
El caos, el orden y Poincaré

NOTAS
DE
CLASE

Fecha de recepción: Junio, 2001

Educación Matemática
Vol. 13 No. 3 diciembre 2001
115-120

Nácere Hayek
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna
nhayek@ull.es

Resumen: *Las contribuciones de Newton (incluyendo el cálculo diferencial y las leyes de la mecánica clásica) junto a la famosa declaración posterior de Laplace, dieron un renovado ímpetu al determinismo. Durante la década de 1890, Poincaré cuestionó creencias tradicionales dentro del marco newtoniano, que muestran que las leyes de Newton no suministran una solución general en el problema interplanetario de tres cuerpos. Más tarde, en los 1960, E. Lorenz descubrió el efecto mariposa, uno de los primeros ejemplos de sistemas dinámicos no lineales simples gobernado por ecuaciones determinísticas que exhibe un comportamiento irregular e impredecible. Este hecho dio lugar a una fascinante combinación de orden y desorden que parecieron estar entrelazados, lo que representó un nuevo concepto de caos. Aquí se da una breve panorámica de ideas que conducen a un entendimiento del comportamiento caótico, donde el elemento clave de esta comprensión es la noción de no-linealidad.*

Abstract: *The Newton's contributions (including differential calculus and the law of classical mechanics) along with the afterwards famous statement of Laplace, gave renewed impetus to determinism. During the 1890's years, Poincaré questioned traditional beliefs within the Newton framework showing that Newton's laws did not provide a general solution in the three-body interplanetary problem. Later, in the 1960's, E. Lorenz discovered the butterfly effect, one of the first examples of simple non linear dynamical systems governed by deterministic equations that exhibited an irregular and unpredictable behaviour. This fact gave birth to a fascinating combination of order and disorder which seemed are interwoven: it represented a new concept of chaos. We here give a brief overview of ideas leading to an understanding of chaotic behaviour, being the key element in this understanding the notion of nonlinearity.*

La denominación de una nueva ciencia, la ciencia del caos, se debe a un término surgido de un descubrimiento de los años 60 debido a E. Lorenz que, dio lugar a lo que se llamaría luego "efecto mariposa", y ofrecería nuevas perspectivas de la realidad sobre las posibilidades del desorden. El término caos no responde ni mucho menos, a la palabra usada en el lenguaje ordinario que, según el diccionario, es descrita como desorden total. El término a que nos referimos, puede ser reemplazado incluso por orden, el cual a su vez, puede engendrar su propio tipo de caos. La idea de caos juega un papel fundamental en la

comprensión de la complejidad e irregularidades de la naturaleza. ¿Qué ocurre ahora realmente con la idea actual de “caos”? El orden y el caos siempre fueron extremos opuestos de un eje en torno del cual se ha venido configurando nuestra perspectiva de ver el mundo. En este sentido, las formulaciones de las teorías del caos han generado una revolución científica que, según el destacado físico norteamericano Joseph Ford, ha logrado dar un drástico giro a la filosofía de la ciencia. Parece así haber quedado disuelto el viejo hechizo que separaba el mundo del caos del mundo del orden, resucitando aquel mito de extraña reciprocidad entre orden y desorden de la que, para muchos, dependió la creación del cosmos. Orden y caos, dos paradigmas ¿iguales o diferentes?. Investigadores en diversas áreas han descubierto mecanismos que determinan que lo no predecible es un hecho de la vida, no una aberración. Han llegado a afirmar que el orden ha dejado de ser sinónimo de ley y el desorden de fuera de la ley. Que ambos poseen leyes, pero responden a comportamientos distintos: una ley para lo ordenado y otra que rige lo desordenado. Sin embargo, aunque aparentan estar reñidos entre sí, cada cual forma parte del otro. Una simbiosis perfecta.

Desde todos los ámbitos del conocimiento, se ha reconocido que el caos es ubicuo. El siguiente párrafo del escritor y poeta norteamericano Wallace Stevens sentencia la idea moderna del caos: *Un orden violento es desorden y un gran desorden es orden. Ambas cosas son una*. En realidad, en los últimos años se ha apreciado que el orden y el caos están dinámica y misteriosamente relacionados. Aunque el caos se asocie a desorden, así como a irregularidad e imprevisibilidad, sus extrañas leyes se acoplan a notables fenómenos, entre ellos, las palpitaciones del corazón humano, las tormentas y catástrofes de la naturaleza, la estructura del cerebro o la de las galaxias y hasta los orígenes de la evolución y de la vida. Es evidente que desde el ángulo científico, ha cambiado nuestra interpretación del mundo.

El término caos llegó a ser tan difícil de manejar que en un Congreso Internacional celebrado en la Real Sociedad Científica de Londres en 1986, se propuso la siguiente definición técnica: “Caos es el comportamiento estocástico que ocurre en un sistema determinista”. La simultaneidad de las palabras estocástico y determinista en la definición anterior, generó la paradójica expresión de *caos determinista*, que para algunos, como el matemático y Premio Fields, René Thom, constituía un verdadero atentado a la teoría del conocimiento. Según Thom: “El comportamiento determinista está gobernado por leyes exactas e inamovibles. El comportamiento estocástico es el opuesto: sin ley e irregular. Así, el caos es el comportamiento sin ley gobernado completamente por la ley”. Desde luego, esta irónica expresión parece ser una broma, pero no lo es. Acto seguido, nos vamos a ocupar de este fenómeno del caos y, en particular, de lo que atañe a sus orígenes que, como veremos, no son tan recientes.

Desde Isaac Newton (1642-1727), el universo ha venido imaginándose como un mecanismo de relojería, con una fiel y absoluta precisión. Las leyes de gravitación universal de Newton fueron el fundamento de la mecánica celeste, que dieron el aldabonazo final a las observaciones astronómicas sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Esa mecánica probó las conocidas tres leyes de Kepler (1571-1630), la primera de las cuales se refiere a la forma elíptica de las órbitas, la segunda a la determinación de las velocidades a lo largo de la trayectoria y la tercera, a la conexión de las velocidades con las dimensiones de la órbita. Curiosamente, sin embargo, la primera cosa que se demuestra en mecánica celeste, es que las tres leyes de Kepler son falsas; más exactamente, no representan sino unas buenas leyes aproximadas. Según dicha mecánica, ya denominada mecánica clásica,

“una vez que se conoce el estado de un sistema físico (posiciones y velocidades en un instante dado, que se denomina inicial), se puede deducir su estado en cualquier otro instante”. A esto se asoció luego el término determinista, después de que Laplace afirmara que “el universo está hecho de forma que su estado presente es efecto del estado anterior y causa del que le va a seguir”; desde entonces, el prototipo más simple del determinismo clásico sería la descripción planetaria anterior de Kepler. De hecho, cualquiera que sea el modo en que se contemple, nuestra visión del mundo viene influida por las ciencias físicas y cuando percibimos nuestro universo como un reloj que obedece a reglas previsibles e inmutables, nos convertimos sin duda en sumisos descendientes de Newton y su mecánica. En tiempos de Galileo, Kepler y Descartes, el universo que describía la ciencia era tradicionalmente platónico y euclidiano; y los principios newtonianos de la mecánica celeste, nos legaron después la impresión de que todo se podía definir en términos matemáticos o mecánicos. Desde esa época, para la ciencia un fenómeno se consideró ordenado si sus movimientos se podían explicar mediante un esquema de causa y efecto representado por una ecuación diferencial. De esa manera, no sólo las ecuaciones (y teorías) que describen el movimiento de los planetas, sino también las de la trayectoria de una pelota, la elevación del agua en un tubo, las del crecimiento de una planta, o las de la combustión del carbón, pongamos por caso, contienen una regularidad y un orden, una certidumbre mecánica, que hemos terminado por asociar a las leyes que atribuimos a la naturaleza.

Ahora bien, en este punto es necesario retrotraernos a la época anterior al descubrimiento del cálculo infinitesimal, en la que el quehacer matemático, al no salirse de sus cauces tradicionales, sólo analizaba los objetos en sí mismos, sin tratar el movimiento en el mundo que habitamos. Ciertamente, la matemática que se estudiaba era una matemática estática. Fue precisamente el cálculo infinitesimal el que permitió investigar con el debido rigor, las observaciones astronómicas sobre el movimiento de los planetas, la dinámica y otros numerosos fenómenos de la física. A este respecto, el gran matemático Luis Santaló, nos señala en una de sus obras¹ el grave error cometido por uno de los más grandes pensadores de la historia, el gran filósofo Sócrates, quien influía más que nadie en la gloriosa época griega, al puntualizar que la matemática tiene por objeto el conocimiento de lo que siempre existe, lo que equivalía a afirmar, el conocimiento de los objetos inanimados, que incluía también a los astros. La poderosa influencia de Sócrates determinó que se excluyera de toda la matemática griega, el conocimiento de lo que “nace y muere con el tiempo”, como los seres vivos y, en particular, el hombre. Esa frontera perjudicó seriamente a la matemática y en tal grado, que prevaleció durante unos veinte siglos, prácticamente hasta el primer tercio del siglo XX. En el segundo tercio del mismo, una corriente filosófica llamada “estructuralista”, impregnó a la matemática de los métodos del álgebra, invadiendo el ámbito de la enseñanza en los programas de todos los niveles educativos. A esa corriente de abstracción siguió por otra parte, un análisis *estadístico* que hizo florecer una matemática de procesos estocásticos (o conjuntos de sucesos marcados por el azar), además de un interés inusitado por otra rama matemática, la *topología*, impulsada por el genio de un matemático francés, Henri Poincaré (1854-1912). Fue Poincaré quien primero dudara de la estabilidad del sistema solar, problema que en lenguaje de la astronomía consiste en saber si las órbitas de los planetas son estables o inestables. En su estudio de los sistemas que contuviesen sólo dos cuerpos —por ejemplo, la Tierra y la Luna o bien, el

¹ L. Santaló, “La educación matemática, hoy”. Editorial Teide, Barcelona (1975).

Sol y la Tierra², constató que las ecuaciones newtonianas se resuelven con exactitud; las órbitas eran estables y el movimiento periódico (o sea, su trayectoria se repite una y otra vez, siempre con igual período). Igual ocurría en cualquier sistema idealizado de dos cuerpos. Pero la cuestión esencial que alertó al gran científico residía en que al dar el simple paso de dos a tres (o más) cuerpos (por ejemplo, al tratar de incluir el Sol en el sistema Tierra-Luna), halló una inestabilidad, un *caos* incipiente. El estudio del movimiento de tres cuerpos celestes bajo la influencia de sus mutuas atracciones gravitatorias (**problema de los tres cuerpos**), trascendía la potencia de los métodos matemáticos del siglo XVIII. Las ecuaciones de dicho movimiento no podían ser resueltas en términos de funciones conocidas. La parte más complicada era la cuestión de estabilidad de las órbitas planetarias, que había revelado la importancia de las soluciones periódicas³ en la teoría de ecuaciones diferenciales. En aquel tiempo el problema de la estabilidad era de los más serios; hoy sabemos que fue una cuestión decisiva en el desarrollo de la física matemática. Los trabajos de Poincaré señalaron un hito crucial en el desarrollo de la ciencia. La aparición de caos en un sistema dinámico se hizo palpable en sus estudios al comparecer los llamados “puntos homoclinicos”⁴.

Por otra parte, si bien el estructuralismo al que antes nos referimos, subsanó problemas de fundamentación que arrastraba la matemática desde las postrimerías del siglo XIX, el desarrollo de la producción matemática se inclinó más adelante preferentemente hacia las aplicaciones, originada por la revolución en un principio citada y que irrumpió en la ciencia en el último tercio del siglo XX, como otrora lo fueran la relatividad en el ámbito cosmológico y la mecánica cuántica en la física a escala atómica (o microfísica). Era el paradigma del caos.

² Muchos resultados de la mecánica celeste se obtienen mediante una simplificación que se reduce a considerar a todos los cuerpos celestes como si se tratara de masas puntuales que se atraen en virtud de la fuerza gravitatoria. Como masa puntual se sobreentiende un punto matemático dotado de una cierta cantidad de masa. En el caso de dos cuerpos celestes, el planteamiento se refiere a dos masas puntuales, cuya posición y velocidad son dadas en un cierto instante, atrayéndose entre sí según la ley de gravitación, y se trata de calcular sus posiciones y velocidades en cualquier instante de tiempo (**problema de los dos cuerpos**). Salvo algunos casos particularizados, es el único problema gravitatorio del que se conoce una solución general y completa (las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del planeta son dadas en forma cerrada). Fue resuelto geoméricamente por Newton para esferas de tamaño finito en 1665, demostrando además que la solución de dicho problema conducía a las dos primeras leyes de Kepler.

³ Poincaré inauguró un nuevo procedimiento para la búsqueda de esa clase de soluciones periódicas. Una vez que demostrara que cuando las masas de dos de los cuerpos son pequeñas en relación con la masa del tercero, existen infinitos conjuntos de condiciones iniciales para las cuales el movimiento es periódico, dirigió su atención a las relaciones existentes entre esas soluciones. La famosa teoría cualitativa que desarrolló, fue presentada en cuatro memorias entre 1881 y 1886.

⁴ Su obra más original donde extendió resultados anteriores y en la que analizó la clase de soluciones denominadas “asintóticas”, quedó resumida en su tratado “Les methodes nouvelles de la mécanique celeste”, que se publicó a partir de 1892. Ya en el año 1889 se le había concedido a Poincaré un gran premio internacional (dotado con 2500 coronas) que convocó en 1887 el rey Oscar II de Suecia, por su memoria titulada “Sur le problème du trois corps et les equations de la Dynamique” (Acta Mathematica 13 que contenía 270 páginas como el original), para dar respuesta a la cuestión fundamental en lenguaje astronómico *¿Es estable el sistema solar?* La primera parte de la memoria establecía propiedades de las ecuaciones dinámicas; la segunda, aplicaba los resultados al problema de un número arbitrario de cuerpos sometidos a la gravitación newtoniana. El descubrimiento no se llegó a comprender del todo hasta 1954 (Kolmogorov, Arnold).

El caos arremetió contra la pretensión laplaciana de la predecibilidad determinista, logrando incluso que hasta la expresión "caos determinista", pese al mordaz comentario precedente de Thom, imperara en todo el territorio de la ciencia. Nuevas concepciones derivadas de las ideas de caos se hicieron estrechamente compatibles con la práctica diaria de la investigación científica. Algunos han llegado a decir que la ciencia clásica acaba donde el caos empieza.

Debe tenerse presente que el método científico tradicional, estaba encaminado directamente a simplificar la complejidad de los fenómenos y en general se regía por el punto de vista reduccionista, en virtud del cual un sistema puede entenderse descomponiéndolo para estudiar cada parte por separado, criterio que se impuso con la mecánica clásica (invadiendo luego a las otras ciencias) y que prevaleció en buena medida debido a la presencia de gran número de sistemas en los que el comportamiento del todo es realmente la suma de los comportamientos de todos sus componentes. Ese método de "descomposición" que se remonta, como se sabe, a Galileo, reduce en principio la complejidad a una explicación en términos de unos cuantos elementos simples, de unas cuantas variables mensurables: espacio, velocidad, tiempo. Y sin duda, fue la belleza y simplicidad de esta mecánica newtoniana lo que sembró un dogmatismo científico que dejó arraigado el siguiente cuerpo de creencias: Las leyes simples conllevan resultados simples. La complejidad es consecuencia de leyes complejas. Sistemas diferentes tienen comportamientos distintos. No obstante, esta interpretación reduccionista de aquella mecánica clásica hubo de cambiar radicalmente con las nuevas concepciones del comportamiento desordenado, porque éstas permitieron entrever que sistemas deterministas podían volverse indeterminados; que leyes deterministas simples daban lugar a comportamientos complejos, y al revés, que estos últimos pueden provenir de leyes simples.

El sueño reduccionista persistió hasta la década de 1970 y para muchos científicos de esa última época, el ocaso señaló el final del programa ultradeterminista de Laplace. Fue debido, como al principio ya anunciamos, a un descubrimiento que reflejaba la sensibilidad a las condiciones externas de ciertos sistemas deterministas simples y que a partir de Lorenz sería bautizado como efecto mariposa, un fenómeno que plasmaba la existencia de sistemas no lineales que en ciertas condiciones podían comportarse de forma impredecible y aleatoria. Los nuevos avances matemáticos y la aparición de ordenadores más potentes gestarían entonces en los años subsiguientes, un área científica multidisciplinaria principalmente encaminada a desentrañar la aparente y misteriosa interconexión que empezaba a surgir entre el orden y el caos. Diversas disciplinas (más bien, todas) sufrirían exploraciones minuciosas: en física, los sistemas complejos se convirtieron en el foco de las investigaciones sobre dinámica no lineal, mecánica de fluidos y electrodinámica cuántica; en matemáticas, irrumpieron en escena novedades como la geometría fractal para buscar orden en el caos; en termodinámica, se llevaron a cabo importantes investigaciones de los sistemas irreversibles fuera de equilibrio; en biología, la teoría de seres vivos suscitó la idea de que el desorden en un nivel de comunicación dentro de un organismo, podía convertirse en orden en otro. En general, una nueva pléyade cruzó las fronteras de todas las disciplinas científicas, ocasionando, por ejemplo, que los físicos se interesaran muy de cerca en problemas de neurofisiología, que una buena parte de matemáticos analizaran con esmero los sistemas biológicos, o que los neurólogos se pusieran al día en matemática, dando lugar a equipos conjuntos de investigación. Herramienta común: el ordenador. Se estaba tratando un nuevo mundo, quizás un nuevo tipo de matemática, un contexto fundamental e idóneo para una buena comprensión de las irregularidades de la natura-

leza⁵. En el fondo, se quería desterrar la idea de que unas leyes inmutables determinaran el movimiento de cada partícula del universo, de forma exacta y para siempre.

Los primeros trabajos sobre el caos surgieron de las aplicaciones. Sus autores no eran matemáticos de profesión, pero su lazo de unión sí era matemático. E. Lorenz razonaba como un matemático, no como un meteorólogo. Entre otros, M. Hénon era un astrónomo, M. Feigenbaum un físico, y los principales trabajos de R. May fueron en problemas de biología. Todos ellos dejaron que sus auténticos instintos matemáticos les guiaran, cuando su desmesurada concentración en el mundo real quizás hubiera aniquilado su confianza.

Para concluir, podemos afirmar que no fueron científicos contemporáneos los primeros en descubrir la visión y las pautas de ese nuevo mundo. Sería, como ya adelantamos anteriormente, un eminente matemático, físico y filósofo francés, Henri Poincaré, quien a finales del siglo XIX, lanzara la primera voz disidente hacia el reduccionismo, al advertir una perturbadora complejidad que cuestionaba el paradigma newtoniano del sistema planetario. Una especie de orden que se condensaba a partir de un confuso desorden, le hizo vislumbrar que el reduccionismo podía ser una ficción. Fue el primero que se asomó al abismo del caos para dejar abierto el camino. Con toda justicia, se le ha reconocido como fundador de las ciencias modernas del caos, su verdadero progenitor.

⁵ Para una buena visión general sobre aspectos y filosofía del caos, véase Ian Stewart, "¿Juega Dios a los dados?", Edit. Crítica, Barcelona (1991).
