico-algebraico y funcional en términos de *técnicas matemáticas* y *clases de problemas* que éstas permiten resolver. Según este autor es necesario, además, incluir una perspectiva del "desarrollo intelectual" en términos de pérdidas y ganancias. El tratamiento *funcional* sería preferible porque potencia ciertos procesos cognitivos de *exploración dinámica* de la situación-problema y porque provoca la *gestión explícita de las relaciones lógico-verbales de determinados enunciados*, mientras que el tratamiento lógico-algebraico carece de la posibilidad de potenciar dichos procesos (Boero, 1998)[20].

Parte II: El álgebra escolar en el programa epistemológico

Introducción

La mayor parte de las aproximaciones analizadas en la primera parte de este trabajo, desde las *conceptualistas* a las *psicolingüísticas*, tienen en común un rasgo esencial: asumen de manera más o menos explícita o, cuanto menos, no cuestionan abiertamente, el modelo dominante del álgebra escolar. Dicho modelo identifica el álgebra escolar con una especie de "*aritmética generalizada*" (Booth, 1984; Filloy y Rojano, 1984 y 1989; Vergnaud, 1988; Kieran y Filloy, 1989 y Kaput, 1996).

La "*aritmetización del álgebra escolar*" es un fenómeno que consiste en identificar el álgebra escolar con el lenguaje algebraico entendido como la generalización de un presunto "lenguaje aritmético" y en considerar el "pensamiento algebraico" como la extensión de un supuesto "pensamiento aritmético" al que se contrapone, pero del que depende

[19] El tratamiento *funcional* de las inecuaciones se basa en las propiedades (gráficas, entre otras) de la función asociada a una inecuación. El tratamiento *lógico-algebraico* de las inecuaciones consiste, por el contrario, en la utilización de las propiedades algebraicas de las transformaciones de las desigualdades. En concreto se utiliza cuáles son las transformaciones que cambian el sentido de una desigualdad y cuáles lo dejan invariante, así como las técnicas de factorización que permiten hacer un estudio del signo del valor numérico que toma una expresión algebraica sin necesidad de representar gáficamente la función asociada.

[20] En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), cuya contribución al estudio de la problemática en torno al álgebra escolar describiremos en la segunda parte de este trabajo, se plantearía la necesidad de modelizar, en términos de praxeologías, procesos tales como la "exploración dinámica de la situación problema" o la "gestión de las relaciones lógico-verbales de un enunciado". La posibilidad misma y la operatividad de esta modelización servirían para contrastar si el análisis antropológico requiere, para poder describir y explicar determinados fenómenos didácticos, integrar términos primitivos tomados de ciertas teorías cognitivas.

de una manera absoluta y unilateral. Así, en la medida que una institución docente identifica el *álgebra escolar* con la *aritmética generalizada*, la actividad algebraica se reduce a una actividad aritmética en la que, además de números concretos, se utilizan letras (ya sea como números desconocidos específicos, como números generalizados o como variables).

Este fenómeno tiene consecuencias importantes entre las que destacamos la siguiente. El resultado de las operaciones aritméticas acepta siempre una interpretación cultural (precio por unidad, velocidad, volumen, frecuencia, etc.), porque en la aritmética escolar se combinan pocas magnitudes simultáneamente y éstas están relacionadas de una forma muy sencilla. Pero las técnicas algebraicas permiten poner en relación muchas más variables a la vez y relacionarlas de una forma mucho más compleja. Esto hace que aparezcan muy rápidamente magnitudes compuestas que no pueden ser interpretadas por la cultura corriente (¿cómo denominar, por ejemplo, el producto de un peso por una velocidad dividido por la raiz cuadrada de un coste en pesetas?). Si, copiando a la aritmética, se quiere *preservar el sentido del resultado de las operaciones algebraicas, se acaba eliminando las magnitudes* y reduciendo la actividad algebraica a una *actividad puramente numérica* donde la estructura de las relaciones (y, por tanto, el álgebra como instrumento de modelización) pasa inadvertida. Éste es uno de los efectos más visibles de la "*aritmetización del álgebra escolar*" en las actuales instituciones docentes (Gascón, 1999 y Comin, 2000).

En la medida en que las perspectivas analizadas en la primera parte de este artículo se sitúen en el marco de lo que hemos denominado "Programa Cognitivo" –lo cual no es igualmente evidente para todas ellas– centrarán su objeto primario de investigación en los procesos cognitivos de los sujetos y no podrán empezar por cuestionar el *marco de referencia aritmético* en el que el álgebra escolar quedará, por tanto, encerrada. Esta limitación es muy importante porque impide tomar como *objeto de estudio primario* las cuestiones que hacen referencia a la *organización matemática del álgebra escolar*. Así, por ejemplo, en un marco estrictamente cognitivo no se investigan –y acaban ignorándose– cuestiones del tipo:

PE1. *El álgebra escolar aparece ligada unilateralmente a la aritmética. ¿Qué consecuencias tiene esta* "aritmetización del álgebra escolar" *y la consiguiente identificación del álgebra escolar con una especie de* "aritmética generalizada"*? ¿Cómo se relaciona este fenómeno con la* "algebrización de la aritmética escolar moderna", *que consiste en la adopción por parte ésta de los símbolos y las reglas de funcionamiento del lenguaje algebraico?* (Gascón, 1994).

PE2. *En la organización matemática escolar, ¿cuál es la relación entre el lenguaje funcional y el lenguaje algebraico? ¿Por qué las fórmulas que aparecen en Secundaria no son nunca estudiadas como funciones de varias variables*[21] *que harían el papel de mode-*

[21] Así, por ejemplo, tomando las fórmulas que proporcionan el área o el perímetro de ciertos cuadriláteros como funciones de varias variables, podrían estudiarse cómo se relacionan entre sí los elementos de los rectángulos isoperimétricos o bien qué relaciones se dan entre una familia de rombos que tienen la misma área.

los algebraicos? ¿Cómo se relaciona este hecho con la "atomización" del corpus del álgebra enseñada? (Chevallard, 1989a, p. 50-54).

PE3. *¿Por qué, en el álgebra escolar, la aparición de los parámetros queda restringida a ciertos ámbitos muy concretos como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales al final de la Secundaria? ¿Cuáles son las causas que determinan la naturaleza prealgebraica de la matemática escolar? ¿Cuáles son los fenómenos didácticos relacionados con éste?* (Gascón, 1999).

PE4. *¿Cuáles son las condiciones matemáticas y didácticas que permitirían –y las restricciones que limitan— la existencia de la actividad de modelización funcional algebraica*[22] *en el medio escolar?* (Ruiz y Rodríguez, 1994).

---

3. El álgebra escolar en el marco del Programa Epistemológico

Para poder tratar estas cuestiones se necesita un "*modelo del álgebra escolar*" elaborado desde la propia didáctica que, en particular, sirva como punto de referencia para describir y analizar el modelo dominante en la Enseñanza Secundaria, que hemos designado como "aritmética generalizada" (Gascón, 1993 y 1994).

En esto consiste la originalidad del Programa Epistemológico, en abrir una nueva vía de acceso al estudio de los fenómenos didácticos a través de la modelización explícita del saber matemático enseñado. En nuestro caso es preciso *problematizar el álgebra escolar* y superar la ilusión de transparencia de dicho saber.

Uno de los rasgos esenciales de este punto de vista en didáctica consiste precisamente en tomar la actividad matemática en sí misma y, más en concreto, la ***actividad matemática escolar***, como ***objeto primario de investigación***. Este es el origen de la denominación de "*epistemología experimental*" que Brousseau dio inicialmente a la didáctica de las matemáticas[23]. Esto comporta, en particular, que el *conocimiento matemático del alumno* y su evolución, así como los *procesos cognitivos del alumno*, la *actividad docente* y, más en general, los procesos de "*enseñar*" y "*aprender*" (como procesos de naturaleza psico-sociológica) dejen de tener el carácter de *objetos primarios* de investigación para pasar a ser *secundarios* (lo que no quiere decir que sean menos importantes), porque son definidos (o construidos) a partir de los términos primitivos del modelo epistemológico-didáctico en cuestión[24].

---

[22] La *modelización funcional algebraica* sería una actividad matemática en la que se estudiase qué tipo de relación funcional liga dos magnitudes dadas (por ejemplo mediante una tabla de valores o una gráfica) de entre un conjunto de posibles relaciones funcionales predeterminadas de antemano.

[23] Los trabajos de Guy Brousseau publicados entre 1970 y 1990 están recogidos en Brousseau (1998).

[24] Con este postulado, el Programa Epistemológico no pretende, en absoluto, "reducir" los fenómenos *cognitivos* a fenómenos *epistemológicos*. Se postula que el estudio de los fenómenos *didácticos* puede llevarse a cabo, con ventaja, entrando por el cuestionamiento y modelización de su componen-

Podemos ahora poner en el centro de la problemática aquellas cuestiones relativas a la *organización matemática del álgebra escolar* que en el Programa Cognitivo ocupaban, a lo sumo, una posición marginal. Se pone así de manifiesto (o se postula) que *todo fenómeno relativo a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas tiene un componente matemático esencial*, inaugurándose un *nuevo programa de investigación* (Lakatos, 1978) en didáctica de las matemáticas: el ***Programa Epistemológico***. El paso[25] del *Programa Cognitivo* al *Programa Epistemológico*, constituye lo que Lakatos denomina un "*cambio progresivo de problemática*", con el consiguiente *aumento del* "*poder heurístico*" del nuevo programa de investigación. Este aumento viene corroborado, como veremos, por la aparición de *nuevos tipos de problemas*, de nuevas teorías auxiliares y con la anticipación de *hechos* y *fenómenos nuevos*.

En el Programa Cognitivo se presupone de forma implícita que *todo fenómeno relativo a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas* es reductible en última instancia a determinados *fenómenos cognitivos* (en el sentido amplio de psico-socio-lingüísticos). Es por esta razón que, en el marco de dicho enfoque, no se plantea la explicación de fenómenos didáctico-matemáticos; en realidad se usan los *hechos didáctico-matemáticos* para explicar ciertos *fenómenos psico-socio-lingüísticos*.

En el Programa Epistemológico surge por primera vez la noción de "*fenómeno didáctico*" que debe ser explicado, pero que es irreductible a los fenómenos psicológicos, sociológicos o lingüísticos asociados. Esta emergencia de los *fenómenos didácticos* (o *didáctico-matemáticos*), comporta la consiguiente emergencia de *tipos de problemas didáctico-matemáticos* dado que, en toda disciplina científica, cada tipo de problemas hace referencia a un (aspecto de un) fenómeno.

En coherencia con lo anterior, el núcleo firme de este nuevo Programa de Investigación debería estar constituido por un *modelo epistemológico general* de la actividad matemática escolar y, correlativamente, por los *modelos epistemológicos específicos* de los diferentes "ámbitos" de la actividad matemática escolar. Éstos deben ser coherentes con el modelo epistemológico general puesto que lo van constituyendo como tal. El *modelo docente* (y, en particular, lo que se entienda por "enseñar y aprender matemáticas") dependerá fuertemente del modelo epistemológico de las matemáticas dominante en la institución escolar en cuestión (Gascón, 2001).

3.1. Construcción de problemas didácticos en la teoría de situaciones

Por razones históricas, ha sido precisamente en el marco de la ***Teoría de las Situaciones Didácticas*** (TSD) en el que se han planteado en primer lugar problemas didáctico-matemáticos en el sentido del *Programa Epistemológico*. En esta teoría cada ***conocimiento mate-***

te matemático. Lo que si niega el Programa Epistemológico es el dogma incuestionado por el Programa Cognitivo de que los fenómenos didácticos sean reductibles, en última instancia, a fenómenos cognitivos. En realidad lo que cambia radicalmente es la noción misma de "fenómeno didáctico" y, por tanto, el objeto de estudio de la didáctica.

[25] No se trata de una evolución *histórica*; estamos esquematizando lo que Lakatos (1971) denomina una "*reconstrucción racional de la historia*". Es evidente que actualmente conviven los dos Programas de Investigación y, todavía más, que la mayor parte de los trabajos que se publican pueden situarse dentro del Programa Cognitivo.

mático específico se modeliza mediante una ***situación***. En esto consiste, precisamente, el principio metodológico fundamental de la teoría de situaciones: definir un "*conocimiento matemático*" mediante una "*situación*", esto es, por un autómata que modeliza los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de forma *óptima* (Brousseau, 1994).

Es precisamente este carácter "*óptimo*" de la resolución, que interviene en la modelización de un conocimiento matemático específico y que amplía la clasificación dicotómica clásica entre "resolución correcta"/ "resolución incorrecta", el que permite poner en primer término las *propiedades ergonómicas de los conocimientos*, tanto en la *explicación* como en la *previsión de los fenómenos didácticos*. Esta es una de las principales virtudes de la TSD y constituye, al mismo tiempo, uno de los indicadores del cambio de Programa de Investigación[26]. Mientras que en el "enfoque clásico" se proponen *soluciones* en términos de "todo o nada"; en la TSD, por el contrario, al tomar en consideración el carácter ergonómico de los conocimientos matemáticos para explicar los fenómenos didácticos, se proponen *regulaciones* para gestionar, corregir y adaptar la modificación de la acción didáctica[27].

Uno de los *tipos de problemas de investigación didáctica* que se construyen inicialmente en la TSD puede expresarse en los siguientes términos:

TSD. *¿Qué condiciones debe satisfacer una situación para que ponga en funcionamiento los conocimientos matemáticos específicos que modeliza? ¿Cómo debe diseñarse y gestionarse dicha situación? ¿Cuáles son los efectos previsibles de dicha puesta en funcionamiento sobre los protagonistas y sobre sus producciones?*

La anterior constituye una versión muy simplificada de uno de los nuevos tipos de problemas que aparecen con la emergencia del Programa Epistemológico, tal como podrían ser formulados en el marco de la TSD. Otra forma de describir dicho prototipo de problemas es la siguiente:

TSD'. *¿Cómo se realiza y, sobre todo, cómo se podría realizar la gestión del* sentido *de las nociones matemáticas en una institución didáctica determinada? Por ejemplo, ¿cómo*

[26] Agradecemos a Guy Brousseau sus aclaraciones en este punto: la teoría de las situaciones didácticas modeliza explícitamente los conocimientos matemáticos mediante una "situación didáctica"; de esta manera *el modelo incluye las* ***condiciones de utilización*** *de los conocimientos matemáticos modelizados*. Dichas condiciones están representadas en el modelo mediante las restricciones que impone la situación didáctica.

[27] En la TSD la *acción didáctica* no está encaminada únicamente a que los alumnos utilicen una estrategia "*correcta*" para resolver un determinado tipo de problemas. De hecho, *aprender un conocimiento matemático* se corresponde siempre en la TSD con un *cambio de estrategia*: todo conocimiento surge asociado a una nueva estrategia capaz de resolver problemas que la estrategia de base se había mostrado incapaz de resolver. Si definimos el "coste de una estrategia" a partir del "precio del aprendizaje" (expresado en tiempo y esfuerzo), el "precio de la ejecución" (que depende de la complejidad de la tarea) y el "precio del riesgo de error" (que depende del producto de los riesgos de error de las tareas elementales), podemos decir que la acción didáctica en la TSD pretende gestionar los necesarios cambios de las estrategias de tal manera que la evolución de los costes de éstas no provoque efectos didácticos indeseables como, por ejemplo, *obstáculos didácticos* innecesarios (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 224-225).

gestionar el sentido *de* la división *en el proceso de enseñanza que se lleva a cabo en la escuela primaria?* (Brousseau, 1987).

Es fácil dar ejemplos concretos de *problemas didácticos* que responden a este prototipo **TSD** (o **TSD'**), y que ya han sido planteados y abordados:

TSD1. *¿Cómo encontrar situaciones realmente específicas de las diferentes concepciones de los decimales (esto es, de los diferentes modelos matemáticos específicos de los decimales) y organizar a la vez estas situaciones y estas concepciones de manera que hagan posible una génesis artificial adecuada de dicho conocimiento? Esto quiere decir que dicha génesis artificial debe hacer funcionar la noción de "decimal" de tal forma que permita la aparición de todos los aspectos actuales del concepto* (Brousseau, 1980 y 1981).

TSD2. *¿Cómo fabricar un entorno propicio a la introducción y a la vida del Teorema de Thales en su forma general?* (Brousseau, 1995).

TSD3. *El postulado de Eudoxo-Arquímedes, ¿puede ser considerado como un obstáculo epistemológico? Esto es, el postulado de Eudoxo-Arquímedes, ¿puede ser considerado como un conocimiento-obstáculo que dificulta la gestión del* sentido *de ciertas nociones matemáticas en la institución escolar?* (Spagnolo, 1995).

Volviendo a la problemática de la enseñanza-aprendizaje del álgebra, nos preguntamos qué forma podría tomar dicha problemática en el ámbito de la TSD. Parafraseando el problema **TSD1** obtenemos la siguiente formulación:

TSD(A). *¿Cómo encontrar situaciones realmente específicas de las diferentes concepciones del* álgebra elemental *(esto es, de los diferentes modelos específicos del álgebra elemental o de una parte de la misma) y organizar a la vez estas situaciones y estas concepciones de manera que hagan posible una génesis artificial adecuada de dicho conocimiento? Dicha génesis artificial debe permitir que aparezcan todos los aspectos actuales del álgebra elemental (o de una parte de la misma).*

Para abordar este problema de investigación sería preciso, en coherencia con el proceso de construcción de problemas didácticos en la TSD, elaborar previamente un *modelo del álgebra elemental* (*o de una parte de la misma*) *como conocimiento matemático específico*, de manera análoga a como fueron elaborados, en su momento, modelos específicos de los "decimales" o del "teorema de Thales". La formulación de los (tipos de) problemas anteriores se ha hecho en términos del prototipo **TSD**, pero todos y cada uno de dichos problemas pueden formularse asimismo en términos del prototipo **TSD'**, esto es, haciendo referencia en cada caso al *sentido de determinado(s) conocimiento(s) matemático(s)*. Queda así patente que dichos problemas didácticos dependen esencialmente de lo que se entienda por "*sentido de un conocimiento matemático*" en la TSD[28].

3.2. Construcción de problemas didácticos en la teoría antropológica

Podemos resumir lo anterior diciendo que el Programa Cognitivo utiliza *modelos psicológicos del aprendizaje* (conceptualistas, psicolingüísticos o cognitivistas) como núcleo firme de su Programa de Investigación y, ocasionalmente, *modelos locales de ciertos conceptos matemáticos*. El Programa Epistemológico, por el contrario, se caracteriza por situar *modelos epistemológicos* (*de la actividad matemática*) en el núcleo firme de su programa y, dependiendo de éstos, *modelos docentes* que incluyen, en particular, las nociones de "aprender" y "enseñar matemáticas". En el caso concreto de la TSD se utilizan como *modelos epistemológicos específicos* de determinados conocimientos matemáticos escolares, *situaciones* que hacen funcionar y que permiten gestionar el *sentido* de dichos conocimientos en una institución determinada[29].

En el marco del Programa Epistemológico pronto se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la *actividad matemática escolar* sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución de producción del saber matemático. Se descubrió, en definitiva, que muchos de los fenómenos relativos a la *enseñanza de las matemáticas* sólo pueden abordarse científicamente si se tienen en cuenta simultáneamente los fenómenos de ***transposición didáctica*** (Chevallard, 1985) que, a su vez, no pueden separarse de los fenómenos relativos a la *producción* y a la *utilización* de las matemáticas (Chevallard, 1991a). Surge así lo que inicialmente se denominó ***enfoque antropológico en didáctica de las matemáticas***. En dicho enfoque, la actividad matemática escolar se integra inseparablemente en la problemática mucho más amplia de las *actividades matemáticas institucionales*[30] que pasan a constituir el nuevo y más extenso *objeto primario* de la investigación didáctica. Los *modelos docentes* pasan, entonces, a ser considerados como

[28] En un trabajo en colaboración (Bolea, Bosch, García, Gascón, Ruiz y Sierra 2000) hemos relacionado la problemática del "*sentido de un conocimiento matemático*" de la TSD, con la problemática de la "*incompletitud de las praxeologías matemático-didácticas*" de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. La aplicación de estos desarrollos al caso del álgebra escolar junto a los trabajos que se están llevando a cabo actualmente en el marco de la TSD sobre este tema (en especial el trabajo de tesis de Woillez) deben permitir avanzar en el estudio de esta problemática.

[29] Así, por ejemplo, Brousseau propuso a principios de los años 70 la "carrera al 20" como situación que modeliza la *división euclídea* en una institución determinada. El nombre de la situación proviene del juego del que parte, y éste puede describirse como sigue: El jugador que empieza a jugar debe decir "1" o "2" (por ejemplo "1"). A continuación su adversario debe añadir una o dos unidades a este número (por ejemplo, puede decir "3"). Continúa el primer jugador añadiendo, de nuevo, una o dos unidades al último número para decir, por ejemplo, "4", etc. Gana la partida el primero de los jugadores que consiga decir "20" (Brousseau, 1998, pp. 23-43).

[30] Dado que la "escuela" es una institución en la que se llevan a cabo actividades matemáticas, es claro que la *actividad matemática escolar* (o actividad de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas) se incluirá como un caso particular dentro de las *actividades matemáticas institucionales*. Éstas abarcan, además, las actividades de *utilización* de los saberes matemáticos, las de *producción* y las de *transposición institucional* (Chevallard, 1991). Recientemente hemos incluido todas estas actividades bajo la denominación de "***estudio de las matemáticas***" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

la particularización al caso de las instituciones escolares de un *modelo general de la difusión institucional de los conocimientos matemáticos*[31].

3.2.1. El álgebra elemental como dominio de investigación didáctica

En las investigaciones relativas al álgebra elemental llevadas a cabo desde la perspectiva antropológica existe una primera etapa que culmina con la publicación, a finales de 1989, de la nota de síntesis (Chevallard, 1989b). Este trabajo puede considerarse, entre otras cosas, como la *construcción de un dominio de investigación didáctica* y constituye la base sobre la que se sustentan los trabajos más recientes sobre el tema que esquematizaremos en el apartado **3.2.2.**[32]

El enfoque antropológico postula, desde sus inicios, que la *actividad de modelización matemática* es el núcleo de la actividad matemática. Este postulado le lleva a introducir en la descripción de la actividad (intra)matemática las nociones básicas de la modelización matemática. En particular se habla de la *producción de conocimientos* (matemáticos) *relativos a un sistema* (matemático), gracias a la utilización de un *modelo matemático* de dicho sistema. De esta forma, se puede dar un sentido nuevo a la afirmación según la cual "*las matemáticas son una ciencia experimental*"[33].

Una característica fundamental de esta modelización intramatemática es su carácter "constitutivo" del propio conocimiento matemático, en lugar de ser una simple "aplicación" de éste. Así, por ejemplo, puede decirse que el *cálculo algebraico* como actividad matemática es un *elemento esencial de la construcción de lo numérico* (tanto en la génesis histórica como en la teoría matemática) más que un simple epifenómeno de lo numérico. Se

[31] La evolución racional (no necesariamente histórica) de la noción misma de "fenómeno didáctico" puede ser esquematizada como sigue: Inicialmente, en el Programa Cognitivo, los fenómenos didácticos estaban muy centrados en la enseñanza-aprendizaje; la TSD provocó una importante modificación de dicha noción al atribuir a los ***fenómenos didácticos*** un *componente matemático esencial*; el *enfoque antropológico*, por fin, asume este postulado y lo profundiza mostrando, además, que dichos fenómenos no pueden estudiarse desde dentro del estrecho marco de las instituciones escolares. La noción misma de "*fenómeno didáctico*" se amplía entonces para abarcar todos los "*fenómenos que aparecen en cualquier proceso de estudio de las matemáticas*", incluyendo la *producción* y la *utilización* de los conocimientos matemáticos, al lado de *la enseñanza y el aprendizaje* de las matemáticas. Se postula que todo *fenómeno matemático* tiene un *componente didáctico esencial* y, en este sentido, hablaremos de ***fenómenos y problemas matemático-didácticos.***

[32] Dado que la totalidad de esta sección constituye una síntesis muy apretada del *Anexo* I del trabajo citado (pp. 73-100) y que éste, a su vez, resume las investigaciones sobre el álgebra elemental realizadas por el autor a lo largo de la década de los ochenta, evitaremos las citas textuales y las referencias puntuales, para no complicar el texto hasta el punto de hacerlo ilegible. Remitimos al lector al documento original (Chevallard, 1989b).

[33] Este postulado se refiere, en primer término, a la matemática como ciencia "pura" y, sólo en segundo término, a la matemática como ciencia "aplicada". Aunque, en realidad, lo que pretende es mostrar lo inadecuado de tal distinción. Se postula que *toda* actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización. Los sistemas que se modelizan pueden ser "aritméticos" (estudiar, por ejemplo, la conjetura de Fermat mediante modelos que proporcionan las curvas elípticas), "geométricos" (estudiar, por ejemplo, el plano euclídeo mediante el modelo axiomático de Hilbert), "topológicos" (estudiar, por ejemplo, ciertos tipos de variedades topológicas asignándoles invariantes algebraicos), etc. Los sistemas que se modelizan matemáticamente *también* pueden ser sistemas "extramatemáticos" (físicos, biológicos, sociales, psicológicos, económicos, etc).

pone así de manifiesto el carácter problemático, en el sentido de problema no resuelto, de las *relaciones entre lo algebraico y lo numérico.*

EA1. *¿Cuáles son las relaciones posibles entre lo algebraico y lo numérico en la Enseñanza Obligatoria? ¿Es posible la introducción del álgebra elemental en un marco diferente del marco aritmético habitual en el que lo algebraico es considerado como un epifenómeno de lo numérico?*

El estudio de este problema constituirá uno de los caminos para abordar el *problema didáctico de la enseñanza del álgebra* desde la perspectiva antropológica. Para iniciar dicho estudio Chevallard y sus colaboradores diseñaron y experimentaron una secuencia de enseñanza que tomaba el *cálculo algebraico* como *instrumento* para la construcción de lo numérico y los *números naturales* (algunas de sus propiedades más elementales) como *objeto* de estudio para los alumnos. En concreto, suponiendo conocidos los "números relativos" (en «quatrième» del sistema educativo francés, que equivale al segundo curso de la E.S.O. del actual sistema educativo español) se trata de describir los números racionales con ayuda del cálculo algebraico. El punto de vista respecto a la naturaleza de los números era "*realista*" en contraposición a la tendencia "*constructivista*": se supone que los números son objetos que ya existen y que, por tanto, no es preciso "construir", sino sólo "describir" y "simbolizar" de tal forma que permitan ser estudiados.

Utilizando el instrumento del *cálculo ecuacional* se describen los números racionales como aquellos que satisfacen una ecuación del tipo:

$$a{\cdot}x = b \quad (a, b \in \mathbb{Z};\ a \neq 0)$$

y el propio cálculo ecuacional permite estudiar de una forma muy sencilla las principales propiedades de los números racionales y de sus operaciones. El alumno se encuentra de esta manera en un cuadro de trabajo muy diferente del tradicional. De esta forma se creó un observatorio didáctico en el que fue posible estudiar tanto el "*funcionamiento didáctico de lo algebraico*" como el "*funcionamiento de los alumnos a propósito de lo algebraico*" en un marco diferente del "marco aritmético de referencia". Al tomar la *actividad algebraica* como un ***instrumento de modelización matemática***, aparece un problema didáctico esencial:

EA2. *¿Cuál es el nivel adecuado para plantear la problemática de la investigación didáctica sobre la enseñanza del álgebra elemental? ¿El de la variable, el del signo igual, el del significado de las expresiones simbólicas, el de los conceptos, el de las ecuaciones, ...? ¿O, por el contrario, debemos plantear el problema a un nivel más amplio que abarque el papel de los problemas "verbales" y de la modelización matemática en la Enseñanza Secundaria?*

El estudio de este problema puso de manifiesto que para entender lo que pasa en los sistemas didácticos es preciso tomar en cuenta el Sistema de Enseñanza de las Matemáticas (SEM) en su conjunto, la noosfera y, a través de ella, la sociedad y su cultura. El desarrollo de este estudio constituyó el primer ejemplo de *estudio (macro)-ecológico de las condiciones de posibilidad de un tipo dado de fenómenos didácticos en un entorno determinado.*

Este tipo de análisis puso de manifiesto la *relatividad institucional de los conocimientos matemáticos* y originó una crítica de la presunta *universalidad abstracta y a-*

institucional de los conceptos. "Conocer un concepto", en el sentido escolar, se refiere siempre a una lista muy concreta de sus *empleos modelizantes*, siendo dicha lista el resultado de los procesos de transposición didáctica. Fue precisamente como consecuencia de este tipo de análisis que surgió la teorización en términos de "***relación al saber***" dentro del enfoque antropológico.[34]

EA3. *¿Qué papel juegan la noosfera, la sociedad y la cultura en la construcción de la relación institucional al saber matemático enseñado? ¿Qué papel han jugado en el caso particular del álgebra escolar? ¿Cómo es considerada el álgebra en la cultura occidental?*

La sociedad tiende a exigir del SEM que todo elemento de saber que se enseña, al menos durante la Enseñanza Obligatoria, se deje traducir en términos compatibles con la *epistemología cultural corriente*, de manera que las únicas modelizaciones aceptables por la cultura son aquellas que pueden reducirse a *modelos* "*concretos*", esto es culturalmente familiares y naturalizados por la cultura hasta aparecer como los únicos "pensables". De esta forma se han naturalizado, por ejemplo, las situaciones culturalmente reconocidas para modelizar los números negativos: "ingresos/deudas", "altura sobre el nivel del mar/profundidad bajo el nivel del mar", "años antes/años después (del inicio de nuestra era)", y unas pocas más.

Recíprocamente, la cultura corriente no puede absorber aquellos objetos de enseñanza que no son susceptibles de dicha reducción a modelos "concretos" porque su significación sólo puede emerger, por ejemplo, en una práctica matemática. Esta es la razón por la cual la cultura corriente, que sólo dispone de los modelos antes citados de los números negativos, se pregunta inútilmente, desde hace siglos, porqué "*menos por menos da más*".

Como consecuencia de esta *presión cultural* se produce una reducción de los objetos de enseñanza a determinados modelos "concretos". En el caso del álgebra esta reducción es especialmente importante y distorsionadora puesto que ésta es muy difícilmente traducible-reducible a modelos culturalmente familiares. Se origina así una *desnaturalización matemática de los objetos algebraicos* que se pone de manifiesto en la aparición de múltiples *artefactos didácticos de origen cultural*. Así, para enseñar las ecuaciones de primer grado con una incógnita se introducen en clase multitud de objetos como, por ejemplo, la balanza. Se trata de objetos no enseñados como tales, pero culturalmente –que no científicamente– más familiares y, por tanto, supuestamente facilitadores del aprendizaje.

Esta actitud lleva a *condenar aquellas obras matemáticas que no se dejan fácilmente* "*culturizar*". El álgebra es un ejemplo paradigmático de tales obras: "mecánica",

---

[34] Es evidente que lo que significa "aprender la derivada" depende de la institución docente en la que nos situemos. Pero al afirmar la *relatividad institucional de los conocimientos matemáticos* vamos más allá de esa constatación casi trivial. Afirmamos que la noción misma de "derivada" es relativa a la institución particular que se considere, puesto que se identifica con el sistema de prácticas que en dicha institución se llevan a cabo en torno a la "derivada". Este sistema de prácticas institucionales puede identificarse con la "*relación institucional al objeto derivada*" (Chevallard, 1989c).

alejada del pensamiento "vivo", poco "concreta" y, por tanto, difícilmente "pensable", el álgebra no ha sido nunca realmente aceptada por la cultura occidental, en contraposición a la *geometría* que ha sido vista por la cultura como el *triunfo del "pensamiento"*. Esta *consideración peyorativa* ***de la cultura***[35] *hacia el álgebra* contrasta vivamente con la importancia central que ocupa lo algebraico en lo matemático y, en particular, con el papel crucial del álgebra en el desarrollo de la geometría.

EA4. *¿Cuál es la pertinencia didáctica actual del instrumento algebraico?* Esto es, *¿Es preciso seguir enseñando álgebra actualmente? ¿En la enseñanza obligatoria?*

A pesar de la pertinencia histórica innegable del álgebra, podría suceder que el instrumento algebraico hubiese perdido en la actualidad toda pertinencia como objetivo didáctico y también como instrumento del trabajo matemático del alumno. Pero esto no sólo no es así sino que, por el contrario, lo algebraico acrecienta día a día su valor paradigmático como iniciación imprescindible a una *dimensión esencial de toda praxis científica: el papel a la vez instrumental y constitutivo de los formalismos de toda ciencia.* Algunos indicios de este hecho son los siguientes:

(i) Todos los profesores de matemáticas (y de física, ...), desde la enseñanza obligatoria a la universitaria, constatan que *el grado en que sus alumnos dominan el cálculo algebraico siempre es insuficiente.*

(ii) *Los objetos y las técnicas algebraicas se utilizan constantemente en el trabajo matemático* de los alumnos y la densidad de los errores resultante de esta omnipresencia de lo algebraico está en el origen del *fracaso cotidiano característico de la profesión de alumno.*

(iii) Los objetos algebraicos, como objetivos didácticos en sí mismos, sólo están presentes en un corto periodo de la vida escolar. Las técnicas algebraicas, por el contrario, juegan un papel muy importante en toda la biografía escolar del alumno, como *instrumentos permanentemente presentes en su trabajo matemático.*

EA5. *¿Cómo se plantean, en términos de la problemática ecológica, los problemas de investigación didáctica relativos a la enseñanza y el aprendizaje de lo algebraico?*

En la *problemática ecológica* el problema principal es el del *análisis de la estructura, el funcionamiento y la ecología de la relación institucional a lo algebraico.* En el marco del Programa Epistemólogico el estudio de la *relación personal del alumno a lo algebraico* es

[35] Se trata de una peyoración *cultural*, de la *cultura dominante*, que no científica. Toda disciplina matemática, y especialmente el álgebra, choca frontalmente con las características definitorias de la información tal como ésta ha sido redefinida por la televisión. Dichas características pueden resumirse en tres puntos: (1) ver es comprender; (2) la instantaneidad es la medida óptima del tiempo informativo; (3) el único criterio de veracidad consiste en que otras fuentes de información repitan las mismas afirmaciones y, con ello, las "confirmen" (Ramonet, 1996).

prácticamente fundamental pero epistemológicamente secundario para la didáctica de las matemáticas. Mientras que las diversas perspectivas del Programa Cognitivo se centran en el sujeto y reducen la relación personal del alumno al álgebra a una "*actualización*" *de presuntas concepciones preexistentes*, el enfoque antropológico (en el marco del Programa Epistemológico) intenta explicar dicha relación personal como un *emergente de la praxis del alumno como persona*, tomando en consideración sus diferentes sujeciones a las diversas instituciones. El estudiante no debe confundirse con un "*sujeto cognitivo*", ni tampoco con un mero "*sujeto epistémico*" (en el sentido estrecho de la epistemología clásica), es preciso abarcar toda la complejidad del "*sujeto didáctico*" (Artigue, 1990).

Para llevar a cabo el análisis de la ***ecología de lo algebraico en los sistemas didácticos*** se utilizan diversos materiales empíricos (los manuales, los textos oficiales, las clases, ...) y se subrayan las diferencias respecto al funcionamiento de *lo algebraico como objeto de saber*; esto es, las diferencias entre el álgebra en los instituciones escolares y el álgebra en las instituciones productoras del conocimiento matemático. Estas diferencias pueden resumirse en los cinco puntos siguientes:

(i) En los sistemas didácticos se rompe la unidad funcional de lo algebraico: se produce una fuerte autonomía de los diferentes bloques y cierta *desintegración del corpus algebraico*[36].

(ii) En las ecuaciones y en las inecuaciones y, en particular, en su utilización para resolver problemas concretos las letras juegan únicamente el papel de incógnitas, los *parámetros están ausentes*. Consecuentemente las *fórmulas* no aparecen como el resultado de un *trabajo algebraico* ni juegan ningún papel de *modelos algebraicos*: hacen únicamente el papel de "reglas" para realizar ciertos cálculos.

(iii) Los diferentes *sistemas de números* no aparecen como consecuencia de una construcción algebraica.

(iv) Aparte del caso especial de los problemas "concretos" (o "verbales") en los que se introducen letras para designar cantidades desconocidas, la *actividad de nominación o renominación* (que consiste en la introducción de nuevas letras en el curso del trabajo matemático y que es esencial en el trabajo algebraico) *está totalmente ausente*. Así, por ejemplo, no se utilizan cambios de variables para simplificar expresiones, ni para resolver ecuaciones o inecuaciones, ni para representar funciones en sistemas de referencia diferentes de los determinados por las variables originales.

(v) *El trabajo sobre los objetos algebraicos* (tomándolos como objetos de estudio en sí mismos) *es prácticamente inexistente en toda la Enseñanza Secundaria*. Así, por ejemplo, se manipulan (se "resuelven", se "simplifican", se "representan") determinados objetos algebraicos (las ecuaciones, las expresiones algebraicas y las funciones), pero no se toman como objetos de estudio en si mismos.

[36] Así, por ejemplo, en las instituciones escolares se estudian en diferentes bloques, completamente independientes entre si: las ecuaciones, las "igualdades notables", las simplificaciones de expresiones algebraicas, los polinomios, las funciones y las inecuaciones. Pero en el trabajo matemático todos esos bloques deben integrarse en una unidad funcional para llevar a cabo, por ejemplo, el estudio de una situación concreta mediante su modelización funcional.

Este análisis de algunos rasgos de la ecología de lo algebraico en los sistemas didácticos sugiere un fuerte grado de ***desalgebrización del curriculum escolar*** y plantea nuevas cuestiones que van más allá de los sistemas didácticos. ¿Las condiciones de vida de lo algebraico en los sistemas didácticos, tal como han sido descritas, son absolutamente necesarias o, por el contrario, son contingentes y pueden ser modificadas? Aparece, de nuevo, la necesidad de llevar a cabo un estudio ecológico más amplio que tenga en cuenta la naturaleza "abierta" del sistema didáctico para identificar las relaciones entre: lo algebraico en la *matemática sabia*, lo algebraico en la *cultura*, lo algebraico en las *prácticas sociales*, lo algebraico en la *noosfera*[37] y lo algebraico en el *sistema de enseñanza*.

EA6. *¿Cuáles son las causas últimas de la desalgebrización del curriculum escolar descrita anteriormente?*

Aunque es verdad que la organización de todo curriculum tiende de una manera general a la *diferenciación y autonomización interna del corpus enseñado*, este fenómeno no basta para explicar la desalgebrización del curriculum descrita anteriormente en los puntos (i)-(v). ¿Cómo podemos explicar, en última instancia, este fenómeno? La conocida tesis de Chevallard se desprende de los análisis anteriores: la desalgebrización del curriculum responde sobre todo a la *peyoración cultural del álgebra* que, a su vez, es una consecuencia del ***logocentrismo*** (J. Derrida, 1967) propio de la cultura occidental. Dicha postura metafísica sustenta implícitamente que el "*pensamiento*" reside en "la cabeza", se expresa por la *voz* y la *palabra* y se conserva mediante la *escritura*; pero la escritura es sólo una degradación del pensamiento o, a lo sumo, un producto secundario del mismo. La cultura corriente desconoce el hecho esencial de que ***los formalismos científicos son lenguajes que no provienen de ningún lenguaje oral*** sino que han nacido como lenguajes escritos y son muy difícilmente oralizables lo que provoca problemas didácticos específicos en la enseñanza del álgebra, por ejemplo. Así se sobrevalora todo lo que *se dice* o se puede decir (el "*razonamiento*") y se considera peyorativamente todo lo que únicamente *se hace*, en particular lo que únicamente *se escribe* sin ser enunciado oralmente. El *logocentrismo* supone una incomprensión profunda de la naturaleza de la actividad científica porque desprecia el papel (e incluso la existencia) de *los formalismos escritos como instrumentos del pensamiento científico*.

3.2.2. El álgebra elemental en los últimos desarrollos de la TAD

Como una consecuencia natural del *desarrollo de la teoría de la transposición didáctica* ha surgido la necesidad de modelizar las *prácticas matemáticas institucionales* con instru-

[37] La noción de "*noosfera del sistema de enseñanza*" ha sido introducida por Chevallard en el contexto de la teoría de la transposición didáctica para designar la esfera donde se piensa el funcionamiento del sistema didáctico. Se trata del verdadero tamiz por donde se opera la interacción entre el sistema de enseñanza y el medio social. En la noosfera los "representantes" del sistema de enseñanza (desde el presidente de una asociación de enseñantes al simple profesor militante) se encuantran con los "representantes" de la sociedad (los padres de los alumnos, los especialistas de la disciplina que militan en torno de su enseñanza, los emisarios del órgano político). (Chevallard, 1985).

mentos suficientemente finos como para permitir una descripción de dichas prácticas que haga posible el estudio de las condiciones de su realización. Esta modelización permitirá, en particular, operativizar las nociones de *relación institucional* (y *relación personal*) *al saber matemático* y ha sido abordada en los últimos desarrollos del enfoque antropológico (Chevallard, 1992, 1996, 1997 y 1999; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Para abreviar, denominaremos ***Teoría Antropológica de lo Didáctico*** (TAD) al estado actual de esta teorización que engloba y sistematiza todos los desarrollos anteriores del *enfoque antropológico*.

La TAD precisará, por tanto, explicitar un *modelo general de las matemáticas institucionales* que incluya la *matemática escolar* como un caso particular y un *modelo de las actividades matemáticas institucionales* que incluya la *enseñanza-aprendizaje escolar de las matemáticas*, como una actividad matemática institucional particular. En los últimos desarrollos de la teoría antropológica se modeliza la *matemática institucional* mediante la noción de ***organización*** o ***praxeología matemática*** y las *actividades matemáticas institucionales* mediante la noción de *proceso de estudio*[38] *de una organización matemática en el seno de una institución* o ***praxeología didáctica***[39]. Utilizando estas nociones podemos generalizar el problema del *análisis de la estructura, el funcionamiento y la ecología de la relación institucional a lo algebraico* que se planteaba en **EA5.** para formular uno de los *prototipos de los problemas de investigación didáctica* que se construyen en la TAD:

TAD. *Analizar los componentes (y las relaciones dinámicas entre ellos) de las* praxeologías matemáticas *que son propuestas para ser estudiadas en la escuela y de las que son efectivamente construidas en el aula. Analizar la estructura y la dinámica de las* praxeologías didácticas *del profesor y de los alumnos. Describir la ecología, o condiciones de existencia institucional, de dichas praxeologías.*

En el caso del álgebra escolar, la problemática creada en los últimos desarrollos de la **TAD** toma en consideración la estructura de las *praxeologías matemáticas* y *didácticas* para analizar la *organización matemática escolar* alrededor de los objetos matemáticos que en la cultura escolar se consideran como objetos "algebraicos" y describir las *condiciones de existencia institucional de dichas praxeologías*. Estos nuevos instrumentos teóricos han permitido profundizar en el dominio de investigación didáctica en torno al álgebra elemental que, como hemos dicho, fue construido en la década de los ochenta por los primeros desarrollos del enfoque antropológico.

---

[38] La noción de *proceso de estudio* abarca y generaliza, por tanto, las clásicas nociones de *proceso de enseñanza-aprendizaje*.

[39] En lo que sigue utilizaremos la estructura de una organización praxeológica o ***praxeología*** (tanto matemática como didáctica) cuyos componentes principales son: *tareas*, *técnicas*, *tecnologías* y *teorías* y, también, las dimensiones o ***momentos del proceso de estudio*** institucionalizado de una praxeología que son: *momento del primer encuentro*, *momento exploratorio*, *momento del trabajo de la técnica*, *momento tecnológico-teórico*, *momento de la evaluación* y *momento de la institucionalización*. Todas estas nociones están ampliamente descritas y ejemplificadas en Chevallard, 1996, 1997 y 1999; Chevallard, Bosch y Gascón, 1997; Gascón, 1998; y Bosch y Chevallard, 1999.

Enunciaremos a continuación algunos de estos nuevos *problemas de investigación didáctica*[40]. Dado que todos y cada uno de los problemas que proponemos incluye en su formulación la noción de "praxeología" (que por ser relativamente nueva es bastante desconocida), nos ha parecido adecuado añadir para cada problema una primera respuesta tentativa, a modo de conjetura o hipótesis provisional, con la intención de que sirva para clarificar el alcance del problema en cuestión. El material empírico que hemos utilizado para llevar a cabo este análisis lo siguen constituyendo los documentos curriculares oficiales, los libros de texto y los materiales utilizados y elaborados en clase por los profesores y por los alumnos.

TAD1. *El "álgebra escolar", ¿es una praxeología matemática en si misma o un instrumento de estudio de otras praxeologías?*

El *álgebra escolar* no aparece en la Enseñanza Secundaria ni como una praxeología matemática bien delimitada y estructurada con todos sus componentes (tareas, técnicas, tecnologías y teorías), ni como un *instrumento de estudio* (que debería culminar en la *modelización algebraica*) de organizaciones previamente constituidas. Partiendo de la base de que toda *actividad matemática* puede interpretarse como una *actividad de modelización*, hemos llegado a la conclusión de que el "álgebra escolar" debería aparecer inicialmente como un "*instrumento algebraico*" para dar origen, progresivamente, a organizaciones matemáticas cada vez más algebrizadas.

TAD2. *Utilizando la estructura de las organizaciones praxeológicas, ¿cómo se pueden caracterizar las modelizaciones algebraicas en el conjunto de modelizaciones matemáticas?*

Las modelizaciones algebraicas se caracterizan porque permiten modelizar explícita y materialmente las *técnicas matemáticas* que forman parte del sistema a modelizar (que, en el caso de las modelizaciones algebraicas, es un sistema matemático); porque sitúan el modelo algebraico que se obtiene en el *nivel tecnológico* de la organización matemática modelizada; y porque, *al modelizar íntegramente todos los componentes* de la organización matemática que hace el papel de sistema a modelizar, permiten considerar el modelo algebraico como una *extensión de la organización matemática inicial.* Tenemos, en resumen, que las modelizaciones algebraicas provocan un tipo de transformación de las organizaciones matemáticas modelizadas que denominaremos *proceso de algebrización* (Bolea, Bosch y Gascón, 2001).

TAD3. *¿Qué relación hay entre las modelizaciones algebraicas y el grado de algebrización de las praxeologías matemáticas?*

---

[40] Este conjunto de problemas constituye el núcleo de la problemática didáctica que se aborda en el trabajo de tesis de Pilar Bolea. Algunos resultados preliminares han sido descritos en Bolea, Bosch y Gascón (2001).

Existe una dualidad entre las *organizaciones matemáticas algebrizadas*, de la que podemos dar un conjunto de indicadores[41], y las *modelizaciones algebraicas*, que hemos caracterizado como una modalidad básica dentro del conjunto de modelizaciones matemáticas. Esta dualidad refuerza la interpretación que hemos dado del "álgebra escolar", que debería aparecer inicialmente como una especie de *técnica matemático-didáctica*, en el sentido no algorítmico que la TAD da a este término y que debería estar cada vez más presente en las diferentes praxeologías matemáticas que constituyen la organización matemática escolar (Bolea, Bosch y Gascón, 1998b).

TAD4. *¿Cómo se transforman las praxeologías matemático-didácticas a lo largo del proceso de algebrizacion*[42] *?*

El *proceso de algebrización* provoca un cambio radical de las *praxeologías matemático-didácticas*. Se manifiesta en una progresiva *integración* de los distintos componentes de la *praxeología matemática* que comporta la reducción drástica del material ostensivo utilizado (Bosch, 1994) y en una *ampliación* de la misma que puede ser interpretada, en cierto sentido, como una *completación relativa*. Paralelamente se produce un cambio en la *praxeología didáctica*, esto es, en las posibles formas de ser estudiada la praxeología matemática algebrizada en una institución determinada. Las transformaciones originadas por el proceso de algebrización pueden "observarse" tanto en la evolución histórica de las matemáticas como en la evolución del proceso de estudio "escolar" de las matemáticas a lo largo de los diferentes niveles educativos.

TAD5. *¿Cuál es el grado de algebrización de las praxeologías matemáticas que se estudian actualmente en la Enseñanza Secundaria?*

Después de describir los indicadores (IGA1—IGA4, ver nota anterior) del grado de algebrización de una organización matemática, hemos podido reformular el fenómeno de la *desalgebrización del currículum de la Secundaria Obligatoria*. En Bolea, Bosch y Gascón (1998a) hemos analizado con detalle el *carácter problemático del proceso de algebrización* de las organizaciones matemáticas escolares y el consiguiente carácter *prealgebraico* de las mismas. Hemos mostrado, en síntesis, que las modelizaciones algebraicas están práctica-

[41] En Bolea, Bosch y Gascón, (2001) hemos mostrado que el mayor o menor grado de algebrización de una organización matemática puede caracterizarse mediante los siguientes *indicadores*: **IGA1**=Manipulación de la estructura global de los problemas; **IGA2**=Tematización de las técnicas y creación de una nueva problemática al nivel tecnológico; **IGA3**=Unificación y reducción de los objetos (ostensivos y no ostensivos) que constituyen los tipos de problemas, técnicas y tecnologías; **IGA4**=Emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado.

[42] En Bolea, Bosch y Gascón (2001) hemos estudiado el proceso de algebrización de una praxeología matemático-didáctica concreta, la que se genera en torno a la *proporcionalidad de magnitudes*. Hemos mostrado que dicho proceso de algebrización progresiva permite explicar el por qué en la actual organización matemática escolar en torno a la proporcionalidad aparecen, entremezclados, elementos provenientes de los diferentes niveles de algebrización de esta praxeología.

mente ausentes en la Enseñanza Secundaria (especialmente en la E.S.O.) donde las organizaciones matemáticas aparecen muy débilmente -y sólo localmente- algebrizadas. En Gascón (1999) se completa la conocida hipótesis de la *peyoración cultural del álgebra*, como causa última de la desalgebrización del currículum (Chevallard, 1989a y 1989b), introduciendo causas más próximas y visibles desde el propio sistema de enseñanza de las matemáticas.

TAD6. *¿Por qué, en la institución escolar de Secundaria, se tiende a identificar el "álgebra" con una obra que prolonga y generaliza unilateralmente la "aritmética escolar"? ¿Por qué la introducción al álgebra escolar siempre está ligada a la aritmética? ¿Cómo se relaciona este fenómeno, que podríamos denominar* "aritmetización del álgebra escolar" *con el fenómeno, aparentemente inverso, de la* "algebrización de la aritmética escolar moderna"*?*

Hemos mostrado que en la Enseñanza Secundaria se identifica el álgebra escolar con una especie de *"aritmética generalizada"*. Hemos puesto de manifiesto que este modelo dominante del álgebra escolar tiende a identificar el álgebra escolar con el "simbolismo algebraico" que se opone, al tiempo que amplía y generaliza, un supuesto "lenguaje aritmético". Hemos propuesto un modelo alternativo del álgebra escolar basado en el patrón de Análisis-Síntesis en tanto que técnica matemático-didáctica (Gascón, 1993 y 1994). En trabajos más recientes hemos relacionado el fenómeno de la "aritmetización del álgebra escolar" con otros fenómenos matemático-didácticos como son: la "alienación matemático-didáctica", "la ausencia escolar de determinados aspectos de la disciplina matemática" y la "atomización del proceso de estudio en las instituciones escolares" (Gascón, 1999)[43].

TAD7. *¿Es posible algebrizar una praxeología matemática concreta en el Segundo Ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (14-16 años), aunque ésta aparezca como una obra prealgebraica en la organización matemática escolar?*

El intento de integrar en la E.S.O., de manera aislada, el proceso de estudio de una praxeología matemática plenamente algebrizada como, por ejemplo, las que pueden cons-

[43] La *"alienación matemático-didáctica"* se manifiesta por el hecho que la inmensa mayoría de los alumnos pasan por la escuela sin sentir ninguna necesidad de utilizar las matemáticas para responder a cuestiones que ellos mismos se plantean. A estos alumnos la enseñanza de las matemáticas se les impone claramente desde fuera. La *"ausencia escolar de la disciplina matemática"* se observa en la tendencia a hacer desaparecer de la escuela aquellos aspectos de la disciplina matemática que, presuntamente, representarían una carga insoportable para los alumnos como, por ejemplo, las cuestiones o tareas reales que originaron las obras matemáticas estudiadas en la escuela; el trabajo sistemático que sólo puede llevarse a cabo con "paciencia", a largo plazo, y el sometimiento a las leyes internas de la matemática. La *"atomización del proceso de estudio en las instituciones escolares"* se refiere, por último, a un fenómeno cada vez más visible en los libros de texto y hasta en los documentos curriculares oficiales. Se trata de la tendencia a diluir la enseñanza de las matemáticas en un conjunto de anécdotas desconectadas entre si (Gascón, 1999).

truirse en torno a la *divisibilidad*, la *proporcionalidad de magnitudes* o la *construcción geométrica con regla y compás*, chocará con *restricciones ecológicas* de origen matemático-didáctico. Sólo serán estables aquellas modificaciones locales de la organización matemática escolar que comporten cambios del *contrato didáctico situacional* (formado por las cláusulas del contrato didáctico que operan a nivel de situación didáctica) que sean *compatibles* con el *contrato didáctico institucional* vigente actualmente en la Enseñanza Secundaria (constituido por las cláusulas del contrato didáctico que operan a nivel institucional). Dado que el contrato didáctico institucional se fundamenta en la organización matemática global de la Enseñanza Secundaria y ésta mantiene un carácter fuertemente *prealgebraico*, es fácil prever que las modificaciones encaminadas a hacer vivir localmente una praxeología matemática algebrizada serán muy *inestables* y *desaparecerán a corto plazo.*

TAD8. *¿Qué características específicas, en términos de los momentos del estudio y de los dispositivos didácticos, debería tener el proceso de estudio en el caso en que la organización matemática a estudiar estuviese plenamente algebrizada? ¿Cuáles son las restricciones que dificultan la existencia de este tipo de procesos de estudio en la Enseñanza Secundaria?*

Hemos mostrado que un tal proceso de estudio requeriría, entre otras, las siguientes condiciones: posibilidad de llevar a cabo un *cuestionamiento tecnológico*; potenciación del carácter manipulativo (escrito) del *momento exploratorio*; creación de un dispositivo didáctico nuevo en el que pudiese vivir el *momento del trabajo de la técnica*; e *integración de lòs diferentes momentos* del proceso de estudio, para permitir plantear objetivos a largo plazo (Bolea, Bosch y Gascón, 1998b). Todas estas condiciones se contradicen frontalmente con las cláusulas del *contrato didáctico institucional* vigente actualmente en la E.S.O. y, por tanto, cualquier intento de integrar en la E.S.O. un proceso de estudio algebrizado provocaría la aparición de restricciones ecológicas de origen matemático-didáctico, además de las restricciones de origen cultural provenientes de la *peyoración cultural del álgebra.*

TAD9. *¿Cómo podemos describir y analizar la actividad didáctica escolar del profesor como director del proceso de estudio del álgebra escolar? ¿Cuál es la* "tecnología didáctica" *dominante en la Enseñanza Secundaria respecto del álgebra escolar? ¿Cómo afecta dicha tecnología –esto es, el discurso interpretativo y justificativo de las técnicas didácticas que se utilizan en la enseñanza del álgebra- sobre el proceso de estudio?*

Hemos mostrado que existe un modelo epistemológico dominante en la institución escolar que identifica el "álgebra escolar" con una praxeología matemática que prolonga y generaliza unilateralmente la "aritmética escolar": una especie de "*aritmética generalizada*". Postulamos ahora que dicho modelo epistemológico constituye la base sobre la que descansa la *tecnología didáctica espontánea del profesor* respecto del álgebra escolar.

Esto significa que cuando el profesor aborda los *problemas didácticos* ligados a la enseñanza del álgebra (cuando intenta, por ejemplo, iniciar a los alumnos en el estudio de las ecuaciones de primer grado entendidas como la puerta de entrada al álgebra escolar) y utiliza determinada *técnica didáctica* (como, por ejemplo, pasar de ciertos problemas simples conocidos por los alumnos sobre el cálculo de porcentajes e impuestos, a los correspondientes problemas inversos que surgen al permutar entre sí los datos y las incógnitas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 194)) se ve llevado a interpretar y justificar su manera de hacer –su técnica didáctica- basándose en el modelo dominante del álgebra escolar. Incluso la *elección de la situación para introducir las ecuaciones de primer grado* (proveniente siempre de una situación aritmética) y la propia *interpretación dominante de las ecuaciones de primer grado* (como igualdades numéricas en la que aparece algún término desconocido) que condicionan fuertemente el proceso de estudio del álgebra escolar, dependen de la interpretación del álgebra escolar como "*aritmética generalizada*".

TAD 10. *¿Qué cambios se producen en el contrato didáctico institucional en el paso de la Enseñanza Secundaria a la Enseñanza Universitaria de las matemáticas? ¿Cómo se reflejan estos cambios en las correspondientes praxeologías matemático-didácticas y, en particular, en los correspondientes procesos de algebrización?*

Al avanzar de la E.S.O. al Bachillerato y, sobre todo, de Secundaria a la Universidad, el proceso de algebrización de las praxeologías matemáticas estudiadas avanza muy rápidamente, de tal manera que aunque *nunca se muestra la continuidad y el carácter progresivo de la algebrización*, el proceso continúa y a cierto nivel escolar (que suele coincidir con el inicio de la Enseñanza Universitaria) todas las organizaciones matemáticas que se estudian están completamente algebrizadas, se da por supuesta su algebrización y se ignoran absolutamente las praxeologías prealgebraicas anteriormente estudiadas. Llamaremos a este fenómeno matemático-didáctico, el *fenómeno de la algebrización abrupta de las organizaciones matemáticas*. Dicho fenómeno queda claramente reflejado, como no podía ser de otra manera, en los cambios bruscos de algunas de las cláusulas del contrato didáctico institucional al pasar de Secundaria a la Universidad (Gascón, 1997). Aparecen fenómenos matemático-didácticos nuevos que hemos empezado a estudiar en un trabajo todavía pendiente de publicación (Bolea, Bosch y Gascón, 2000).

Postulamos que, a medida que avancemos en la solución de los diez problemas enunciados anteriormente, estaremos en mejores condiciones para explicar la génesis, las relaciones mutuas y las consecuencias de dos fenómenos, aparentemente contradictorios entre sí: el de la ***progresiva aritmetización del álgebra escolar***, que alcanza, al menos, toda la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años), y el de la ***algebrización abrupta de las praxeologías matemáticas***, que puede observarse especialmente en el paso de la Enseñanza Secundaria a la Enseñanza Universitaria[44]. Estos dos fenómenos ocupan actualmen-

[44] El estudio de los cambios que se producen en el contrato didáctico institucional en el paso de la Enseñanza Secundaria a la Enseñanza Universitaria de las matemáticas puede ayudar a comprender algunos aspectos de estos fenómenos (Fonseca y Gascón, 2000).

te una posición central en el análisis de la ecología institucional de las praxeologías matemático-didácticas en torno al *álgebra escolar*[45].

Barcelona, Julio de 2001

Bibliografía

Artigue, M. (1990): Épistémologie et didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10, 2.3, 241-286.

Arzarello, F., Bazzini, L. y Chiappini, G. (1994): The process of naming in algebraic problem solving, Proc. *PME XVIII*, Lisbon, II, 40-47.

Asiala, A., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996): *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education*, en Kaput J., Shoenfeld, A. y Dubinsky, E. (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education II, pp. 1-32.

Ausbel, D.P. (1968): *Educational Psychology: A Cognitive View*, Holt, Rinehart and Winston: New York.

Bauersfeld H., y Skowronek H. (1976): Research Related to the Mathematical Learning Process, en Athen y Kunle, (eds.), 231-245.

Bazzini, L., Gallo, E., y Lemut, E. (1996): Studies on Teaching and Learning Algebra, en Malara, N., Menghini, M., y Reggiani, M. (eds.), *Italian Research in Mathematics Education 1988-1995*, C.N.R.: Roma, pp. 40-54.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1994): The emergence and development of algebra in a problem solving context: A problem analysis, Proc. *PME XVIII*, Lisbon, II, 64-71.

Bednarz, N., Radford, L., Janvier, B. y Lepage, A. (1992): Arithmetical and algebraic thinking in problem-solving, Proc. *PME XVI*, Durham, NH: University of New Hampshire, I, 65-72.

Bell, A. y Malone, J. (1993): Learning the language of algebra, Proc. *PME XVII*, Tsukuba, Japan, I, 130-137.

Boero, P. (1996): Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving, in Sutherland R (ed.): *Algebraic Processes and Structures*, Kluwer.

Boero, P. (1998): Inequations: pour une recherche pluridisciplinaire, *SFIDA-XI*, Nice.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998a): Le caractère problématique du processus d'algébrisation. Proporcionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire, *Actes de la IXème école d'été de didactique des mathématiques*, ARDM, 153-159.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001): La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (pendiente de publicación).

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J., (1998b): The role of algebraization in the study of a mathematical organization, CERME-1, Osnabrueck, Germany.

Bolea, P., Bosch, M., García, J., Gascón, J., Ruiz, L. y Sierra, T. (2000): Análisis didáctico del artículo "*El peso de un re-*

[45] Es importante subrayar que, aunque inicialmente estos dos fenómenos puedan describirse como *fenómenos matemáticos* (puesto que, en primera instancia, hacen referencia a cambios en la naturaleza y las relaciones entre los componentes de las *organizaciones matemáticas*), ambos modifican profundamente la naturaleza de los *procesos de estudio* posibles de determinadas organizaciones matemáticas en el seno de una institución. Por tanto, inciden sobre las *organizaciones didácticas* y deben ser considerados como verdaderos *fenómenos matemático-didácticos.*

cipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM" en el marco de la teoría antropológica, Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Booth, L. (1984): *Algebra: Children's Strategies and Errors*, NFER-Nelson.

Bosch, M. (1994): *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999): La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-124.

Brosseau G. (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7.2, 33-115.

Brosseau, G.. (1998): *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970–1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Eds.). Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions.

Brousseau G. (1980): Problèmes de l'enseignement des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1(1), 11-59.

Brousseau, G. (1981): Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 37-127.

Brousseau, G. (1987): Représentation et didactique du sens de la division, in G. Vergnaud, G. Brousseau et M Hulin (ed.), *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, Actes du colloque du Sèvres, pp. 47-64, La pensée sauvage: Grenoble.

Brousseau, G. (1994): Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, *ICMI Study 94*: Washington.

Brousseau, G. (1995): Promenade avec Thalès, entre la Maternelle et l'Université, in Commission inter Irem premier cycle *Autour de Thalès*, pp. 87-124.

Brousseau, G. (1998): *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970–1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Eds.). Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions.

Burton, M. (1988): A linguistic basis for the student difficulties with algebra, *For the Learning of Mathematics*, 8, 2-7.

Chevallard, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir eneigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.

Chevallard, Y. (1989a): *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'IREM Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989b): *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire*, Nota de síntesis disponible en el IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989c): Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel, *Séminaire de Didactique des Mathé-matiques et de l'Informatique de Grenoble*, Université Joseph Fourier.

Chevallard, Y. (1990): Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. Première partie, *Petit x*, 27, 41-76.

Chevallard, Y. (1991): *Didactique, anthropologie, mathématiques*, Postfacio a la 2ª edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.

Chevallard, Y. (1991a): *Didactique, anthropologie, mathématiques*, Postfacio a la 2ª edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage: Grenoble.

Chevallard, Y. (1991b): Cours de Didactique des Mathématiques, Documento no publicado.

Chevallard, Y. (1992): Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées pau une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1996): La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique, en R.

Noirfalise et M-J. Perrin-Glorian (coord.), *Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques* (Saint-Sauves d'Auvergne, 1995), 83-122.

Chevallard, Y. (1997): Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17/3, 17-54.

Chevallard, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.

Chomsky, N. (1965): *Aspects of the Theory of Syntax*, M.I.T. Press: Cambridge (Mass.)

Clement, J. (1982): Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception, *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 16-30.

Comin, E. (2000). *Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire.* Tesis doctoral, Université Bordeaux I.

Cooper, M. (1984): The Mathematical "Reversal Error" and attempts to correct it, en B.Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy y K. Collis (eds.), *Proceedings of the eighth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp.162-171.

Cortéz, A. (1992): Invariants operatoires dans le traitement des equations, *Actes du colloque du programme cogniscience du CNRS ECCOS'92*; Orsay.

Derrida, J. (1967): *De la grammatologie*, Les Editions de Minuit, París.

Drouhard, J. P. (1992): *Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Elémentaire*, Tesis Doctoral, Université Denis Diderot, París 7.

Dubinsky, (1991): Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en David Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, pp. 95-126.

Eco, U. (1976): *Tratado de Semiótica General*, Ed. Lumen: Barcelona (5ª ed., 1995).

Filloy, E. y Rojano, T. (1984): From an arithmetical to an algebraic thought (A clinical study with 12-13 years old), *Proceedings of the Sixth Annual Conference for the PME, North American Chapter* (p. 51-56), Madison, WI: University of Madison.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989): Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra, *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Fonseca, C. y Gascón, J. (2000): Reconstrucción de las organizaciones matemáticas en las organizaciones didácticas, XIV Jornadas del SIIDM, Cangas do Morrazo, abril del 2000. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Frege, G. (1892): Uber Sinn und Bedeutung, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, Nueva Serie, 100, 25-50. [Traducción castellana de Ulises Moulines, Sobre sentido y referencia, en *Estudios sobre semántica*, pp. 51-86, Ediciones Orbis: Barcelona, 1984].

Freudenthal, H. (1981): Major Problems in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, 12-2, 133-150.

Freudenthal, H. (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*, Reidel: Dordrecht.

Gascón, J. (1993): Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), 295-332.

Gascón, J. (1994): Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée", *Petit x*, 37, 43-63.

Gascón, J. (1997): Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad, *Suma*, nº 26, 11-21.

Gascón, J. (1998): Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7-34.

Gascón, J. (1999): La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar, *Educación matemática*, 11/1, 77 - 88.

Gascón, J. (1999a): La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar, *Educación matemática*, 11/1, 77 - 88.

Gascón, J. (1999b): "Didactique fondamentale" versus "Advanced Mathematical Thinking": ¿Dos Programas de Investigación inconmensurables? *Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Tome II, pp. 152-170. Editeur: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

Gascón, J. (2001): Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME* (pendiente de publicación).

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994): Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Di-dactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998): Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, *Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SIIDM)*, Jornadas de Baeza. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Kaput, J. (1983): Errors in translations to algebraic equations: Roots and implications, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 5, 63-78.

Kaput, J. (1987): Algebra papers: A representational framework, en N. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp.345-354.

Kaput, J. (1996): ¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra? I y II, *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 9, 85-97 y 10, 89-103.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989): El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229-240.

Kilpatrck, J. (1992): A history of research in Mathematics Education, en Douglas A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on ma-thematics teaching and learning*, Macmillan Publishing C.: New York, pp. 3-38.

Küchemann, D. (1981): Algebra, en Hart, K. (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics*, Murray: London, pp.11-16.

Laborde, C. (1990): Language and Mathematics, en Nesher, P. y Kilpatrick, J. (eds.), *Mathematics and Cognition*, 53-69, Cambridge University Press: Cambridge.

Lakatos, I. (1971): *Historia de la ciencia y sus reconstrucciones racionales*, Tecnos: Madrid, 1974.

Lakatos, I. (1978): *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Philosophical Papers Volume I, Cambridge University Press: Cambridge.

Matz, M. (1980): Towards a computational theory of algebraic competence, *Journal of Mathematical Behavior*, 3, 93-166.

Matz, M. (1982): A process model for high school algebra errors. In Sleeman y Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems*, Academic Press: New York.

Moreira, M. A. y Novak, J. D. (1988): Investigación en enseñanza de las ciencias en la Universidad de Cornell: esquemas teóricos, cuestiones centrales y abordes metodológicos, *Enseñanza de las Ciencias*, 6(1), 3-18.

Novak, J. D. (1977): *A Theory of Education*, Cornell University Press: Cornell. [Traducción castellana de Cristina del Barrio y Celina González, *Teoría y práctica de la educación*, Alianza Editorial: Madrid, 1982].

Radford, L. y Grenier, M. (1996): Entre les choses, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre, *Revue des sciences de l'education*, XXII/2, 253-276.

Ramonet, I., 1996. *Pensamiento único y nuevos amos del mundo*. En Chomsky, N. y Ramonet, I., *Cómo nos venden la moto*, Icaria: Barcelona.

Reggiani, M. (1994): Analisi di difficoltà legate all'uso di convenzioni nel linguaggio aritmetico-algebrico, en M. Basso et alii, *Numeri e proprietà*, CSU, Parma, pp. 61-66.

Rojano, T. (1994): La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza, *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (1), 45-56.

Ruíz, L. y Rodriguez, J.L. (1994): *La modelización funcional algebraica en la Enseñanza Secundaria: incidencia de la parametrización*, Proyecto de Investigación (no publicado), Universidad de Jaén.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994): The gains and the pitfalls of reification. The case of algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

Sierpinska, A. (1994): *Understanding in mathematics*, The Falmer Press: London.

Sierpinska, A. y Kilpatrck, J. (Edit.) (1998): *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*", Kluwer Academic Publishers: London.

Spagnolo, F. (1995): *Obstacles épistémologiques: le postulat d'Eudoxe-Archimède*, Thèse Université Bordeaux 1.

Trigueros, M. (1997): Le concept de variable est-il un objet mathematique pour les étudiants qui commencent l'université? (pendiente de publicación).

Trigueros, M. (1999): *Un modelo de medida con interacción*, Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid (Facultad de Educación).

Vergnaud, G. (1988): Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre, in Laborde, C. (ed.) *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*, 189-199, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Vergnaud, G. (1991): La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3, 133-169.