Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana

RESEÑAS DE LIBROS

Educación Matemática
Vol. 13 No. 3 diciembre 2001
129-132

Eugenio Filloy Yagüe
Grupo Editorial Iberoamérica.
Serie Cultura y Matemáticas.
Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa.
México, 1998.

Es éste uno de los poquísimos libros que abordan el tratamiento de la Historia de la Geometría Euclidiana y su didáctica de manera conjunta. La tarea no es fácil tanto por el desarrollo histórico de la Geometría Euclidiana para la cual se requiere un gran esfuerzo intelectual, y menos por intentar una visión didáctica de la misma. Esta segunda intención ha sido reclamada una y otra vez por los docentes del bachillerato que requieren apoyos bibliográficos específicos. La primera intención del autor y que desarrolla con habilidad, puede ser ampliada a partir de la bibliografía que el autor menciona al final de su obra, pues la visión histórica de la matemática ha sido tocada por autores muy reconocidos (Boyer, Heath, Eves, Smith, etc.).

El valor fundamental de esta obra, casi fascicular (96 páginas), está en la intención de citar y comentar los antecedentes y evolución matemáticos obligados para comprender los basamentos de la Geometría Euclidiana y darles una presentación tal que juegue el papel de herramienta didáctica a fin de que cumpla con los requisitos de ser útil para su enseñanza. La estructura de la obra evidencia el interés y preocupación del autor para que el contenido ayude a desencadenar procesos de aprendizaje intencionados.

Otra característica importante de la obra es que el autor evita el uso de una argumentación grandilocuente que pueden ser madura intelectualmente, pero que pueden llevar al tedio y al alejamiento de su lectura. Por el contrario, el libro es simple, directo y sencillo; en ocasiones se presenta con una evidente intención por simplificar a fin de dejar ideas globales sobre las estructuras de pensamiento matemático que se han desarrollado en distintas épocas para rescatar la sustancia y evitar el cúmulo de datos e información que pueda ser irrelevante cuando no se tiende a la erudición innecesaria.

Sin preámbulos, el autor es muy directo. Estructura la obra en cinco capítulos, dependientes unos de otros, aunque presentados en forma tal que puedan ser leídos sin recurrir a sus precedentes, si al lector así le conviniera, pues en cada uno se hacen referencias al capítulo inmediato anterior.

Capítulo 1. Los orígenes de la Geometría.

En este primer capítulo el autor desarrolla en forma muy sintética las ideas y los conceptos matemáticos que alcanzaron las culturas egipcia y babilónica (entendiéndose por las diversas culturas de la Mesopotamia). Recurre a citas de analistas e historiadores contemporáneos de la matemática y a historiadores antiguos para determinar las causas del origen de la Geometría y de la Aritmética como instrumentos de conocimiento para interpretar, valorar y cuantificar el mundo físico: "...este encuentro entre la forma y la cantidad, entre ciencias que se dedican a campos específicos, la Geometría y la Aritmética, es el punto de partida de una serie de interrelaciones que se convulsan a lo largo de toda la historia para alejar y acercar, en continuo vaivén, a las que podemos llamar dos visiones distintas de la realidad: una, geométrica y la otra numérica u operatoria".

El autor hace un recuento de la matemática mesopotámica y pone en evidencia la carencia de enunciados que hoy llamamos teoremas que permitan proceder a su demostración y estructurar un cuerpo doctrinario de conocimientos. Esa matemática comprendía recetarios operatorios y el valor de verdad de los resultados dependían de su verificación cuando se aplicaban a situaciones concretas, esto es, cuando eran resultado de una amplia y prolongada práctica social.

En este mismo capítulo el autor ve la necesidad de incluir el origen de los inconmensurables como una de las primeras grandes hazañas del intelecto matemático en la que se vislumbra la necesidad de cumplir un cierto rigor como una exigencia para construir las demostraciones geométricas griegas y que, a la postre, definieron un método de tratamiento. Se abordan las causas de las formalización matemática, que el autor divide en sociológicas, interculturales e internas, las pone sobre el tapete y las discute. Esto se da en el marco de una crisis conceptual. Dentro de esta crisis interna el autor hace una reflexiva valoración de las paradojas de Zenón y la importancia que éstas tuvieron para el desarrollo ulterior de la Geometría.

Parte importante de este capítulo es el análisis que hace el autor de la obra de Tales y el comienzo de la deducción propiamente dicha; menciona sus aportaciones, pero como conocimiento presentado a partir de procesos deductivos y se presenta algunas especulaciones de cómo Tales pudo haber realizado algunas demostraciones partiendo del conocimiento de que un ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. La evidente intención del autor es preparar para la comprensión del proceso deductivo y el método axiomático.

Cierra el capítulo el autor mencionando siete anécdotas acerca de la vida y pensamientos de Tales.

Capítulo 2. Aritmética y Geometría Pitagórica.

Como antecedente, ineludible, del desarrollo de la Geometría y de los procesos deductivos que la fundamentan, el autor se refiere, en este capítulo, a algunas aportaciones de Pitágoras y su escuela. Con esta intención, presenta a las figuras numéricas (números figurados) y cómo su representación ayudan en la obtención de fórmulas para sumar progresiones aritméticas; discute la construcción de ternas pitagóricas y hace especulaciones de cómo pudieron haberlas obtenido. Enseguida hacer ver que los griegos recurrieron a manipulaciones aritméticas por medio de procedimientos geométricos, al igual que lo hicieron en la obtención de la resolución de ecuaciones de grado mayor que dos, siendo ésta un álgebra por ellos desarrollada a partir de propiedades de área. Es interesante la aplicación que de esto hace el autor para arribar a identidades algebraicas comunes; en el mismo sentido muestra que para resolver ecuaciones de segundo grado, los pitagóricos utilizaban preferentemente el método de las proporciones y el de la aplicación de áreas, presentado diversos ejemplos

Capítulo 3. La Geometría: Platón y Aristóteles.

En el capítulo se reseñan ideas fundamentales en la evolución de la matemática de los siglos V y IV a.n.e.

Tales comienza con sustituir la ciencia experimental conocida en Egipto y en la Mesopotamia por una ciencia deductiva, proceso seguido por la Escuela Pitagórica. La teoría de las proporciones comprendida por esta escuela llevó a una crisis al descubrir que no todos los pares de magnitudes enteras son conmensurables y, aunque el genio griego pudo resolver este problema construyendo una teoría de las proporciones en la que se contenían magnitudes irracionales, presupuso dejar de lado el hecho de construir números reales partiendo de números naturales, lo que no se logra sino hasta finales del siglo XIX. En esa crisis ayudan las paradojas de Zenón, en especial la que "señala claramente la posibilidad de realizar la división de un segmento lineal de manera indefinida".

Hay hechos que permiten suponer que Platón se propuso ampliar el concepto de número, apoyado en las aportaciones de la Escuela Pitagórica, en el sentido de reducir todo a relaciones numéricas que no eran números naturales. En esto viene la ayuda del método de exhaución de Eudoxio. En esta etapa, en la que se desarrolla el pensamiento platónico, se establecen determinadas líneas de investigación, las cuales, según el autor, son:

- El desarrollo de los resultados que finalmente fueron organizados en los *Elementos* de Euclides.
- El trabajo con inconmensurables, indivisibles e infinitesimales.
- La Geometría de orden superior.

En esta última línea se consideran los estudios de los *tres problemas clásicos* y que se relacionan con la resolución de ecuaciones de grado superior a dos. El autor hace ver cuáles y por qué no son resolubles estos problemas utilizando las armas convencionales de análisis, y que, por otro lado, permitieron la aplicación de novedosos recursos como el uso de las llamadas curvas mecánicas.

Cierra el capítulo haciendo referencia a una de las ideas centrales del pensamiento platónico: "Platón, al darse cuenta de la relativa permanencia de las cosas y de cómo la gente distingue, por lo general, entre una mera apariencia y lo real, concibió la realidad absoluta formada por Formas o Ideas independientes de la percepción sensorial y absolutamente permanentes, extratemporales, eternas", entre las cuales son ejemplos las proposiciones de la Geometría y de la Aritmética. Por supuesto, estas concepciones dependen y llevan al estudio de posturas filosóficas acerca del conocimiento y cómo se da éste, entre otras interrogantes, y que, en cualquier campo de estudio y en lo particular, en la Matemática, llevan a concepciones didácticas diferenciadas.

Capítulo 4. Euclides, los Elementos y el Método Axiomático.

Comienza el autor haciendo un análisis de la importancia histórico-matemático de los *Elementos* de Euclides, su trascendencia didáctica y los intentos que se han hecho por reducir o recomponer su contenido por otro de carácter más algebraico. Hace ver, asimismo, la complejidad de los contenidos de los *Elementos* (proposiciones), basado en el método axiomático, y las dificultades intelectuales que tiene el estudiante de la educación media para aprenderlos.

Después de mencionar lo poco que se conoce acerca de la vida de Euclides y de un conocido anecdotario, presenta referencias de opiniones en pro y en contra de la obra euclidiana a fin de establecer a los ojos de algunos eruditos su valor didáctico, histórico y matemático. Enseguida hace una breve descripción sumaria de los contenidos de cada uno de los trece libros de la obra del alejandrino.

En forma inesperada, y supongo que innecesaria, el autor incorpora dos apartados: *4.5 Razonar y razonamiento y 4.6 Pensamiento mecánico e intuición*, que viéndolos en positivo, nos muestran una vez más la intención didáctica del autor, intentando llenar lagunas en la secuencia de intereses en la construcción de este libro y su mejor comprensión, pues inmediatamente se mete a analizar cuál es la estructura de los *Elementos*. En este apartado, aunque breve, el autor muestra gran habilidad para establecer la composición de los *Elementos* a partir demostraciones formales, cosa que se hacía desde el siglo VI a.n.e. no sólo para la Geometría, sino para otros cuerpos de conocimiento, y la referencia a las leyes de la Lógica de Aristóteles en la que se establecen los requisitos para toda ciencia deductiva. También nos hace ver que esta estructura deductiva se encuentra en obras posteriores. Especialmente interesantes son los apartados en los que el autor habla de la evolución del método axiomático y los defectos del aparato euclidiano, mostrando que aunque los *Elementos* fue una obra ejemplar por siglos, le fueron encontrando lagunas e inconsistencia que llevaron a que en el siglo XIX, además de otras razones, se volviera a exigir un mayor rigor lógico; destaca, además, los ingredientes básicos del método axiomático incorporados a esta obra. En este énfasis hace ver cómo ha evolucionado el método axiomático hasta llegar a ser lo que hoy se comprende.

Parte importante de los *Elementos* es la presentación y estructura de los postulados, haciendo el análisis del valor enunciativo del quinto de ellos, su independencia de los demás, su equivalencia con otros enunciados y la espontánea intención que se ha hecho, a lo largo de la historia, por demostrarlo. Remata el autor con la demostración del Quinto Postulado a partir del axioma de Playfair.

Capítulo V. Un ejemplo de desarrollo axiomático de la Geometría.

Con este capítulo se rematan los contenidos del libro. En él, el autor prefiere hacer una breve reseña del desarrollo de la Geometría Euclidiana y la de Bolyai-Lobachevski realizada por Karol Borsuk y Wanda Szmielew, ya que utilizan un sistema axiomático similar al de Euclides, agregando los axiomas necesarios y los que implícitamente aparecen en la obra de Euclides. Los axiomas a los que se hace referencia son los de incidencia (9), los de orden (9), los de congruencia (7), el de continuidad y el de paralelismo.

"La teoría que se desarrolla exclusivamente en base a los cuatro primeros grupos de axiomas se llama Geometría Absoluta.(...). Si como el axioma de paralelismo se toma el Quinto Postulado de Euclides o una proposición equivalente, la teoría que se desarrolla con los cinco grupos de axiomas se llama Geometría Euclidiana; si en vez de este axioma tomamos el axioma de 'Bolyai-Lobachevski', (...), tal geometría se llama de Bolyai-Lobachevski. (...). Por lo anterior, la Geometría Absoluta consiste de los teoremas que son válidos en la Geometría Euclidiana y en la de Bolyai-Lobachevski".

Mostrada esta estructura y dados a conocer los axiomas, el autor presenta algunas demostraciones e invita al lector a realizar otras más, considerando el uso único de los axiomas de incidencia, otras más con los axiomas de orden y da los enunciados de diversos teoremas para que el lector se familiarice con ellos. Remata el autor comentando ideas acerca de la Geometría Absoluta para la que se cumplen los axiomas de incidencia, orden, congruencia y continuidad.

En esta forma el autor nos presenta una obra sintética, agradable y muy manejable que puede dar ideas generales para quien tiene el gusto o la necesidad de una visión global de la historia y de algunas consideraciones didácticas en la evolución y tratamiento de la Geometría Euclidiana. Enriquecen la obra la referencia que se hace de una bibliografía muy sugestiva y específica para que el lector amplíe y se sumerja en los interesantes temas que se desarrollan.

Reseñó: Santiago Valiente Barderas