
Conversión entre gráficas y ecuaciones a través de la descripción de semiplanos

ARTÍCULOS
DE
INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 13 No. 3 diciembre 2001
75-92

Fecha de recepción: Octubre, 2000

Dra. Claudia Acuña Soto.
Departamento de Matemática Educativa
CINVESTAV
cacuna@mail.cinvestav.mx

Resumen: *La graficación de ecuaciones, en el nivel bachillerato, requiere de transformar una ecuación en una gráfica. Ultimamente también se considera de importancia para el aprendizaje de la matemática el hacer el proceso inverso. Un proceso en dos direcciones puede ser desarrollado a través de una conversión entre dos registros semióticos distintos, en particular el gráfico y el algebraico. La conversión requiere de hacer explícito las variables, en los registros participantes, que permitan pasar de un registro a otro. En el siguiente trabajo proponemos un esquema de tipo semiótico que relaciona las variables adecuadas para esta conversión para un caso específico. Analizamos las respuestas de tres muestras de estudiantes de bachillerato a partir de dicho esquema. Las tareas desarrolladas por los estudiantes fueron: a) localizar puntos sobre semiplanos, b) localizar semiplanos horizontales o verticales y c) describirlos en lenguaje natural y/o expresión algebraica. Las respuestas muestran aspectos irrelevantes en las tareas propuestas, estos sugieren una concepción que hace hincapié en los ejes coordenados, encontramos que esta concepción, en el nivel en que se encuentra, inhibe aspectos importantes de la relación gestalt del plano lo que obstaculiza la conversión y en general la graficación.*

Abstract: *Making graphs usually support on equations in the learning of the high school students and they need to change an equation to a graph, lately mathematics educators consider the converse transformation too. One movement in two directions can be developed between two representations of different semiotic registers. In this paper. I propose a semiotic schema where there is a relation between graphs and categorical variables, I analyze with this schema some results of three samples of high school students (17 years old). The tasks are about a) to find points on the Cartesian plane; b) to meet horizontal or vertical planes; and c) to describe them in natural language. The answers show the existence of irrelevant aspects in the answers, the students' conception focus on their attention on the axes. We find that this conception, relative to construction and description, avoid some important aspects of the gestalt relationship on the plane and, for this reason, it can be an obstacle for the conversion and for making graphs on the plane.*

Introducción

La graficación, en el bachillerato, generalmente se utiliza como una herramienta para construir la gráfica de una ecuación determinada. El método de graficación más popular es el del llamado *punteo* que consiste en la localización de puntos sobre el plano como apoyo para la construcción de la gráfica expresada a través de ecuaciones específicas.

Pero, de hecho, en el proceso de graficación se desarrollan una serie de fenómenos cognitivos que con el sólo punteo se deja al margen fenómenos que podrían ser apreciados en el momento en que la gráfica debe ser identificada con su ecuación o interpretada matemáticamente, en el caso de que ésta sea estudiada en sí misma y/o como modelo de fenómenos diversos.

Una gran cantidad de problemas han sido detectados a través de años de investigación con relación a la graficación (Leinhardt, et al (1990), Hitt (1995,1996), Goldenberg (1988), Zemira et al (1997), Dunham (1991) entre otros) particularmente cuando ésta juega un papel de apoyo en el aprendizaje del concepto de función.

Algunos de los problemas detectados entre los estudiantes de bachillerato respecto a la graficación, son aquellos relacionados con la identificación entre las gráficas y sus ecuaciones. Raymond Duval (1988) y Claude Janvier (1987) entre otros, han detectado que para un gran número de estudiantes las representaciones gráficas y algebraicas del mismo objeto matemático no pueden ser relacionadas, incluso en los casos muy simples, como por ejemplo $y = 2x$ y $y = x + 2$.

Los estudios desarrollados por Duval nos permiten percatarnos de que los estudiantes no han sido instruidos respecto a las mutuas relaciones significativas entre las gráficas y las ecuaciones, en particular por el tratamiento parcial dado al paso de la ecuación a la gráfica a través del punteo, por un lado, y por el desconocimiento de las leyes semióticas¹ que vinculan a las distintas representaciones, por otro. Se ha encontrado que estos conocimientos son de importancia para el aprendizaje conceptual de la graficación y por tanto de la matemática.

Considerar qué de común y qué de distinto hay entre las representaciones, así como el indagar mediante qué procedimientos podemos llegar de una a otra, no es un trabajo vano, ya que construir relaciones significativas entre las diferentes representaciones enriquece la construcción conceptual del objeto en cuestión.

Con los estudiantes es posible establecer relaciones significativas entre distintas representaciones desde un punto de vista semiótico, en lo referente a la graficación, esto se puede llevar a cabo a través de la identificación de las variables que las relacionan.

En el presente trabajo, proponemos la identificación de las variables de los registros gráfico y algebraico involucradas en las tareas propuestas, ésta sugerencia es apoyada en la necesidad de establecer una conversión entre distintos registros semióticos.

La organización de las variables requeridas por la conversión se establecen mediante un esquema, que además, nos proporciona un marco de referencia para el análisis de los resultados obtenidos.

¹ La ley semiótica que relaciona a las variables algebraicas y a las variables gráficas por ejemplo, en la recta las variables algebraicas m y b en la ecuación $y = mx + b$, determinan los rasgos gráficos particulares de la pendiente y la ordenada al origen en la gráfica de la recta. Inversamente, las variables visuales: *Posición del trazo respecto a los ejes vertical u horizontal*, *Posición del trazo respecto al origen sobre el eje respectivo* y *El despliegue de la zona* nos pueden describir a la recta en su carácter algebraico.

El esquema propuesto nos da la posibilidad de hacer un contraste de los elementos visuales o algebraicos que son identificados y utilizados por el estudiante con aquellos que nos permiten hacer una conversión. En el esquema hemos llamado *aspectos relevantes* aquellos que son necesarios para la conversión en tanto que los *no relevantes* se refieren a los aspectos que los estudiantes destacan en sus descripciones pero que no son útiles para establecerla².

Las preguntas propuestas en los cuestionarios se relacionan con la identificación gráfica, verbal o algebraica de semiplanos horizontales o verticales. Las ecuaciones que aparecen en las preguntas no son utilizadas desde el punto de vista funcional, sino como la descripción de un *lugar geométrico*³.

Marco teórico

Consideramos que los entes matemáticos no son directamente accesibles para su estudio, a diferencia de otras ramas del conocimiento humano, esto quiere decir, por ejemplo, que un número no es el signo que se imprime sobre el papel, ni una recta es un hilo tenso.

De hecho, en matemáticas nos tenemos que contentar con manejar representaciones de los objetos matemático referidos, es a través de esas representaciones como llegamos a conocerlos.

Una representación de un número puede ser ciertamente un signo sobre el papel o el límite de una sucesión. En el caso de una línea recta, una representación puede ser un trazo recto dibujado sobre un plano, otra podría tomar la forma de una ecuación lineal.

Las relaciones entre distintas representaciones matemáticas son frecuentemente utilizadas en la enseñanza, como es el caso del aprendizaje de las fracciones y los números decimales⁴ en donde generalmente se resalta la necesidad de pasar de una representación a otra pero, en otros casos no se da importancia a la relación entre representaciones debido a que unas son utilizadas como subordinadas de otras. En el caso de la graficación, frecuentemente tenemos que la ecuación es la representación que se debe aprender teniendo como apoyo la representación gráfica.

A últimas fechas, se considera que no es suficiente conocer diferentes representaciones de un objeto matemático, sino además se requiere poder relacionarlas como parte de un proceso constructivo de tales objetos.

El enfoque en este trabajo se apoya en las relaciones semióticas que se llevan a cabo entre representaciones gráficas y algebraicas en el proceso de la graficación de semiplanos en el plano Cartesiano.

Raymond Duval (1998) puntualiza que “las representaciones semióticas son representaciones constituidas por signos que pertenecen a un sistema de representación que tienen sus propios condicionamientos de significancia y funcionamiento” (p. 175).

Dos procesos cognitivos ligados entre sí se desarrollan alrededor de las relaciones significativas entre las representaciones, la semiosis y la noesis, que al decir de Raymond

² Estamos utilizando una aplicación de la diferenciación hecha para el caso de definiciones en geometría por Rina Hershkowitz, en Visualización in Geometry, Two Sides of the Coin, *Focus of Learning of Mathematics*, v. 24 No. 1.

³ “Definición 1: El conjunto de los puntos, y solamente de aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan una ecuación $f(x,y) = 0$, se llama gráfica de la ecuación o, bien su lugar geométrico”, C. Lehmann (1968).

Duval (1993) se pueden definir de la siguiente manera: “llamaremos semiosis a la aprehensión o la producción de una representación semiótica. Llamaremos noesis a la aprehensión conceptual de un objeto” (p119).

Abundando sobre el mismo tema Kuntz Gérard (1996) puntualiza que “la semiosis (acto de aprehender las representaciones semióticas imaginadas por otros y producidas por uno mismo, mental o materialmente) está íntimamente ligada a la cualidad de la noesis, acto de concebir con el pensamiento (aprehensión conceptual del objeto, discriminación de una diferencia o comprensión de una inferencia)”(p. 47-48).

El proceso que relaciona a las representaciones de un objeto matemático, desde un punto de vista semiótico, es la operación cognitiva llamada *conversión*. Una conversión en el sentido de Raymond Duval (1998) no se reduce a una decodificación o a una interpretación aunque está relacionada con ellas. La conversión requiere de procedimientos adicionales debido a que existen relaciones significativas entre los conjuntos de signos bien formados que escapan a una decodificación o interpretación literal.

De la misma manera como una traducción literal omite significados relacionados con el uso socializado, la decodificación, la traslación o la interpretación son procesos que si bien establecen relaciones de significado entre representaciones, son insuficientes para establecer todas las claves que nos permitirán relacionar los significados entre representaciones de registros distintos, en ambos sentidos.

Por ejemplo, si realizáramos una decodificación de la gráfica para obtener la ecuación de una recta, realizaríamos una inspección de la gráfica, entorno desde donde pretendemos resolver el problema y procederíamos así:

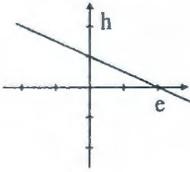
Representación gráfica	Representación algebraica
 <p data-bbox="204 1310 673 1381">Si los puntos (e,0) y (0,h) están sobre la recta, entonces.....</p>	<p data-bbox="716 1108 1166 1179">La ecuación de la recta puede tomar la forma:</p> $y = m x + b \text{ donde } m \text{ es } h / e$ $y \quad b = h$

Gráfico No. 1 Relación codificada de representaciones distintas

La decodificación de esta gráfica en particular se apoya en el hecho de hacer explícitos los elementos visuales significativos de la recta, en particular, la gráfica proporciona dos de los puntos que pertenecen a la recta, solo hay que leer sus coordenadas⁴.

La decodificación de la ecuación con base en la gráfica nos permite reconstruir la primera, pero el tránsito en sentido opuesto tiene un problema fundamental, le es imposible

⁴ Se podría argumentar que las intersecciones de las rectas no siempre están sobre marcas de números enteros, este es un problema de índole distinta al que nos ocupa, actualmente las calculadoras graficadoras o las computadoras resuelven ese problema con cálculos directos sobre los valores de las coordenadas de los puntos.

reconstruir la continuidad⁵ de la curva correspondiente debido especialmente a que la regla de código solo se refiere a los puntos que están sobre la curva en cuestión.

Respecto a la decodificación del registro gráfico en términos del registro algebraico R. Duval (1998) puntualiza que: “el sistema semiótico de representación gráfica permite definir una regla de codificación: a un punto del plano le corresponde una pareja de números. Luego cualquier pareja de números codifica un punto del plano así localizado... ella permite marcar tantos puntos como se quiera, pero no hacer el trazo continuo de una recta o una parábola. Para ello, es necesario interpolar y aceptar la pertinencia de la ley gestaltista de contigüidad” (p.180).

Por lo anterior la decodificación no proporciona todas las claves para el tránsito entre las representaciones algebraica y gráfica de la recta.

La decodificación de la gráfica anterior también deja al margen otros atributos de la recta especialmente en lo que se refiere a la relación *gestalt*⁶ entre el fondo (ejes coordenados) y la forma (la gráfica), esta relación no queda satisfecha con la sola lectura del valor de ordenada y abscisa para cada punto.

La relación *gestalt* puede observarse en el establecimiento de reglas generales de procedimiento, además de la relación cuantitativa entre los puntos y las coordenadas, esta relación también la encontramos en características que aparecen en un papel secundario en el tratamiento dado en el salón de clases, como las siguientes:

- El trazo se expande infinitamente en ambos extremos.
- El signo de la pendiente es negativo (o positivo) debido a la posición de la recta respecto a los ejes, descendiente de izquierda a derecha con relación a la dirección acordada del eje vertical (o ascendente en el mismo sentido).
- La recta pasa o no por el origen.

Por ejemplo, el considerar la extensión infinita en ambas direcciones de una recta como una de las características que la definen, evita confusiones de ésta con los segmentos de recta así como con las semirectas.

La importancia de la relación *gestalt* se manifiesta también a través del *aspecto* global de la gráfica, las relaciones analíticas no cambian si la escala sobre los ejes cambia, pero el *aspecto* de la gráfica si se transforma. El cambio de *aspecto* toma importancia especialmente cuando la gráfica es usada para la interpretación de un objeto matemático en sí mismo o como modelo de procesos diversos.

Cuando incorporamos estas propiedades a la actividad didáctica, estamos en condiciones de desarrollar la visualización que: “a diferencia de la visión, la cual se basa en el acceso directo al objeto, la visualización se basa en la reproducción de una representación semiótica”, según Duval (1999^a, p. 13).

⁵ El uso implícito del orden de los reales respecto al eje horizontal, en el caso en que la localización de puntos, es tal que puede sugerir a la curva en cuestión, pero esta aproximación a la curva no parece inducir necesariamente a la continuidad de ésta, de hecho no es claro que de la localización repetida de puntos se infiera la continuidad como podemos ver en Paul Goldenberg, (1988), p.153 R. Duval (1998). p 201, nota 7

⁶ Estas relaciones no deben ser confundidas con el uso exclusivo que hacemos de los ejes coordenados para la ubicación espacial de los elementos gráficos apoyándonos en la escala.

Para llevar a cabo una conversión, es decir, de un cambio de registro semiótico entre representaciones distintas, se requiere de la identificación de variables significativas en cada uno de los distintos registros semióticos que las relacionan.

En la diferenciación de las variables que posibilitan la conversión, R. Duval (1998) considera que: [la] “conversión exige que se discriminen bien de las unidades significativas propias de cada registro. En otros términos es necesario identificar bien en el registro gráfico las variables visuales pertinentes con sus diferentes valores y, en la escritura algebraica de una significación, las diferentes oposiciones paradigmáticas que dan una significación, y no solamente un objeto, a los símbolos utilizados” (p. 181).

En el caso que nos ocupa las variables pertenecen a los registros semióticos gráfico y algebraico, apoyados por el registro de la lengua natural, esta última juega un papel de soporte y hace explícitos las consideraciones tanto gráficas como algebraicas. Cabe agregar que “en una expresión algebraica cada símbolo corresponde a una unidad significativa”, R. Duval (1988, p. 127).

A las variables visuales de la gráfica las podemos considerar en dos niveles distintos como se describe enseguida.

Variables generales	Variables particulares
<ul style="list-style-type: none"> - Implantación de la tarea, es decir, lo que se desprende como figura del fondo: un trazo o una zona. - Forma de la tarea: el trazo realizado, que delimite o no una zona, sea recto o curvo, abierto o cerrado. 	<ul style="list-style-type: none"> - La posición del trazo respecto a los ejes vertical u horizontal - Posición del trazo respecto al origen sobre el eje respectivo - Despliege de la zona⁷.

Gráfica No. 2 Variables generales y particulares

En el trabajo de descripción de semiplanos horizontales y verticales, las variables generales se traducen, en el caso de la *implantación de la tarea*, como la zona determinada por el semiplano. En el caso de la *forma de la tarea* se trata de un trazo recto y abierto.

La identificación de las variables visuales y categóricas permite conectar dos significantes de índole distinta pero que responden a un mismo significado, esta tarea permite establecer la relación entre aquellos elementos bajo el supuesto de que la variación de uno da como resultado una variación en el mismo sentido en el otro.

Un ejemplo de relación entre variables es la que existe entre la ordenada al origen de una recta y el parámetro b de ecuación $y = mx + b$ cuando a cada traslación de la recta en el plano se obtiene un cambio en el valor del parámetro b e inversamente.

Para relacionar las variables visuales con las variables categóricas sugerimos el siguiente esquema semiótico (ver gráfico No. 3).

La discriminación de las variables de cada representante en el registro pertinente es de gran importancia para el desarrollo de las operaciones de conversión ya que es a través de ellas que ésta puede realizarse.

⁷ Es decir, la dirección que toma el conjunto de puntos.

VARIABLES VISUALES	VALORES	VARIABLES CATEGÓRICAS (UNIDADES SIGNIFICANTES CORRESPONDIENTES)
Posición del trazo respecto a los ejes	Trazo paralelo al eje horizontal Trazo paralelo al eje vertical	Inecuación con variable independiente y Inecuación con variable independiente x
Posición del trazo respecto al origen en el eje respectivo	El trazo corta al eje horizontal a la derecha del origen El trazo coincide con el eje horizontal El trazo corta el eje horizontal a la izquierda del origen El trazo corta al eje vertical arriba del origen El trazo coincide con el eje vertical El trazo corta al eje vertical abajo del origen	Coefficiente mayor que cero Coefficiente cero Coefficiente menor a cero Coefficiente mayor a cero Coefficiente cero Coefficiente menor a cero
Despliegue de la zona	Hacia arriba Hacia la derecha Hacia abajo Hacia la izquierda	Signo de la desigualdad mayor que Signo de la desigualdad menor que

Gráfico No. 3. Relaciones entre variables visuales, sus valores y las respectivas variables categóricas

Las conversiones pueden ser transformaciones muy simples entre registros y prácticamente directas, como por ejemplo la conversión entre parejas ordenadas y puntos sobre el plano, la pareja ordenada contiene indicaciones en la posición de las entradas los valores numéricos nos permite asignar una posición específica. Sus equivalentes gráficos están dotados de una posición desde donde podemos recuperar a las pareja ordenada a partir de las intersecciones de las rectas paralelas a los ejes que pasan por el punto.

La dificultad en las conversiones está frecuentemente asociada a la congruencia semántica al decir de Duval (1998): “dos representaciones son congruentes cuando hay una correspondencia semántica entre sus unidades significantes, hay univocidad semántica terminal, y hay el mismo orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones... La dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no-congruencia entre la representación de salida y la representación de llegada”(p. 51).

Las tareas propuestas en el cuestionario con el que trabajamos aquí, tienen unidades significantes congruentes⁸, esto quiere decir que en principio hay condiciones de estructura semántica para que la conversión se haga sin dificultad pero, hay otro tipo de distracciones en el desarrollo de la tarea que examinaremos más adelante.

En investigaciones anteriores (Acuña 1998, 1999, 2000) hemos detectado una importante cantidad de aspectos irrelevantes en las respuestas de nuestros estudiantes en tareas de identificación de puntos, rectas y semiplanos tratados como lugares geométricos, además de que algunos de ellos aparecen recurrentemente, cosa que ha despertado especialmente nuestro interés .

⁸ Para ver un análisis de las unidades significantes de cada ejercicio ver el anexo 2

Para llevar
representación
cada uno de
consi
pr

■ Pág. 81 ■

os en la construcción del esquema que relaciona las variables de la detección de aspectos irrelevantes entre nuestras tareas encomendadas, así como en la interpretación de

loca en la identificación de puntos que pertenecen a ciertos tipos semiplanos.

La información sobre gráficas que han tenido nuestros estudiantes en la escuela se refiere a su construcción. El instrumento de construcción utilizado es el llamado punteo o construcción punto-a-punto que consiste en graficar puntualmente a partir de una ecuación.

En estudios anteriores hemos podido constatar que los estudiantes tienen un buen desempeño general en la localización de puntos (Acuña 1998), sin embargo el desempeño de éstos se ve afectado en el momento en el que se solicitan requisitos adicionales sobre la posición relativa entre los puntos u otros elementos gráficos (Acuña 1999).

En experiencias anteriores con cuestionarios de diseño parecido encontramos un conjunto pequeño de respuestas incorrectas de alta frecuencia, por lo que quisimos utilizar tres muestras distintas con el objeto de verificar si estas respuestas aparecen en ellas.

Elegimos tres muestras distintas de estudiantes de bachillerato con diferencias en su extracción social, posición económica, edad y escolaridad. La muestra A consta de 31 estudiantes (17 años) de un bachillerato ubicado en la periferia de la ciudad de México esto quiere decir que su posición económica corresponde a una clase de media a media-baja, la muestra B de 25 estudiantes (17 años) corresponde a un bachillerato de la ciudad de Guadalajara de extracción social urbana y de posición económica media, y la muestra C se forma con 81 (16 años) de ellos de la misma escuela, pero que cursan un grado inferior, la información se detalla enseguida:

Muestra	Ubicación	Posición Económica	Edad
A	Periferia	Media-baja	17 años
B	Centro urbana	Media	17 años
C	Centro urbana	Media	16 años

Gráfico No. 4. Relación entre la ubicación la posición económica y la edad de las muestras participantes

Las conclusiones en este trabajo se apoyan en la presencia de respuestas consideradas afines desde el punto de vista semiótico en muestras consideradas distintas debido a las diferencias de extracción social, posición económica o edad.

Las tareas propuestas eluden la relación directa entre ecuaciones y gráficas, es decir, no proponemos tareas de graficación usando punteo sino de identificación de lugares geométricos, las indicaciones dadas se apoyan en el registro de la lengua natural, que hacen explícitas las expresiones algebraicas en cuestión.

Las peticiones que hacemos a los estudiantes tienen la intención de propiciar sus propias descripciones, ya sean gráficas, verbales o algebraicas, descripciones que reflejen las características de los semiplanos en cuestión.

En este cuestionario las tareas se refieren a: a) localizar puntos sobre semiplanos, b) identificar semiplanos horizontales o verticales a través de las propiedades del conjunto de puntos que describen para sombrearlos y c) describirlos en lenguaje natural y/o expresión algebraica.

Con base en anteriores investigaciones hemos observado la presencia frecuente de ciertos aspectos irrelevantes contrapuestos a los que son relevantes desde el punto de vista de la construcción de conceptos.

¿Cuáles son las características visuales o categoriales relevantes que el estudiante considera, ya sea en la gráfica o en la ecuación que la define?, ¿cuáles son las características que tienen mayor popularidad entre ellos? y ¿cuáles son las concepciones que las apoyan?. Estas son algunas de las preguntas que quisiéramos avanzar en responder a través de este trabajo.

El cuestionario y los resultados

A continuación presentamos una descripción de las preguntas del cuestionario así como los resultados obtenidos en las muestras A, B y C:

No de pregunta	Pregunta	Resultados en las muestras A, B y C
p6	Los puntos con ordenada negativa son los que pertenecen a la zona del plano donde $y < 0$, da tres ejemplos de puntos en esa zona	A 50.2%, B 57.5%, C 48%
p8	Si un punto tiene ordenada positiva y abscisa negativa ¿en qué cuadrante lo podemos encontrar?	A 71% B 84%, C 88.5%
p9	¿La zona del plano donde $y > -1$ es la misma zona que aquella donde $y < 1$? ____ analiza la pregunta y si crees que no son iguales, da un ejemplo de algún punto que esté en uno de estas zonas pero que no esté en la otra	A 3.2%, B 32%, C 16.4%
p10	En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona donde todos los puntos tienen ordenada menor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $y < 2$, di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa zona.	A 51.5%, B 82%, C 65.9%
p11	En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona en la que todos los puntos tienen abscisa mayor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $x > 2$, di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa	A 50.8%, B 90%, C 71.3%
p12	Todos los puntos con ordenada mayor a -2 a) ¿están en la zona del plano que queda por encima o por debajo de la recta marcada $y = -2$? _____ b) sombréala	A 25.8%, B 80%, C 49.1%
p13	Sombrea la zona del plano en donde están todos los puntos con abscisas mayores a -2, es decir donde $x > -2$	A 32%, B 68%, C 28.3%

Gráfico No. 5. Relación de preguntas consideradas en este trabajo.
Para una presentación completa del cuestionario ver el anexo 1

El diseño del cuestionario y las experiencias anteriores, nos hacen considerar que las preguntas y tareas requeridas en él, como la comparación de zonas de la pregunta 9, que no son usuales en los cursos impartidos en este nivel, puede influir en los resultados que obtuvimos, sin embargo en el transcurso de la Discusión y las Conclusiones podremos observar que la frecuencia en esta pregunta no se debe sólo a lo inusual de la pregunta sino a cierto tipo de concepciones de los estudiantes.

El resto de las preguntas como la localización de puntos sobre ciertos planos, identificar semiplanos para sombrearlos y descripción de las características de los conjuntos de puntos pueden ser apoyadas con el método del punteo, ya sea como criterio de construcción o de localización, en general los programas de estudio de bachillerato contienen los conocimientos necesarios para resolverlas preguntas utilizando este método.

La gráfica que presentamos a continuación muestra un resumen de las frecuencias de las respuestas correctas:

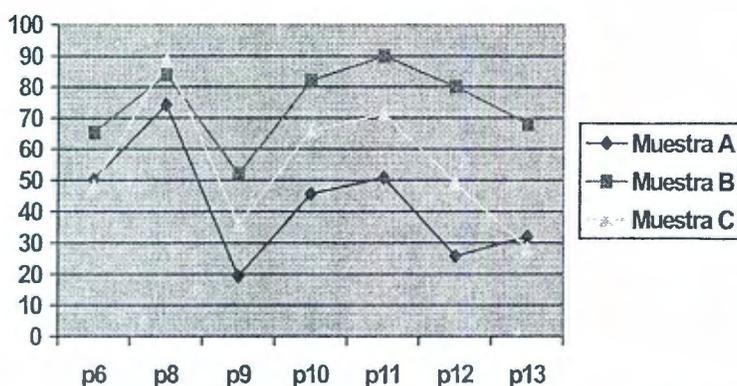


Gráfico No. 6. Frecuencias de respuestas correctas a las preguntas del cuestionario

Podemos observar distribuciones similares en las frecuencias de las tres muestras lo que nos sugiere que p9 representa la mayor dificultad en el cuestionario, en la presentación de esta pregunta no se propuso ninguna gráfica ni se hizo ninguna sugerencia sobre la posibilidad del uso o constatación de la respuesta sobre el plano, de manera que los estudiantes consideraron solamente la representación gráfica y trataron de darle un tratamiento algebraico. Mientras que p11 que se refiere a la localización directa de puntos resultó ser la pregunta más sencilla, a diferencia de la pregunta 10 que tiene el mismo contenido, los cuatro puntos a localizar en p11 en comparación a los cuatro de p10 contenían dos que fueron los de mayor dificultad ((17,-6) y (-47,0)), ver la gráfica de las preguntas 10 y 11.

Las frecuencias de las tres muestras inician muy semejantes hasta la pregunta 9 y a partir de allí se define una posición para cada muestra que no abandona casi hasta el final del cuestionario.

En el siguiente análisis de las respuestas obtenidas hacemos especial énfasis en los aspectos relevantes para el manejo de las variables visuales y los aspectos irrelevantes incluidos por nuestros estudiantes, (ver Gráfico No. 7).

Discusión y Conclusiones

El análisis que llevamos a cabo con los resultados de las muestras es de tipo cualitativo, se hace mención de los porcentajes con el fin de hacer comparaciones en el terreno de lo

Pregunta	Aspectos relevantes	Aspectos no relevantes y consideraciones incorrectas	Tipo de error
P6. Los puntos con ordenada negativa son los que pertenecen a la zona del plano donde $y < 0$, da tres ejemplos de puntos en esa zona	Ordenada negativa en los puntos elegidos	Indicaciones generales la solución reinterpretando la notación algebraica: - 1 y, - 2 y, - 3 y; -1, -2, -3	Puntos con ordenada positiva o cero
P8. Si un punto tiene ordenada positiva y abscisa negativa ¿en qué cuadrante lo podemos encontrar?	Intersección de semiplanos, intersección del plano horizontal (desplegado hacia arriba) con el plano vertical (desplegado a la izquierda)	Intersección de semiplanos confundiendo positivo por negativo y al revés	Elección de cuadrante incorrecto
P9. ¿La zona del plano donde $y > -1$ es la misma zona que aquella donde $y < 1$? _____ analiza la pregunta y si crees que no son iguales, da un ejemplo de algún punto que esté en uno de estas zonas pero que no esté en la otra	Despliegue de cada zona, posición de la ordenada	Dos signos en una desigualdad sugieren un cambio por otro signo de sentido contrario.	Los semiplanos $y > -1$ y $y < 1$ son iguales.
P10 En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona donde todos los puntos tienen ordenada menor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $y < 2$. Di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa zona.	Punteo en los casos accesibles sobre la hoja de papel. Orientación general de la positividad en los casos de puntos inaccesibles	Defectos en la localización de ordenada y abscisa en los puntos sobre la hoja de papel. Orientación equivocada en los puntos inaccesibles.	a) Localización defectuosa de puntos b) Localización defectuosa de zonas en donde estarían los puntos inaccesibles
P11. En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona en la que todos los puntos tienen abscisa mayor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $x > 2$, di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa zona	Punteo en los casos accesibles sobre la hoja de papel. Orientación general de la positividad en los casos de puntos inaccesibles	Defectos en la localización de ordenada y abscisa en los puntos sobre la hoja de papel. Orientación equivocada en los puntos inaccesibles.	a) Localización defectuosa de puntos b) Localización defectuosa de zonas en donde estarían los puntos inaccesibles
P12 Todos los puntos con ordenada mayor a -2 a) ¿están en la zona del plano que queda por encima o por debajo de la recta marcada $y = -2$? _____ b) sombréala	Despliegue del semiplano horizontal hacia arriba	Recta del eje horizontal como cota para el semiplano	Despliegan la zona por debajo de la recta. Somborean el semiplano hacia arriba hasta la recta del eje horizontal formando una franja. (A 16.1%, C 11.5%)
P13 Sombrea la zona del plano en donde están todos los puntos con abscisas mayores a -2, es decir donde $x > -2$	a) Posición del trazo respecto a los ejes (vertical) b) Despliegue del plano (a la derecha) c) Posición del plano respecto al origen (dos unidades negativas)	Confusión entre ordenada y abscisa y/o el signo de la desigualdad y/o signo del numeral	Despliegue del semiplano vertical a la izquierda. Despliegue del semiplano en $x = n$, con n distinto de -2 Semiplano horizontal.

Gráfico No. 7. Relación entre las preguntas sus aspectos relevantes, no relevantes y los tipos de error correspondientes

cercano, igual y desigual, los resultados aquí obtenidos no tienen un carácter conclusivo sino más bien indican la existencia y permanencia de los fenómenos en distintas muestras.

El punteo o localización de puntos con base en los valores establecidos por la ordenada y la abscisa es una estrategia que se basa en:

- La lectura de la pareja ordenada, la primera entrada corresponde a la abscisa, la segunda a la ordenada.
- Positividad o elección de la dirección que se debe de tomar respecto a los ejes si la coordenada en cuestión es positiva o negativa.
- La numerabilidad, o elección de la posición del numeral de la ordenada o de la abscisa correspondiente.

En el caso de las preguntas p10 y p11 tenemos los resultados en la siguiente gráfica:

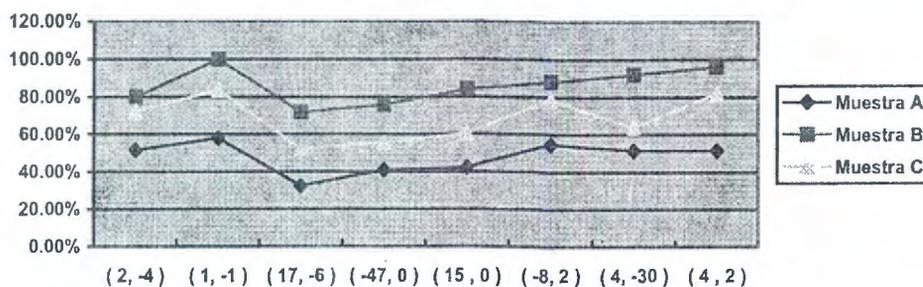


Gráfico No. 8. La primera mitad de la gráfica da cuenta de los ejercicios de p10 y la segunda mitad de p11

La gráfica anterior nos sugiere que la localización de puntos sobre el plano no es homogénea, esto quiere decir que la sola estrategia de la localización apoyada por el punteo no es suficiente para resolver correctamente todos los casos de localización de puntos.

Si la razón de este hecho la apoyamos en el uso defectuoso de la *positividad*, tenemos los puntos solicitados (2,-4), (1,-1) y (17,-6) y que en todos los casos se refieren a puntos con *abscisa positiva y ordenada negativa* y que están sobre la hoja de papel los resultados son distintos como podemos ver en la gráfica anterior, por lo que esta opción no puede ser la causa exclusiva del error.

Podríamos pensar entonces, que el problema de la no-homogeneidad radica en la *numerabilidad*, podríamos suponer que no se contabiliza adecuadamente el numeral asociado a la coordenada, pero entonces ¿qué debería suceder con los puntos inaccesibles? como y (-47,0) en el semiplano horizontal (p10) y el punto (4,-30) en el plano vertical (p11) en donde no habrá manera de contabilizar el numeral y el estudiante se verá en la necesidad de estimar la posición usando una combinación entre la numerabilidad y la positividad.

Los resultados sugieren que los puntos inaccesibles, son tratados de manera distinta, así tenemos que fue más difícil decidir correctamente si el punto (17,-6) estaba sobre la zona correcta que el punto (-47,0) o (4,-30).

Ni la lectura de la pareja, la positividad o la numerabilidad por sí mismas son las únicas causantes de los errores y de la no-homogeneidad .

Es en este punto donde la relación *gestalt* muestra su presencia en la tarea, en el caso de las dos últimas parejas no podemos contabilizar los valores de las coordenadas

porque quedan fuera de la hoja de papel, pero contienen numerales que orientan sobre la posición de los puntos como es el cero en un caso y el cuatro en el otro.

Este método de orientar la posición de los puntos con base en una estimación de las coordenadas podría ser útil en todos los casos, pero pareciera ser que lo usan sólo cuando se encuentran cerca de los ejes o del origen.

En el caso de la pregunta 6 (p6) el inciso a), mencionado al inicio de esta sección, no es parte de la tarea debido a que los puntos son elegidos por el estudiante. En esta tarea es necesario saber de antemano donde está la zona que ocupa el semiplano en cuestión por lo que ha de hacerse uso de los incisos b) y c).

Hemos relacionado a las preguntas p6, p10 y p11 en esta segunda observación en tanto que en todas estas tareas se pide la localización de puntos sobre zonas diversas.

Si comparamos los resultados generales de p6 con p10 y p11 tenemos que la tarea de elegir arbitrariamente tres puntos sobre una zona determinada resultó ser más difícil que verificar si ciertos puntos están o no sobre un cierto semiplano, pese a que desde el punto de vista del punteo las tareas son equivalentes (en el sentido de que una pareja es un punto y un punto es una pareja).

Otra observación que deseamos hacer, es la que se refiere a p8, (zona de ordenada positiva, abscisa negativa) y p12 (zona de puntos con ordenada mayor a -2).

Aunque en ambas preguntas se pide el valor (derecha-izquierda, arriba-abajo) de la variable visual *despliegue del semiplano*, es decir, en ambas tareas hay que localizar una zona que en un caso se trata de una intersección de semiplanos y en el otro de un semiplano horizontal, la diferencia en las frecuencias de aciertos es notable y apunta nuevamente hacia la orientación de los ejes, la intersección de estos semiplanos fue una tarea más simple que la de localizar el semiplano horizontal, situación que no parece ser general ya que la intersección de estos planos es especialmente conocida y tratada en clase.

Respecto a la pregunta 12, algunos de los estudiantes de las muestras A y la C construyeron una franja con la recta $y = -2$ y el eje horizontal (16.1% y 11.5% respectivamente), la presencia del eje horizontal impuso aspectos irrelevantes inesperados en las respuestas. Los estudiantes quedando atrapados por un lado con la atracción del eje y la recta, y posiblemente con la idea errónea de que los puntos de la zona deben tener ordenada mayor a -2 lo que la hace necesariamente negativa.

En p9 no presentamos un gráfico de un plano en donde los estudiantes pudiesen hacer sus bocetos o dar la solución, esto parece haberlos orillado, entre otras cosas, a responder la pregunta desde un punto de vista algebraico, en donde la tentación de justificar los aparentes *cambios de signo* en un caso y el de la desigualdad en el otro fue muy fuerte, este fue el error con la frecuencia más alta de todas las tareas. No detectamos ningún intento de graficación en esta pregunta.

Por último, en lo que respecta a la pregunta 13 (p13), en cuya gráfica no proporcionamos la recta que acota al semiplano en cuestión, tenemos que los errores cometidos se concentran al equivocar el despliegue del plano (a la izquierda en lugar de la derecha), a errores en: la numerabilidad y a la lectura de la pareja coordenada. La confusión entre ordenada y abscisa se traduce en la elección del plano horizontal en lugar de vertical.

En general, podemos apuntar que la numerabilidad y la positividad así como la lectura de la pareja no son los únicos actores presentes en las soluciones de las tareas propuestas de identificación y localización de puntos, está presente también una interpretación de la relación gestalt que les permite orientar la posición de los puntos, pero esta

apreciación no es homogénea, es decir, encontramos una diferencia marcada en las soluciones en donde están involucrados los ejes cartesianos o el origen y donde no.

Algunos estudiantes tienen dificultades para desarrollar una orientación exacta que considere la positividad (para la localización de los puntos y para el despliegue de las zonas) y la numerabilidad (para la localización de puntos y el corte de los trazos sobre los ejes) fuera de los casos de punteo, esto se debe a que su concepción de la relación gestalt es incompleta.

Los estudiantes no usan el punteo para indagar o corroborar las condiciones generales de los puntos en determinadas zonas, difícilmente los ven como elementos asociados por indicaciones generales, por lo que los semiplanos de estas tareas no pueden ser vistos, en una gran cantidad de casos, como lugares geométricos. El proceso de decodificación puntual (pareja-punto y punto-pareja) también se ve obstaculizado debido a que no se reconoce su utilidad al margen del punteo.

Desde el punto de vista de la didáctica el carácter de la decodificación que subyace al método del punteo posibilita el análisis y la reflexión sobre las propiedades de los lugares geométricos.

Los estudiantes no cuentan con códigos para identificar a las variables visuales relacionadas con las categoriales que les permitan interpretar adecuadamente una conversión por lo que muchos de ellos no están en posibilidad de hacer una graficación que involucre la descripción de lugares geométricos.

Referencias

- Claudia Acuña, (1997), Un par de Malos Entendidos entre Estudiantes de Bachillerato en la Colocación de Puntos en el Plano Cartesiano, *Memorias del VI Simposio Internacional de Educación Matemática Elfriede Wenzelburger*, Ed. Asela Carlón, Iberoamerica, p. 183-188
- Claudia Acuña, (1998), Difficulty of the High School Students Understanding the Difference between draw-point and pair-point, *Proceedings of XX PME-NA Annual Meeting*, p.313
- Claudia Acuña, (1999 a), La Ubicación Espacial de Conjuntos de Puntos en el Plano, *Investigaciones en Matemática Educativa II*, Ed. Fdo. Hitt Iberoamérica p 203-223
- Claudia Acuña, (1999 b), La Relación entre el Fondo y la Forma y la Bidimensionalidad de los Puntos entre Estudiantes de Bachillerato, *Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger*, UPN, Grupo Editorial Iberoamérica p. 176-182.
- Penelope H. Dunham and Alan Osborne, (1991), Learning to see: Students' Graphing Difficulties, *Focus on Learning Problems in Mathematics* V. 13 No. 4
- Raymond Duval, (1988), Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres, *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 1, 235-253. versión en español en Gráficas y Ecuaciones, la Articulación de dos Registros, *Antología de Educación Matemática*, Cinvestav-IPN, p.125-139
- Raymond Duval, (1993), Semiosis et Noésis, *Conférence A.P.M.E.P., IREM*, versión en español Semiosis y Noésis en *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas, Escuela Francesa*, Cinvestav-IPN, p. 118-144
- Raymond Duval (1998) Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, *Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa II*, Ed. Hitt, F. Grupo Editorial Iberoamérica. p. 173-201
- Raymond Duval (1999a), Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning, *Proceedings of PME-NA*, p. 3-26.
- Paul Goldenberg, (1988), Mathematics, Metaphors, and Human Factors: Mathematical, Technical, and Pedagogical Challenges in

- Educational Use of Graphical Representation of Functions, *Journal of Mathematics Behavior* 7 p. 132-173.
- Fernando Hitt, (1995), Intuición primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa, *Matemática Educativa* V. 7 No. 1. P. 63-75.
- Fernando Hitt, (1996), Sistemas Semióticos de Representaciones del concepto de Función y su Relación con Problemas Epistemológicos y Didácticos, *Investigaciones en Matemática Educativa*, Ed. Iberoamericana, p. 245-264.
- Claude Janvier, (1987), Translation Processes in Mathematics Education, *Problems in the Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Ed. C. Janvier, 27-32
- Gérard Kuntz (1996) Nota de libros: Sémiotique et Pensée Humaine, registres sémiotiques et apprentisages intellectuels, *L'ouvert* No. 83
- C. Lehmann, (1968), Geometría Analítica, UTHEA
- Gaea Leinhardt, Orit Zaslavsky, and Mary K. Stein, (1990), Functions and Graphing, *Review of Educational Research* V. 60 no. 1 p. 1-64
- Zemira R. Mevarech, and Bracha Kramarsky, (1997), From Verbal Descriptions to Graphic Representations : Stability and Change in Students Alternative Conceptions, *Educational Studies in Mathematics* 32, p. 229-263.

Anexo 1

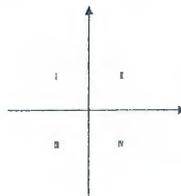
Texto del cuestionario:

6. Los puntos con ordenada negativa son los que pertenecen a la zona del plano donde $y < 0$, da tres ejemplos de puntos en esa zona

A 50.2%, B 57.7%, C 48 %

8. Si un punto tiene ordenada positiva y abscisa negativa ¿en qué cuadrante lo podemos encontrar?

A 71%, B 84%, C 88.5%

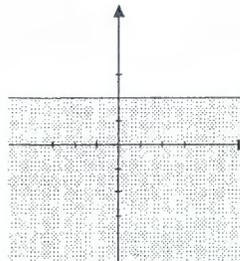


9. ¿La zona del plano donde $y > -1$ es la misma zona que aquella donde $y < 1$? A 19.4%, B 52%, C 36% analiza la pregunta **y si crees que no son iguales**, da un ejemplo de algún punto que esté en uno de estas zonas pero que no esté en la otra

A 3.2%, B 32 %, C 16.4%

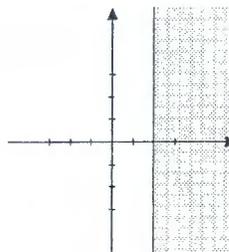
10. En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona donde todos los puntos tienen ordenada menor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $y < 2$, di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa zona.

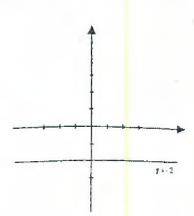
- a) (2,-4) A 51.6%, B 80%, C 72.1%
 b) (1,-1) A 58%, B 100%, C 83.6%
 c) (17,-6) A 32.3%, B 72%, C 52.5%
 d) (-47,0) A 41%, B 76%, C 55.7%

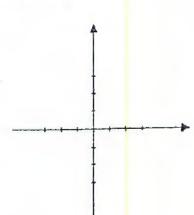


11. En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona en la que todos los puntos tienen abscisa mayor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $x > 2$, di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa zona .

- a) (15,0) A 45.2%, B 84%, C 60.7%
 b) (-8,2) A 54.8%, B 88%, C 78.7%
 c) (4,-30) A 51.6%, B 92%, C 63.9%
 d) (4,2) A 51.6%, B 96%, C 82%



<p>12. Todos los puntos con ordenada mayor a -2 a) ¿están en la zona del plano que queda por encima o por debajo de la recta marcada $y = -2$?</p> <hr/> <p>b) sombréala A 25.8%, B 80%, C 49.1% (correcto en: a) , en b) o en ambos)</p>	
--	---

<p>13. Sombrea la zona del plano en donde están todos los puntos con abscisas mayores a -2, es decir donde $x > -2$</p> <p style="text-align: center;">A 32%, B 68%, C 28.3%</p>	
--	---

Anexo 2

Relaciones de conversión o tratamiento para los ejercicios propuestos en el cuestionario

Lengua Natural	→	Gráfica	Pregunta 6	Conversión
Lengua Natural	→	Gráfica	Pregunta 8	Conversión
Algebra	↘	Gráfica	Pregunta 9	Conversión
		Algebra	Pregunta 9	Tratamiento
Algebra	→	Gráfica	Pregunta 10,11 y 13	Conversión
Lengua Natural	↘	Lengua Natural	Pregunta 12 a	Tratamiento
		Gráfica	Pregunta 12 b	Conversión

Anexo 3

Análisis de congruencia en las conversiones de nuestras tareas y observaciones sobre éstas.

En la pregunta 6 ó p6. la consigna dice: *Los puntos con ordenada negativa son los que pertenecen a la zona del plano donde $y < 0$, da tres ejemplos de puntos en esa zona.* Las unidades significantes son congruentes en tanto que se establece una relación semántica entre ellas *ordenada negativa* y $y > 0$, igual orden de aprehensión y se convierte una unidad significante en la representación de salida en una sola unidad significante de la representación de llegada.

En p8 se dice: *Si un punto tiene ordenada positiva y abscisa negativa ¿en qué cuadrante lo podemos encontrar?.* La conversión es congruente.

En p9 se dice: *¿La zona del plano donde $y > -1$ es la misma zona que aquella donde $y < 1$? _____ analiza la pregunta y si crees que no son iguales, da un ejemplo de algún punto que esté en una de estas zonas pero que no esté en la otra.*

Aquí hay dos posibilidades para la respuesta a la primera parte de la consigna:

1. La relación algebra \rightarrow gráfica . Pueden hacer uso de la construcción de los semiplanos para lo cual se debe establecer la relación entre las unidades significantes de $y > -1$ y $y < 1$ con las gráficas respectivas. Las unidades significantes son congruentes con las expresiones *ordenada mayor a menos uno* y *ordenada menor a uno*, después de una doble conversión y la consecuente construcción solo se requiere una comparación directa.
2. La relación algebra \rightarrow algebra . Pueden operar algebraicamente una inecuación para intentar llegar a la otra. En este caso no hay conversión sino tratamiento en el registro algebraico.

La segunda parte de la pregunta fue omitida en los resultados debido a que no es relevante para la observación .

En p 10.se dice: *En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona donde todos los puntos tienen ordenada menor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $y < 2$, di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa zona.*

Pese a que las unidades significantes son congruentes en esta pregunta y la conversión podría ser casi automática, los errores se relacionan con la numerabilidad y la positividad.

En p 11 se dice: *En la siguiente gráfica hemos sombreado la zona en la que todos los puntos tienen abscisa mayor a 2, es decir donde los puntos cumplen con $x > 2$, di cuál de los siguientes puntos se encuentran en esa zona.*

La situación es la misma que en la pregunta anterior.

En p12 se dice: *Todos los puntos con ordenada mayor a -2 ¿Están en la zona del plano que queda por encima o por debajo de la recta marcada $y = -2$? b) Sombréalo.*

La unidad significativa *Mayor a* se relaciona con *por encima de*. El estudiante debe completar la relación a partir de la información con la que cuenta sobre la positividad del plano en el caso del inciso b) tenemos una conversión con una unidad significativa gráfica.

En p13 se dice: *Sombrea la zona del plano en donde están todos los puntos con abscisas mayores a -2, es decir donde $x > -2$.*

La correspondencia de las unidades significativas es congruente.
