NOTAS
DE
CLASE

La transformada discreta de Laplace

Fecha de recepción: Junio, 2001

Educación Matemática
Vol. 13 No. 3 diciembre 2001
107-114

Kemel George González
Universidad del Atlántico
kgeorge@metrotel.net.co

Resumen: *Uno de los operadores más conocidos en el análisis matemático es la transformada de Laplace. Es tal la transformación que ocurre con las funciones bajo su dominio, que las operaciones de derivación e integración del Cálculo se convierten en operaciones algebraicas de multiplicación y división, lo que facilita enormemente la solución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales. La transformada de Laplace es un operador del dominio continuo, y no se conoce una versión discreta, como sí es familiar la transformada discreta en el análisis de Fourier. Aquí tenemos la oportunidad de inventarla, y demostrar que bajo un modelo infinitesimal de cálculo, la transformada discreta de Laplace no es otra cosa que la transformada de Laplace. Esperamos que el lector juzgue la ventaja didáctica de tal enfoque, hasta ahora, sólo accesible a los especialistas en la materia.*

Abstract: *The Laplace transform is an operator from the continuous domain but, a discrete version is unknown, since The discrete Fourier transform is known; here we have the chance to invent it, and to show that under an infinitesimal model of calculus, the Laplace discrete transform exists and is not other thing than the familiar Laplace transform. It is hoped that the reader judges the didactic advantage of such view, just available for specialists in the subject, until now.*

La transformada de Laplace

Como es de todos sabido[1], la transformada de Laplace es el operador $\mathbf{O}$ que actúa sobre funciones $x(t)$ de dominio continuo $[0, \infty)$ convirtiéndolas en funciones $X(s) = \mathbf{O}\{x(t)\}$ del mismo dominio, donde

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)\exp(-ts)dt$$

Esta integral existe para un conjunto muy apreciable de funciones, particularmente, para las llamadas de orden exponencial, que son aquellas que cumplen la condición

$$|x(t)| \leq A\exp(at), \quad 0 \leq t < \infty$$

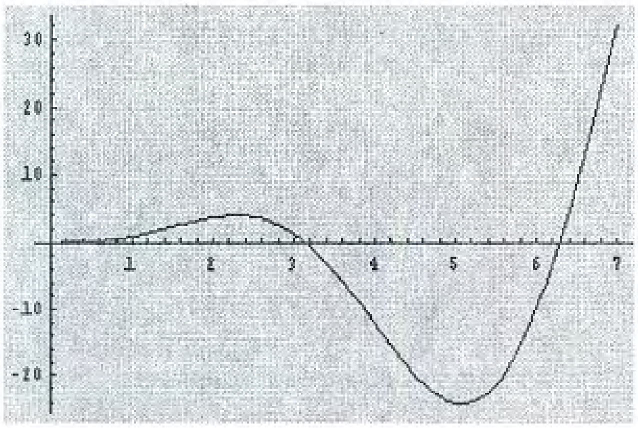
[1] C.H. Edwards, Jr., D.E. Penney, *Ecuaciones diferenciales Elementales con Aplicaciones,* Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1986.

Fácilmente se puede verificar que satisfacen tal condición las funciones polinomiales y racionales, las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas y sus combinaciones. El siguiente ejemplo muestra el cálculo de la transformada de Laplace de la función $x(t) = t^2 \operatorname{sen}(t)$, mediante el programa *Mathematica*[2], función que llamaremos *entrada*,

```
entrada[t_]:=t^2 Sin[t]
```

La gráfica de *entrada* en el intervalo [0, 7] es la siguiente:

```
Plot[entrada[t],{t,0,7}]
```



La transformada de Laplace de tal función la llamaremos *prueba*,

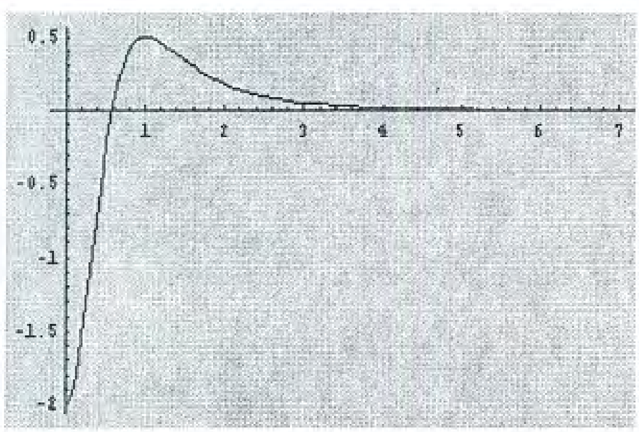
```
<<Calculus`LaplaceTransform`
prueba[s_]:=LaplaceTransform[entrada[t],t,s]
```

Cuya transformada de Laplace es, efectivamente,

$$\frac{8s^2}{\left(1+s^2\right)^3} - \frac{2}{\left(1+s^2\right)^2}$$

La gráfica de *prueba* en el mismo intervalo [0,7] es,

```
Plot[prueba[s],{s,0,7}]
```



[2] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Third Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996.

Nos hacemos la pregunta: ¿podemos hacer tales transformaciones por medios discretos? O más exactamente: ¿existe la transformada discreta de Laplace?

La transformada discreta de Fourier

Para aclarar más el par de preguntas formuladas, vamos a actuar de modo análogo, haciendo uso del análisis de Fourier. La transformada de Fourier[3] es el operador Ⓢ que actúa sobre funciones *x(t)* de dominio continuo (-∞, ∞) convirtiéndolas en funciones *X(f)* = Ⓢ{*x(t)*} del mismo dominio, donde

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j2\pi tf)dt$$

El primer dominio se llama temporal, cuya variable es *t*, y el segundo, frecuencial, con variable *f*. La letra *j* es la unidad imaginaria. Existe una versión discreta de la transformada de Fourier, denominada transformada discreta de Fourier TDF, definida como sigue[4]. Sea T > 0 un real cualquiera y N un entero positivo; seleccionemos del intervalo [0, T] el dominio discreto de N números reales {nT/N}. De otra parte, del intervalo [0, N/T], seleccionemos el dominio discreto {k/T}, donde 0 ≤ n, k, < N. Tenemos así dos dominios, el primero, temporal, y el segundo, frecuencial.

Dada una función de dominio discreto temporal x[nT/N], se define la transformada discreta de Fourier a la función X[k/T] de dominio frecuencial,

$$X\left[\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left[-j2\pi\frac{nk}{N}\right]$$

Aplicando las relaciones de ortogonalidad de las exponenciales complejas discretas, puede demostrarse que existe la transformación inversa

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] = \sum_{k=0}^{N-1} X\left[\frac{k}{T}\right]\exp\left[j2\pi\frac{nk}{N}\right]$$

que se denomina transformada discreta inversa de Fourier TDFI. En la ingeniería y en el procesamiento de señales, no se usa tanto la transformada de Fourier como su versión discreta, y es conocido que, en los cálculos computacionales, quien realmente opera es la transformada rápida de Fourier TRF[5], que está basada en un algoritmo para el cómputo de la transformada discreta de Fourier, a alta velocidad.

Aunque las aplicaciones de la transformada discreta y la transformada rápida de Fourier son enormes[6], hay dos problemas que no podemos dejar de mencionar. El primero es de orden teórico, y es que tiene que ser demostrado que verdaderamente la versión

[3] R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, 1965.
[4] E. O. Brigham, *The Fast Fourier Transform*, Prentice-Hall,Inc. ,1974.
[5] J.W. Cooley, John W. Tukey, «An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series,» *Math. Computations*, 19, April 1965.
[6] E.O.Brigham, The Fast Fourier Transform and Its Applications, Prentice Hall, 1988.

discreta es mucho más que una aproximación del modelo continuo, cuestión que nosotros hemos contribuido a resolver[7]. El segundo es de orden didáctico: la transformada discreta de Fourier involucra la exponencial compleja y produce valores complejos, lo que dificulta su descripción.

De aquí, podemos completar nuestras preguntas iniciales con una sóla pregunta: ¿Es posible construir la versión discreta de la transformada de Laplace que cumpla un papel similar al que cumple la versión discreta de la transformada de Fourier?

La transformada discreta de Laplace

Volvamos nuevamente a la definición de transformada de Laplace. Obsérvese que en la expresión

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)\exp(-ts)dt$$

podemos suponer que la variable s hace el papel de variable de la frecuencia; como el dominio temporal lo sigue recorriendo la variable t, podremos continuar con los dominios discretos temporal y frecuencial {nT/N} y {k/T}, respectivamente. Ahora, el exponente de la exponencial es el producto ts de ambas variables, por lo que en la versión discreta tendrá que corresponderse con el producto (nT/N)(k/T). Teniendo en cuenta que

$$\frac{nT}{N}\frac{k}{T} = \frac{nk}{N}$$

dada una función x[nT/N] del dominio temporal, definiremos *la transformada discreta de Laplace* XL[k/T] como la función discreta

$$XL\left[\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left[-\frac{nk}{N}\right]$$

Hemos utilizado la expresión XL para distinguir la transformada discreta de Laplace de la transformada discreta de Fourier. El parecido de aquella con ésta es grande, salvo que la segunda asume valores reales, no complejos.

Vamos a colocar un ejemplo. Supongamos que tenemos dominios de sólo dos valores, digamos,

$$\left\{0, \frac{1}{2}\right\}, \quad \{0,1\}, \quad T=1, \quad N=2, \quad 0 \le n,k < 2,$$

Toda función sobre el primer dominio será, $x[0]$, $x\left[\frac{1}{2}\right]$. Entonces, la transformada discreta de Laplace es la función sobre el segundo dominio,

[7] K. George, *De la transformada discreta a la transformada integral de Fourier, en un modelo de cálculo infinitesimal,* Memorias, IX Reunión Centroamericana y del Caribe, La Habana, Cuba, agosto de 1995.

$$XL[0] = \frac{1}{2}x[0] + \frac{1}{2}x\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$XL[1] = \frac{1}{2}x[0] + \frac{1}{2}x\left[\frac{1}{2}\right]\frac{1}{e}$$

Aparentemente, esto no brinda mucha información. Pero podemos colocar un ejemplo de mayor complejidad, utilizando nuevamente *Mathematica*, para mostrar la ventaja teórica y didáctica que tiene el método anterior.

La versión discreta del continuo

Consideremos los dominios temporal y frecuencial

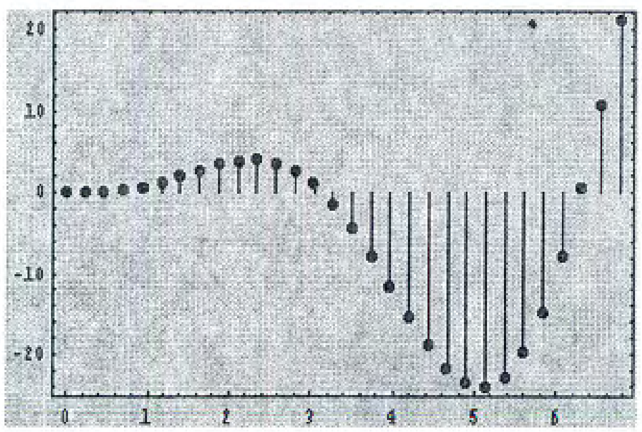
$$\left\{\frac{7n}{30}\right\}, \left\{\frac{k}{7}\right\}, \quad T = 7, \quad N = 30, \quad 0 \le n, k < 30$$

y al primero como dominio de la función $\left(\frac{7n}{30}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{7n}{30}$ que es la versión discreta de la familiar función de dominio continuo t^2 sen t, cuya gráfica y transformada de Laplace ya hemos calculado y graficado. Llamaremos *ejemplo* a dicha función.

```
ejempló[n_]:=(7n/30)^2 Sin[7n/30]
```

Su gráfica es,

```
Show[
Graphics[{PointSize[0.02],
Table[{Line[{{n 7/30,0},{n 7/30,ejemplo[n]}
}],
Point[{n 7/30,ejemplo[n]}]},{n,0,29}]
}],PlotRange->All,Frame->True];
```



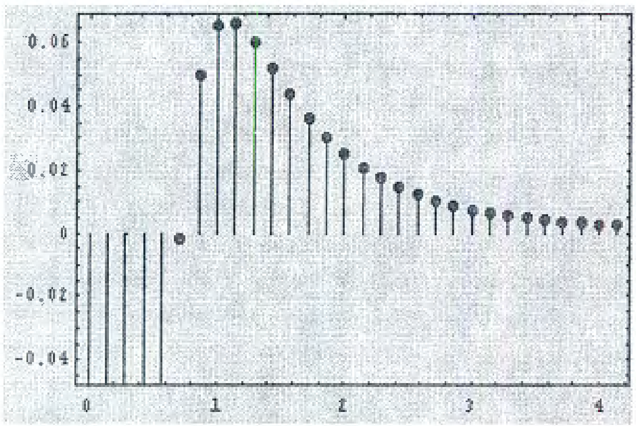
Para calcular su transformada discreta de Laplace, llamémosle *núcleo* al factor exponencial,

```
nucleo[{n_,k_}]:=Exp[(-n k)/30]
```

La transformada discreta de Laplace será la función llamada *discreto,* definida por,

```
discreto[k_]:=1/30Sum[ejemplo[n]nucleo[{n,k}],{n,0,29}]
```

Su gráfica es



Nótese el parecido de ambas gráficas con sus homólogas continuas.

Tránsito del discreto al continuo

La demostración de que la transformada discreta de Laplace, en el límite, es la transformada de Laplace, puede ser extremadamente simple o supremamente difícil. Todo depende, de lo que entendamos por *el límite.* En verdad, nosotros haremos uso del modelo de cálculo que hemos denominado *MicroCálculo*[8], que consiste en la utilización de infinitesimales para producir el tránsito de los modelos discretos a los modelos continuos de cálculo. Pero el lector no tiene por que tener alguna familiaridad con dicho modelo para comprender los siguientes razonamientos.

El punto de partida es el dominio discreto temporal y frecuencial de las funciones y sus transformadas que consiste, como ya vimos, en un par de dominios determinados por $T > 0$ y N entero; definiremos las variables discretas t y s como las variables que recorren los N valores sucesivos de tales dominios,

$$t = \left\{\frac{nT}{N}\right\}, \quad s = \left\{\frac{k}{T}\right\}, \quad 0 \leq n, k < N$$

Si T es finito y N entero finito, como hasta ahora hemos supuesto, tenemos los dominios discretos finitos de N elementos. Ambas variables t y s son discretas. En cambio,

[8] *MicroCálculo* es el logosímbolo del modelo de Cálculo con Infinitesimales inventado por Kemel George González y Carlos Imaz Janhke, (CINVESTAV, México), año 2000.

una nueva situación se produce si mantenemos T como real finito pero hacemos N entero infinito; en ese caso, el cociente T/N será infinitesimal, lo que se denota como T/N = *dt;* por tanto, la variable temporal estará dada por los valores sucesivos $t = \{ndt\}$. Obsérvese que t es una variable *continua* del intervalo continuo [0, T], mientras que s sigue siendo una variable discreta, ya que la cantidad 1/T es un real ordinario.

En resumen, como t asume cada uno de los valores ndt, el dominio temporal se convierte en el dominio continuo, [0,T], y la función $x(ndt)$ ya no es discreta sino continua, esto es, $x(t) = x(ndt)$.

Los cambios en la exponencial también son notables, pues ocurrirá la siguiente conversión,

$$\exp\left[-\frac{nk}{N}\right] = \exp\left[-\frac{nT}{N}\frac{k}{T}\right] = \exp\left[-ndt\frac{k}{T}\right] = \exp\left[-t\,\frac{k}{T}\right]$$

El tránsito de la transformada discreta de Laplace del dominio discreto al continuo, será,

$$XL\left[\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[ndt]\exp\left[-ndt\,\frac{k}{N}\right] = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} x(t)\exp\left(-t\,\frac{k}{T}\right)dt$$

Pero la suma de la derecha no es otra cosa que una integral definida sobre el intervalo [0, T], por lo que podemos considerar, para cada k un coeficiente CK dado por,

$$C_k = XL\left[\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp\left(-t\,\frac{k}{T}\right)dt$$

Recordemos que la variable temporal t recorre el intervalo finito [0, T]. Para calcular la transformada de Laplace, es necesario considerar el intervalo $[0, \infty)$. Para ello, hacemos ahora T real infinito y N entero infinito tal que el cociente T/N todavía siga siendo infinitesimal.

Como 1/T es infinitesimal, hacemos 1/T = ds, por lo que la variable s recorrerá cada uno de los valores kds, y el dominio frecuencial discreto se convierte en dominio continuo de integración $[0, \infty)$. Hacemos ahora el cambio crucial,

$$X(s) = TC_k$$

reemplazando, obtenemos la transformada de Laplace,

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)\exp(-ts)dt$$

que es el resultado que queríamos mostrar, que explica la conversión de la transformada discreta de Laplace en transformada de Laplace.

Desarrollo en serie de Laplace

El paso intermedio mediante el cual el dominio discreto temporal se convierte en dominio continuo temporal ha producido una nueva situación que no podemos dejar pasar desapercibida.

Se trata del coeficiente

$$C_k = XL\left[\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp\left(-t\frac{k}{T}\right)dt$$

que sugiere la asociación de una serie asociada a la función original *x(t)*. Esta situación no es extraña, ya que en el análisis de Fourier, hay un proceso muy similar cuando la transformada discreta se estudia como discretización de la serie de Fourier y ésta como paso intermedio de la transformada de Fourier. En efecto, hay una profunda relación entre la transformada discreta de Laplace y la transformada discreta de Fourier, como se puede ver a continuación. Dado que la transformada discreta de Laplace es

$$XL\left[\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left[-\frac{nk}{N}\right]$$

evaluemos la transformada discreta en el dominio complejo, sobre la recta imaginaria *j*2p*k*. Entonces,

$$XL\left[j2\pi\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x\left[\frac{nT}{N}\right]\exp\left[-j2\pi\frac{nk}{N}\right]$$

Pero la expresión de la derecha no es otra cosa que la transformada discreta de Fourier de la función original. Luego,

$$XL\left[j2\pi\frac{k}{T}\right] = X\left[\frac{k}{T}\right]$$

y como la transformada discreta de Fourier tiene transformada inversa, obtenemos la expresión

$$x\left[\frac{nT}{N}\right] = \sum_{k=0}^{N-1} XL\left[j2\pi\frac{k}{T}\right]\exp\left[j2\pi\frac{nk}{N}\right]$$

que es la fórmula de la transformada discreta inversa de Laplace! De allí que, si quisiéramos obtener un desarrollo en serie de la función original, necesariamente el coeficiente

$$C_k = XL\left[\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp\left(-t\frac{k}{T}\right)dt$$

que corresponde a una transformación inversa en la serie de Fourier, tendría que evaluarse en *j*2p*k*,

$$C_{j2\pi k} = XL\left[j2\pi\frac{k}{T}\right] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\exp\left(-j2\pi t\frac{k}{T}\right)dt$$

el lector reconocerá en esta expresión, el *k*-ésimo coeficiente de Fourier de la respectiva serie de Fourier de la función *x(t)*. En otras palabras, la serie de Laplace, correspondiente a la transformada discreta de Laplace, existe, y no es otra cosa que la familiar serie de Fourier.