

Exploración de heurísticas y concepciones iniciales sobre el razonamiento inferencial en estudiantes de secundaria

Educación Matemática
Vol. 14 No. 1 abril 2002
62-84

Fecha de recepción: junio, 2001

Antonio Javier Moreno Verdejo
Instituto de Enseñanza Secundaria Trevenque
S.E.S.
antonimore@wanadoo.es

Angustias Vallecillos Jiménez
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada
avallecie@ugr.es

Resumen: *En este trabajo presentamos los resultados obtenidos en una actividad realizada en clase que se enmarca en el paradigma de investigación en el aula. Catorce estudiantes españoles del nivel de secundaria, de dos cursos distintos, realizaron en clase una actividad docente diseñada para el aprendizaje de conceptos inferenciales básicos. El análisis de los resultados obtenidos nos ha permitido conocer algunos aspectos del pensamiento probabilístico de estos alumnos, particularmente los que se refieren a su comprensión de los conceptos de población y muestra y sus relaciones, su concepto de espacio muestral, sus concepciones sobre el proceso inferencial así como las heurísticas que utilizan en el razonamiento de tipo inferencial.*

Summary: *In this paper we present the results of a teaching experiment on basic inferential statistical concepts carried out in a classroom context with 14 Spanish secondary level students, from two different courses. The analysis of the results allowed us to know some aspects of students' probabilistic thinking, particularly those referring to their understanding of the population and sample concepts and their relationship, their sample space concept, their conceptions about the inferential process as well as the use of different heuristics in their approach to inferential reasoning.*

1. Introducción

Al igual que ocurrió anteriormente en otros países (NCTM; 1989; 2000), las nuevas orientaciones curriculares para la enseñanza secundaria en España y Andalucía (MEC, 1990; 1992; Junta de Andalucía, 1992; 1994; 1997) amplían los contenidos de probabilidad y estadística e incluyen como novedad los contenidos de estadística inferencial. Uno de los puntos clave en esta innovación son los conceptos relacionados con poblaciones, muestras y sus relaciones, que constituyen tanto un núcleo teórico importante como un desafío para la investigación didáctica específica, ya que no se dispone actualmente de información suficiente que permita el diseño de recursos para el aula ni para el entrenamiento pedagógico adecuado de los profesores. La formación de los profesores, tanto de contenido estadístico como de contenido pedagógico, es necesaria para que se pueda asegurar el éxito didáctico de esta innovación curricular.

Para analizar el tipo de problemas que pueden presentarse, es conveniente considerar estudios tales como el de Kahneman y sus colegas (Kahneman *et al.*, 1982) acerca de las

heurísticas que utilizan los sujetos con entrenamiento estadístico para hacer inferencias sobre las poblaciones a partir de sus muestras. Otros autores como (Rubin *et al.*, 1990) han investigado la presencia de algunas de dichas heurísticas en el razonamiento de estudiantes de secundaria y han descrito cómo “*estos estudiantes tienen modelos inconsistentes de relación entre muestras y poblaciones, incluso en problemas en los que los modelos matemáticos subyacentes son todas distribuciones binomiales*” (p. 315). Cabe esperar, en nuestra opinión, que estos problemas estarán presentes también en el aprendizaje de los conceptos inferenciales incluidos en el currículo de secundaria de nuestros escolares. Por esta razón nos parece importante explorar las concepciones iniciales que tienen los estudiantes sobre las relaciones entre poblaciones y muestras y las heurísticas que utilizan (tanto ellos como quizás también los profesores), antes de iniciar sus estudios de estadística inferencial. De esta manera podremos formular algunas hipótesis iniciales acerca de los problemas o dificultades que pueden tener los estudiantes de secundaria para el aprendizaje de los conceptos inferenciales y ayudar a prevenirlos.

En algunas investigaciones sobre el aprendizaje de contenidos de estadística inferencial llevadas a cabo con estudiantes universitarios (por ejemplo, Vallecillos, 1994, 1997) se ha puesto ampliamente de manifiesto que algunas de las dificultades de aprendizaje detectadas tienen su origen en los conceptos básicos que han debido adquirirse en los niveles previos de enseñanza.

En este trabajo presentamos los resultados de una actividad de clase llevada a cabo con estudiantes de secundaria con la finalidad docente de estudiar algunos conceptos básicos, como los de población y muestra y sus relaciones. La reflexión posterior sobre la experiencia nos ha permitido explorar no sólo las concepciones iniciales de estos estudiantes sobre esos conceptos, sino también la manera de describir poblaciones a partir de muestras y del propio proceso de inferencia. El trabajo puede enmarcarse dentro del paradigma de investigación en clase (Holling, 1999; Hopkins, 1993; Nofke y Stenvenson, 1995) ya que tiene la finalidad de conocer los modos de aprendizaje de los alumnos involucrados en la acción, lo que finalmente revertirá en el diseño de procesos de instrucción mejorados.

2. Consideraciones teóricas

En la conceptualización de este trabajo hemos considerado, fundamentalmente, dos vertientes: *la instruccional y la cognitiva*.

En la vertiente instruccional intentamos poner en práctica, de modo experimental y limitado, el modelo empleado por Fennema y sus colaboradores en el proyecto Cognitively Guided Instruction (CGI) (Carpenter y Fennema, 1992; Fennema *et al.*, 1996), específicamente dirigido a capacitar a los profesores para comprender el pensamiento de los estudiantes. “*Nuestro modus operandi ha sido ayudar a los profesores a relacionar un modelo basado explícitamente en la investigación del pensamiento de los niños y del pensamiento de sus propios estudiantes, estimulándoles a la reflexión de cómo puede ser interpretado el modelo a la luz de sus propios estudiantes y clases*” (Fennema *et al.* 1996, p. 405). En este mismo sentido también han trabajado Cobb, Yackel, Woods y sus colaboradores en el Purdue Problem-Centered Mathematics Project (Coob, Wood y Yackel, 1990; Coob *et al.* 1991; Coob, Yackel y Wood, 1992; Coob, Wood, Yackel y McNeal, 1993). En particular, estos investigadores animan a los profesores a que pregunten a sus estudiantes cómo piensan y a que describan cómo realizan las tareas de aprendizaje que se les proponen. “*En general, los modelos basados en la investigación eran usados para anticipar lo que*

podría ser problemático para los estudiantes en diversos niveles conceptuales y qué construcción matemática podría hacer que resolvieran esos problemas". (Coob y cols., 1991, p. 5).

En la vertiente cognitiva utilizaremos el marco descrito por Jones *et al.* (1997;1999) en el ámbito de la educación estadística. Estos autores asumen que el *pensamiento probabilístico* es polifacético y se desarrolla a lo largo del tiempo. Describen como *pensamiento probabilístico* el pensamiento del niño en respuesta a cualquier situación probabilística, esto es, que implica incertidumbre en sus resultados. Para caracterizar el pensamiento probabilístico en los niños utilizan cuatro constructos: espacio muestral, probabilidad de un suceso, comparación de probabilidades y probabilidad condicional. Para cada uno de ellos consideran cuatro niveles de pensamiento probabilístico: el nivel 1 se asocia con el pensamiento subjetivo; el nivel 2 se asocia a la transición entre el pensamiento subjetivo y el pensamiento cuantitativo ingenuo; el nivel 3 se asocia con el pensamiento cuantitativo informal, y el nivel 4 con el razonamiento cuantitativo formal.

En nuestro estudio exploratorio hemos adaptado estas ideas a la situación concreta que nos interesa. En la vertiente instruccional consideramos esta experiencia como un primer paso para investigar el pensamiento probabilístico de los alumnos de secundaria con el fin de decidir, posteriormente, cómo usar esta información para tomar decisiones de tipo curricular. Nos basamos, como hemos dicho, en que el conocimiento apoyado en la investigación del pensamiento de los estudiantes les ayuda mucho a los profesores a planificar la enseñanza (Fennema *et al.* 1996). En la vertiente cognitiva planteamos una actividad en un marco de aprendizaje de la inferencia estadística, que nos va a permitir analizar el pensamiento probabilístico de los alumnos sobre el primero de los constructos teóricos reseñados, el de espacio muestral. El contenido concreto de la actividad se limita por razones curriculares a los aspectos que se consideran pertinentes al mismo.

Por último, hacemos una breve referencia al término *concepción*, que se emplea aquí en el sentido de Artigue (1990). Para esta autora el análisis de las concepciones de los estudiantes es de gran utilidad a los profesores por dos razones básicas:

- Porque pone en evidencia la pluralidad de puntos de vista sobre un mismo objeto matemático y su grado de adaptación a la resolución del problema de que se trate.
- Porque puede ayudar a los profesores a luchar contra la ilusión de transparencia en el proceso didáctico, esto es, a distinguir entre los conocimientos que ellos tratan de enseñar y los que efectivamente aprenden los alumnos.

También empleamos el término *concepción* en el sentido de *modelo* teórico construido por el investigador, como si en efecto fuera el empleado por el alumno, en terminología de Robert (1983), de manera que lo que llamamos *concepción* en este trabajo es un modelo teórico de razonamiento inferencial, construido por nosotros para la investigación sobre la base de los conocimientos locales de los alumnos manifestados en el momento de la investigación, para esquematizar y formalizar los rasgos comunes de las respuestas de un grupo de estudiantes. Lo interesante de la determinación de las concepciones de los estudiantes sobre un conocimiento concreto, no es tanto el catálogo de las mismas sino ofrecer información de base imprescindible al profesor que deberá intentar cambiarlas, en su caso, en el curso de la enseñanza.

A continuación describimos detalladamente la actividad, los estudiantes participantes, la metodología seguida y los resultados obtenidos.

3. Descripción de la actividad

Partimos de una pregunta genérica: ¿unos “pocos” pueden representar a “todos”? Situando la pregunta en el contexto de clase y con la terminología adecuada preguntamos: ¿es posible describir correctamente una población a partir de la observación de una muestra? En primer lugar, nos planteamos la actividad como recurso docente para ejemplificar en un caso sencillo cómo, a partir de una muestra, podemos “describir” la población de la que se ha extraído, esto es, podemos ejemplificar el proceso inferencial. Básicamente, pretendemos con esta actividad los siguientes objetivos.

3.1 Objetivos

- Ejemplificar importantes conceptos inferenciales básicos como los de población, muestra y sus relaciones.
- Poner de manifiesto algunas características esenciales de las muestras como la aleatoriedad y variabilidad.
- Hacer explícitas las concepciones iniciales de los estudiantes sobre estos conceptos.
- Ejemplificar el proceso inferencial.
- Explorar las concepciones iniciales de los estudiantes sobre el proceso y su validez.
- Estudiar la influencia y el uso que hacen los estudiantes de sus conocimientos previos sobre probabilidad en este contexto.
- Estudiar las intuiciones de los estudiantes acerca del espacio muestral del experimento.
- Estudiar la influencia que tiene en ellas la muestra concreta extraída al comienzo de la actividad en cada grupo.

3.2 Los sujetos

La actividad se ha llevado a cabo con dos grupos distintos de estudiantes, en total, 14 alumnos de un instituto de enseñanza secundaria de Granada.

- Ocho estudiantes del 3er. Curso de la ESO (14-15 años) que han recibido, tres meses antes y durante siete semanas, enseñanzas relativas a fenómenos en los que interviene el azar y la probabilidad. Esta enseñanza se basó en la realización de experimentos con el fin de introducirlos en esos temas y se desarrollaron como ejes principales de estudio las siguientes ideas: las frecuencias y sus tipos; que la frecuencia se hace estable al realizar un número grande de pruebas; el lenguaje propio del azar, experimentos aleatorios y sucesos; probabilidad de un suceso; sucesos equiprobables; regla de Laplace; propiedades elementales de la probabilidad y sucesos incompatibles y contrarios y sus probabilidades.
- Seis estudiantes del curso 3º de BUP (16-17 años) que no han recibido previamente ninguna formación académica sobre estadística y probabilidad.

3.3 Gestión de la clase

Para la realización de la actividad que describimos comenzamos la clase tomando una baraja de 40 cartas de las que nos fijamos sólo en la característica de color, “rojo” y “negro”. Se retiran inmediatamente diez cartas del mazo con el fin de que los estudiantes sean conscientes de que la composición actual del mazo es desconocida. A continuación se informa a los alumnos de que pretendemos conocer la nueva composición de cartas rojas y negras en el mazo, formado ya por treinta cartas.

Para ello se extrajo, en cada uno de los dos grupos de estudiantes, una muestra de cinco cartas de la población descrita. Después de mostrar en clase el resultado de la extracción, se procedió a repartir el cuestionario que los estudiantes debían responder. La actividad se realizó adecuadamente en el tiempo de la clase, una hora.

3.4 Cuestionario

El cuestionario utilizado estaba formado por tres preguntas que cada alumno respondió de manera individual y explicando sus respuestas. A continuación describimos los objetivos pretendidos con cada una de ellas y presentamos el análisis de las respuestas y los resultados obtenidos en ellas. Las preguntas son las siguientes:

***Pregunta 1:** Tu profesor acaba de enseñarte una muestra formada por cinco cartas. Sabiendo que en el mazo hay 30, ¿cuántas crees que serán rojas? Indica la razón.*

***Pregunta 2:** Supón que sacamos 100 muestras de cinco naipes cada una. Distribúyelas según el número de cartas rojas que crees que saldrán en cada muestra.*

***Pregunta 3:** Escribe ahora todas las posibles combinaciones de cartas rojas que podemos obtener al extraer cinco cartas. Supón que nuevamente extraemos cien muestras, ¿cómo se distribuirán en cada uno de esos resultados?*

Con la primera pregunta pretendemos estudiar cómo describe el alumno la composición de la población con la sola información de la muestra, esto es, cómo realiza intuitivamente el proceso de inferencia. También queremos identificar la posible presencia de heurísticas en su razonamiento. En definitiva, pretendemos aproximarnos al **cómo** y al **por qué** del razonamiento inferencial en estos estudiantes.

Las dos preguntas siguientes del cuestionario están encaminadas a estudiar la intuición acerca del espacio muestral del experimento y analizar **si** influye, y **cómo** lo hace, la composición de la muestra extraída al inicio de la actividad en la idea de “distribución muestral” intuitiva de estos estudiantes. Por último, se les pide hacer una conjetura acerca de la distribución muestral, según la composición de cartas rojas y negras en el mazo que aparecerían en 100 muestras de cinco cartas, con el fin de explorar el grado de aproximación entre la distribución muestral hipotética, y la distribución teórica correspondiente. Los resultados nos permitirán observar también qué tan convencido está el estudiante de sus respuestas al enfrentarse a resultados que, en ocasiones, tal vez no son concordantes.

Además, la comparación de los resultados obtenidos en los dos grupos de alumnos nos permitirá tener una primera visión de la posible influencia que la formación previa en estocástica de los estudiantes puede tener en las estrategias de razonamiento o heurísticas empleadas después.

4. Análisis de los resultados

En cada uno de los dos grupos se hizo una extracción al comienzo de la actividad obteniéndose las siguientes muestras: tres cartas rojas y dos negras, (3R, 2N), en 3° de ESO y cuatro rojas y una negra, (4R, 1N), en 3° de BUP.

4.1 Pregunta 1: resultados

Recordemos que la pregunta era: ¿cuántas cartas de las 30 crees que serán rojas? Indica la razón.

En la tabla 1 aparecen los resultados obtenidos. Por una parte aparecen los criterios en los que hemos clasificado las respuestas que los estudiantes han empleado explícitamente a la hora de describir la composición del mazo de cartas que constituye nuestra población. Dado que los estudiantes que han llevado a cabo la actividad que describimos son pocos, no tiene mucho sentido el uso de porcentajes de resultados, damos sin embargo las frecuencias absolutas obtenidas en cada categoría en aras de la mayor transparencia en el informe. Incluimos además en cada categoría una respuesta textual de un alumno con el fin de ilustrar la clasificación de respuestas realizada. En adelante utilizaremos la letra E para identificar a los alumnos del grupo de 3° ESO y la B para designar a los alumnos del grupo de 3° de BUP. Estas letras seguidas de un número permitirán la identificación de los alumnos en los distintos grupos.

En el grupo de estudiantes de ESO la respuesta mayoritaria (4 de 8) ha sido que el mazo de cartas debe contener un número igual de cartas rojas y negras. Estos estudiantes han ignorado la composición de la muestra extraída inicialmente por el profesor y dan una respuesta que responde a su idea previa de que “el mazo debe contener igual número de cartas de cada clase” si es “bueno”. Una respuesta de este grupo de alumnos es la siguiente:

- *“15 rojas y 15 negras. Si en una baraja hay 30 cartas tiene que haber 15 de cada una, sino sería trampa.” (E5)*

La segunda respuesta mayoritaria en este grupo, casi de la mitad de los estudiantes, es la de los que consideran que con una sola muestra no pueden afirmar categóricamente

Tabla 1. Criterios de descripción de la población y frecuencias.

CRITERIOS	3° ESO	3° BUP	TOTAL
La proporción de cartas rojas en el mazo no se puede concretar con exactitud.	3	-	3
La proporción de cartas rojas en el mazo es la misma que la de la muestra	1	5	6
La proporción de cartas rojas en el mazo es la misma que la de cartas negras	4	1	5
TOTAL	8	6	14

cuál será la composición de la población. Estos estudiantes han asimilado bastante bien la característica de variabilidad inherente al azar y algunos la explicitan en sus respuestas, como por ejemplo en la siguiente:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3
									0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Y	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1									
	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0								

Puede ser que haya tantas rojas “x” y tantas negras”. (E1)

En este grupo sólo hemos encontrado un estudiante (de 8) que describe una población con características semejantes a las de la muestra, si bien describe la población de una forma un tanto interpretable, con “más cartas rojas que negras” aunque sin respetar la proporción entre ellas obtenida en la muestra extraída en su caso. Su respuesta es la siguiente:

- “16 rojas y 14 negras porque en la muestra han salido más rojas que negras.” (E2)

En el segundo grupo en el que realizamos la actividad, 3º de BUP, la respuesta claramente mayoritaria (5 de 6) se ha inclinado a suponer una población con idéntica proporción de cartas rojas que las observadas en la muestra extraída al comienzo de la actividad, de manera perfectamente explícita, como se puede ver en las siguientes respuestas:

- “Habrá 24 rojas y 6 negras en el mazo de 30 cartas. En la muestra salieron 4 rojas y 1 negra, si hay 30 cartas todavía quedan 25 que se repartirán de la misma manera.” (B3)
- “Habrá 24 cartas rojas porque la proporción que ha sacado mi profesor es de 4 rojas y 1 negra.” (B4)

En este grupo sólo ha habido una respuesta distinta, la de un alumno que piensa que la proporción de cartas rojas y negras en el mazo debe ser idéntica:

- “Supongo que serán 15 rojas y 15 negras, puesto que son 30, si ponemos más o menos la mitad.” (B5)

Las tres categorías de clasificación de los resultados obtenidos incluida en la Tabla 1, coinciden con las obtenidas por Jacobs (1996; p. 72) como respuesta a una pregunta semejante acerca de cómo decidir cuál es la mejor estimación para las características de la población a partir de una muestra: a) los resultados de la muestra; b) un 50%, y c) no se puede realizar ninguna estimación sin preguntar a todos.

4.1.1 Concepciones sobre el proceso inferencial

Dado que el análisis de los resultados de la actividad descrita tiene como finalidad explorar las intuiciones y concepciones previas de los estudiantes acerca de las relaciones entre poblaciones y muestras y el proceso de inferencia, es necesario concretar las ideas al

respecto. Hemos determinado la presencia de tres concepciones (Artigue, 1990) principales en estos estudiantes sobre el proceso de inferencia. Haremos algunas aclaraciones y precisiones previas acerca de la relación entre el muestreo y la realización de inferencias válidas: es cierto que un proceso de muestreo inadecuado proporciona una muestra no representativa de la población y una inferencia inválida; sin embargo, un muestreo adecuado proporciona una muestra representativa pero no es tan fácil afirmar que la inferencia sea válida porque siempre hay un margen de error y pueden intervenir otros factores incontrolables o de difícil control. Por ejemplo, dos muestras distintas pueden proporcionar estimaciones válidas distintas de una misma característica poblacional ya que, a lo sumo, las medidas muestrales son medidas “imperfectas” de la correspondiente poblacional.

Las concepciones determinadas son las siguientes:

C1) Concepción “correcta”: el proceso de inferencia está sujeto al azar y no permite determinar con precisión las características de una población a partir de las de una de sus muestras.

El adjetivo “correcta” se emplea aquí con toda clase de precauciones. Dado que estamos realizando una generalización, cabe prever que sea excesiva en algunos casos y, probablemente lo será. Sin embargo, nos parece necesario tener algún referente “correcto” y no limitarnos a describir razonamientos o intuiciones mas o menos inadecuados. Incluimos aquí a los alumnos que han afirmado que la población no se puede describir con exactitud, 3 del total de los 14 (21.4%).

C2) Concepción de identidad: el proceso de inferencia permite describir la población con características idénticas a las de una de sus muestras.

Incluimos aquí a los alumnos que han afirmado que la proporción de cartas rojas en el mazo es la misma que la de la muestra, 6 del total de los 14 (42.9%).

C3) Concepción previa: la población tiene unas características descritas por ideas previas y no por las observadas en la muestra extraída.

Incluimos aquí a los alumnos que afirman que la proporción de cartas rojas en el mazo es la misma que la de cartas negras, 5 del total de los 14 (35.7%).

4.1.2 Heurísticas y errores

Vamos a comentar brevemente las posibles causas que pueden motivar las respuestas erróneas de los estudiantes encuadrados en **C2**: se trata en este caso de la manifestación explícita de la llamada *heurística de la representatividad* descrita por Kahneman *et al.* (1982) en otro contexto. Como es conocido, estos autores definen como tal el modo de razonar que lleva a considerar a los sujetos que muestras, incluso muy pequeñas, reproducen las características esenciales de las poblaciones de las que han sido extraídas y de las que serían representativas. Esta manera de razonar lleva a los sujetos a considerar que la población será idéntica a la muestra de ella observada, sin reparar en datos esenciales en el proceso como el tamaño o el modo de obtención de la muestra.

El uso de esta heurística, en el caso que nos ocupa, lleva a los individuos al análisis de problemas distintos como un mismo modelo matemático subyacente, independientemente del modelo teórico al que corresponda el problema, esto es, los estudiantes emplean la heurística en lugar de razonar sobre la distribución muestral generada en la población en estudio.

Como hemos visto, 6 de los 14 estudiantes que han realizado la actividad en los dos grupos de alumnos han utilizado esta heurística como *modelo de razonamiento inferencial*.

Los alumnos de nuestra experiencia encuadrados en C2 están, sin embargo, muy desigualmente repartidos, uno en el grupo de ESO y cinco en el de BUP. Nuestros datos confirman los resultados descritos por Rubin *et al.* (1990) que informan de la presencia de esta heurística en el razonamiento inferencial en el trabajo de alumnos del nivel de secundaria con anterioridad.

Sobre las posibles causas que pueden motivar las respuestas erróneas dadas por los estudiantes que hemos encuadrado en C3, podemos aventurar algunas hipótesis provisionales:

- Algunos sujetos han ignorado la información inicial de que se han extraído al azar 10 cartas de la baraja y siguen considerando un mazo idénticamente distribuido al inicial.
- También pueden haber considerado que como la extracción fue aleatoria, la composición de la baraja debe seguir siendo la misma.
- Razonan bajo el sesgo de equiprobabilidad, esto es, considerando insuficiente la única información disponible sobre la población que es la de la muestra observada, optan por considerar que la probabilidad de obtener cartas rojas y cartas negras es la misma.
- Algunas respuestas de estos sujetos han podido estar condicionadas por el tipo de material utilizado en la actividad. Creemos que con el uso de otros recursos como sacos de bolas o fichas en proporción distinta a la de la baraja, podría cambiar la respuesta.

De los alumnos encuadrados en C3 en nuestra experiencia, 5 del total de los 14 analizados mantienen esta concepción errónea, aunque en este caso están repartidos a la inversa que los encuadrados en C2: 4 del grupo de ESO y 1 del grupo de BUP, esto es, la mayor parte de ellos pertenecen al grupo de menor edad.

4.1.3 Conclusiones provisionales

De las respuestas dadas por los dos grupos de estudiantes que estamos analizando podemos extraer algunas otras conclusiones provisionales:

- Todos los estudiantes de ambos grupos han identificado correctamente la población y las muestras y manifestado ideas correctas sobre esos conceptos.
- No ocurre lo mismo con la relación entre ellos ya que algunos ignoran completamente la información suministrada por la muestra, mientras que otros transfieren sus características a la población en forma absoluta, mostrando así modelos distintos de relación entre poblaciones y muestras.
- Los estudiantes de ESO muestran una mejor intuición y manifiestan mayoritariamente una concepción “correcta” del proceso de inferencia como de “transferencia” de las características de la muestra a la población.
- La mayoría de los estudiantes de BUP han manifestado concepciones incorrectas sobre el proceso de inferencia de la muestra a la población.

- Dado que una diferencia inicial establecida entre estos dos grupos de estudiantes es la formación en estocástica recibida, podemos adelantar una hipótesis optimista sobre la influencia benéfica de esta formación en la consecución de los mejores resultados obtenidos en el grupo de ESO que la ha recibido.
- Casi todo el grupo de BUP, que no ha recibido esta formación, manifiesta la que hemos llamado *concepción de identidad*. Podemos considerarla, por tanto, como intuición incorrecta para este tipo de alumnos.
- Aunque en menor medida, también los alumnos de ESO en esa misma situación han manifestado esta intuición incorrecta.

4.2 Pregunta 2: resultados

Recordamos que la pregunta que se hace al alumno es la siguiente: *suponiendo que sacas cien muestras de cinco cartas como la inicialmente sacada por el profesor, ¿cómo crees que se distribuirán según el número de cartas rojas en ellas? O lo que es lo mismo, ¿cuántas muestras de cada tipo, en cuanto al número de cartas rojas, habrá si sacamos 100?*

Se les explica a los alumnos que no tienen que extraer las cien muestras, sólo suponer que repetimos 100 veces el proceso que acaban de ver hasta obtener 100 muestras de cinco cartas como la que hemos sacado antes. A continuación se les pide que las distribuyan según el número de cartas rojas que crean que obtendrían. Se pretende con esto que construyan la distribución hipotética de las 100 muestras de cinco cartas según el número de cartas rojas en cada una de ellas.

Como hemos escrito antes, pretendemos analizar básicamente tres cosas:

- La noción de la variabilidad muestral que tienen estos alumnos.
- La noción intuitiva de espacio muestral en estos estudiantes, es decir, si construyen completamente o no, y cómo lo hacen, el espacio muestral del experimento, que en este caso sería $\{0 \text{ cartas rojas}, 1 \text{ roja}, 2 \text{ rojas}, 3 \text{ rojas}, 4 \text{ rojas}, 5 \text{ rojas}\}$ o $\{(0R, 5N), (1R, 4N), (2R, 3N), (3R, 2N), (4R, 1N), 5R, 0N)\}$.
- La influencia que tiene la muestra concreta obtenida inicialmente en la respuesta del alumno sobre los dos aspectos anteriores y, en particular, si sobrestiman la frecuencia de aparición del tipo de muestra que coincide con la obtenida en cada grupo de alumnos al comienzo de la actividad.

Las respuestas de los estudiantes se clasifican claramente en dos grupos: las de aquellos que describen todas las posibles tipos de muestras según el número de cartas rojas en ellas, y los que no, esto es, los que describen el espacio muestral completo y los que no lo hacen. Otro tanto ocurre con los que sobrestiman la frecuencia de aparición del tipo de muestra que coincide con la obtenida inicialmente en su clase. En la tabla 2 están contenidos los resultados obtenidos en la pregunta 2.

Aparentemente, ningún alumno ha tenido dificultad para captar la característica de variabilidad de las muestras que todos parecen asumir de manera natural, aunque sin embargo, con muchas limitaciones. Más de la mitad de los alumnos no consideran todos los posibles tipos de muestras, esto es, no construyen el espacio muestral completo o consideran sólo unos pocos tipos de muestras distintos.

Tabla 2. Distribución hipotética de 100 muestras.

	3° ESO	3° BUP	TOTAL
Completa el espacio muestral	5	1	6
No completa el espacio muestral	3	5	8
Sobreestima la frecuencia	4	3	7
No sobreestima la frecuencia	4	3	7

Este era un resultado esperado puesto que las dificultades en la construcción del espacio muestral ya fueron detectadas por Rubin (1990) o Navarro-Pelayo (1994), entre otros.

De nuevo los resultados son muy diferentes en los dos grupos de alumnos: mientras que en ESO más de la mitad (5 de 8) escriben todos los posibles resultados, en BUP sólo 1 de 6 lo hace. Hay que recordar aquí de nuevo que los alumnos de ESO trabajaron previamente conceptos relacionados con la pregunta como el recuento de sucesos, espacios muestrales de varios experimentos sencillos y los diagramas de árbol.

“Creo que tres cuartas partes saldrían como la muestra, la otra cuarta parte serían 1 roja y 4 negras”, decía el alumno B2 que consideró, como respuesta a la primera pregunta, que habría la misma proporción en la población que en la muestra (en este curso la muestra inicial obtenida fue de cuatro cartas rojas y una negra). Este alumno tiene una concepción estable en cuanto al hecho de que la población tiene unas características idénticas a las de la muestra obtenida, si bien manifiesta explícitamente una comprensión de la variabilidad limitada sólo a dos tipos de muestras.

Analizamos ahora la posible influencia de la composición de la muestra concreta sacada al principio de la actividad en la respuesta de los estudiantes a esta segunda pregunta.

El interés por el estudio de la posible sobreestimación de la frecuencia del tipo de muestra que coincide con la inicialmente obtenida en cada grupo de alumnos, radica en el hecho de que estas respuestas nos permitirían afianzarnos en la idea del empleo de la heurística de la representatividad por parte de los alumnos. En definitiva, buscamos quiénes de ellos, a pesar de que puedan intuir la forma de la distribución, asignan valores por exceso a la frecuencia de sus picos. Para hacer la comparación utilizamos la distribución de frecuencias que se corresponde con la composición de la población que el alumno supone al responder la primera de las preguntas. Así, la frecuencia correspondiente a la muestra extraída en ESO (3R, 2N) si el alumno considera la baraja formada por el mismo número de cartas rojas y negras, C3, es 31, mientras que la correspondiente a un alumno de BUP encuadrado en la concepción C2 es 41.

4.2.1 Concepciones sobre el proceso de inferencia y sobrestimación

En la tabla 3 podemos observar como se distribuyen los individuos que han sobrestimado o no la frecuencia del tipo de muestra coincidente con la inicialmente sacada en relación con las concepciones anteriormente descritas en la Sección 4.1.

La mayoría de los estudiantes que sobrestiman la frecuencia del tipo de muestra que coincide con la inicialmente extraída, 6, están clasificados en la concepción de identidad,

Tabla 3. Estimación de la frecuencia de la muestra inicial

	C1	C2	C3
Sobrestima la frecuencia	1	6	3
No sobrestima la frecuencia	2	0	2

C2, seguidos de aquellos, 3, que han manifestado la concepción previa, C3. Sólo un alumno de éstos manifestó antes una concepción correcta sobre el proceso de muestreo.

Por otra parte, entre los que no han sobrestimado la frecuencia en cuestión, no hemos encontrado ningún estudiante que manifieste la concepción de identidad, si bien se dividen en partes iguales entre las concepciones correcta y previa, C1 y C3, respectivamente.

4.2.2 Heurísticas y errores

Se observa una coherencia total en los resultados anteriores: por una parte, los alumnos que emplean la heurística de la representatividad en sus razonamientos inferenciales, encuadrados en C2, sobrestiman la frecuencia del tipo de muestra que coincide con la inicialmente extraída. Por el contrario, los que nos han empleado dicha heurística tampoco han sobrestimado la frecuencia de la referida muestra.

En las respuestas de los estudiantes en que aparece incompleta la enumeración de todos los resultados posibles sobre el número de cartas rojas en la muestra, se repiten los dos planteamientos siguientes:

- Las combinaciones extremas no aparecen, es decir, no se tiene en cuenta la posibilidad de obtener muestras en que todas las cartas sean rojas o que ninguna de ellas lo sea.
- Siempre está presente la combinación *complementaria*.¹ Es decir, aunque como en el ejemplo siguiente el individuo sólo considere dos sucesos, éstos serán complementarios. El alumno E5, que respondió a la primera pregunta que habría el mismo número de cartas rojas que de negras, respondió ahora: "3 rojas y 2 negras, 50 veces; 3 negras y dos rojas, 20 veces; 15 veces sacaríamos 1 negra y cuatro rojas y otras 15 veces 4 negras y 1 roja".

En resumen, se observa una influencia clara de la muestra extraída al comienzo de la clase en la estimación de la frecuencia del tipo de muestra correspondiente que hacen los estudiantes y, en concreto, aquellos que consideran que la población ha de reproducir las características de una de sus muestras, sobrestiman claramente dicha frecuencia.

Los principales errores observados pueden ser atribuidos a las siguientes causas:

- Los sujetos confunden *raro* con *imposible*, (Fischbein *et al.* 1991). Esta puede ser la causa de que los estudiantes excluyan, al construir el espacio muestral, las combinaciones extremas (cinco cartas rojas o cinco cartas negras). En el mismo estudio citado anteriormente, Fischbein (p. 537) justifica algunos de los resulta-

¹ Hemos llamado combinación complementaria a la que se obtendría de una muestra considerada alternando el color de las cartas. Por ejemplo, 2 rojas y 3 negras tendería como complementaria 3 rojas y 2 negras.

dos de su investigación afirmando que “los sujetos poseen la capacidad intuitiva para evaluar globalmente la magnitud del espacio muestral y de su estructura”. Pero esta capacidad intuitiva por sí sola no justificaría la diferencia de resultados entre un grupo y otro que hemos visto más arriba.

- La sobrestimación del valor de la frecuencia referida puede ser una consecuencia de un razonamiento realizado usando la heurística de la representatividad. Rubin (1990) afirma sobre los resultados de su experimento: “...*los estudiantes parecen estar indudablemente influenciados por las implicaciones de la representatividad de la muestra al construir una distribución. Ellos subestiman las frecuencias de las muestras cerca de las colas de la distribución y sobrestiman la frecuencia de la muestra modal, incluso cuando son conscientes del número de categorías entre las cuales tienen que repartir sus paquetes*” (p. 317).

4.2.3 Conclusiones provisionales

Resumiendo los análisis realizados de las respuestas obtenidas a la pregunta dos del cuestionario, podemos concluir provisionalmente lo siguiente:

- La mitad de los alumnos no considera el espacio muestral completo. Los casos extremos (5 cartas rojas ó 5 cartas negras) son sistemáticamente excluidos en estos casos.
- La mayoría de los alumnos de BUP, todos excepto uno, no construyen el espacio muestral completo.
- La mayoría de los alumnos de ESO sí construyen el espacio muestral completo.
- En la realización de la tarea de construir el espacio muestral, los mejores resultados de los alumnos con formación frente a los que no la recibieron parece confirmar que la enseñanza de las técnicas de combinatoria como diagramas de árboles, enumeración de sucesos de espacios muestrales, etc., mejora la capacidad para definir la estructura del espacio muestral.
- Se observa claramente la contraposición de las dos ideas fundamentales en estadística inferencial de *representatividad* y *variabilidad* muestral y los problemas que ésta puede plantear para la enseñanza.
- En general, todos los estudiantes asumen la variación en la composición de las muestras aunque con muchas limitaciones. En cuanto a la representatividad de las muestras, la enseñanza de conceptos probabilísticos no mejora necesariamente las estimaciones de la frecuencia de un suceso frente a los otros del espacio muestral. Alumnos con formación en conceptos generales de azar y probabilidad y sin ella, tanto los que han trabajado con materiales que generan procesos estocásticos como los que no los han utilizado nunca en clase de matemáticas, han exagerado la frecuencia de la muestra modal frente a las otras posibles en una distribución hipotética.

Estos resultados nos llevan a sugerir una recomendación didáctica. Es necesario el trabajo específico del tema de obtención de muestras para analizar con los estudiantes la

variabilidad inherente al proceso de muestreo, las condiciones de representatividad, la influencia del tamaño de la muestra en la realización de inferencias, etc. Además, este trabajo debe realizarse con distintos materiales y situaciones para construir diferentes espacios muestrales en distintos contextos.

4.3 Pregunta 3: resultados

La pregunta que se hace al alumno es la siguiente: *escribe ahora todas las posibles combinaciones de cartas rojas que podemos obtener al extraer cinco cartas. Supón que nuevamente extraemos cien muestras, ¿cómo se distribuirían en cada uno de esos resultados?*

Esto es, primero se le pide al estudiante que construya el espacio muestral para, a continuación, volver a idear una hipotética distribución con cien muestras de cinco cartas. Con ello se pretende analizar la capacidad para aproximar de forma intuitiva la forma de la distribución muestral pero ahora con la seguridad de tener explícitamente construido el espacio muestral. Como referencia utilizamos una distribución binomial con valores para los parámetros $n = 5$ y p dependiente de la primera pregunta (en adelante, distribución teórica). Si respondieron que la baraja contiene el mismo número de cartas rojas y negras, la probabilidad de obtener una carta roja es p y p será 0.5. Si consideraron que el mazo mantiene la proporción de la muestra, se tendrán dos valores para p dependiendo de la muestra resultante en cada grupo. En el curso de BUP la muestra extraída por el profesor estaba constituida por cuatro cartas rojas y una negra y el valor asignado para p en la distribución de comparación de 0.8. El valor de p en ESO es 0.6 puesto que la muestra estaba formada por tres cartas rojas y dos negras. Para aquellos alumnos que, por construir completamente el espacio muestral en la respuesta a la segunda cuestión, no responden a la tercera de las cuestiones planteadas, utilizamos la distribución diseñada en la segunda cuestión.

Pretendemos analizar, básicamente, tres cosas:

- La capacidad intuitiva del alumno para diseñar la distribución muestral correspondiente.
- La aproximación entre la distribución hipotética construida por el alumno y la teórica correspondiente.
- La relación entre la aproximación realizada y la concepción sobre el proceso de inferencia manifestado.

4.3.1 Diseño de la distribución, curso y concepciones sobre el proceso inferencial

En la tabla 4 hemos recogido los resultados obtenidos en el diseño de la distribución muestral en relación con el curso de los alumnos y con las concepciones sobre el proceso inferencial establecidas en la primera cuestión.

Casi todos los alumnos de ESO, 5 y 7, aproximan bien la forma de la distribución muestral en relación con el curso de los alumnos y con las concepciones sobre el proceso inferencial establecidas en la primera cuestión.

Casi todos los alumnos de ESO, 5 de 7, aproximan bien la forma de la distribución muestral pero no así los de BUP que, mayoritariamente, 4 de 6, no construyeron la distribución esperada.

En relación con las concepciones sobre el proceso inferencial manifestadas por los alumnos de ESO, la mayoría de los que aproximan bien la forma de la distribución, 5 de 7,

Tabla 4. Diseño de la distribución muestral

<i>RESULTADOS</i>	<i>CURSO</i>		<i>CONCEPCIONES</i>		
	3° ESO	3° BUP	C1	C2	C3
Aproxima la forma de la distribución	5	2	-	2	5
No aproxima la forma de la distribución	0	4	-	4	0

están encuadrados en la concepción previa, C3, no así los de BUP en donde 4 del total de 6 están encuadrados en la concepción de identidad, C2.

4.3.2 Heurísticas y errores

Las malas o incluso erróneas aproximaciones a la distribución de probabilidad, se pueden atribuir provisionalmente a la siguientes causas posibles:

- Algunos individuos sobrestiman las frecuencias correspondientes a la muestra obtenida. Estos valores excesivamente dispares se pueden encontrar tanto al relacionarlo con las demás muestras posibles como al relacionarlo con el valor teórico.
- Algunos sujetos tienen dificultades para reflexionar en términos probabilísticos. Así hay individuos que responden con distribuciones muy dispares a las preguntas segunda y tercera, o distribuciones sin ninguna coherencia con la primera cuestión.
- Estas dificultades pueden ser consecuencia del manejo de un rango de valores de probabilidad limitado (Fischbein, 1991; Zimmer, 1983). Aparecen sujetos que sólo consideran dos o tres grados probabilísticos que se corresponderían con afirmaciones intuitivas como: probable, poco probable, muy probable.

4.3.3 Conclusiones provisionales

Resumiendo, el análisis de las respuestas proporcionadas por los estudiantes concluimos provisionalmente que:

- La mayoría de los alumnos de BUP han realizado distribuciones de muestreo incoherentes con la creencia que manifestaron sobre la constitución de la población.
- Los estudiantes de ESO han realizado una adecuada aproximación a la distribución de muestreo de acuerdo con la respuesta dada a la primera cuestión, manifestando una adecuada comprensión de los procesos probabilísticos.
- El número de individuos que aproxima adecuadamente la forma de la distribución de probabilidad está desigualmente repartido entre los alumnos de BUP y de ESO. Esto hace pensar que la formación probabilística inicial mejora no sólo el manejo de los primeros conceptos sino incluso prepara para la introducción de conceptos más complicados posteriormente.

Frente a los sujetos encuadrados en la concepción de identidad, C2, los individuos que presentaron la *concepción previa*, C3, realizaron en su mayor parte mejores aproximaciones de la distribución de muestreo. Provisionalmente debemos concluir, por tanto, que las distribuciones de probabilidad simétricas resultan ser mejor aproximadas que las asimétricas.

5. Estudio de casos

Como hemos dicho antes, este estudio tiene también una vertiente cognitiva. Hemos utilizado el marco descrito por Jones *et al.* (1997) para describir el pensamiento probabilístico de los alumnos basado en cuatro constructos: espacio muestral, probabilidad de un suceso, comparación de probabilidades y probabilidad condicional. En cada uno de ellos se consideran cuatro niveles para la clasificación de los alumnos, atendiendo a las herramientas conceptuales empleadas en la resolución de las tareas probabilísticas que se les proponen, que van desde el empleo de criterios subjetivos al uso del razonamiento cuantitativo formal. Este esquema presenta un modelo integrado de análisis que nos parece adecuado y aplicable, en nuestro caso, para la observación del primero de los constructos descritos, el de espacio muestral. Nuestra finalidad es explorar sobre el terreno, la potencial utilidad de este instrumento para los fines de nuestra investigación, esto es, las posibles adaptaciones necesarias, ampliaciones a otros constructos, refinamiento de los criterios para la clasificación de las respuestas en los distintos niveles, etcétera.

Hemos realizado la siguiente adaptación del modelo a nuestro caso: se ha añadido un constructo nuevo que hemos llamado *proceso de inferencia*, y de los cuatro constructos del modelo hemos utilizado en este trabajo sólo uno, el de espacio muestral. Esto es, nuestro esquema de análisis se basa en dos constructos y cuatro niveles. En la tabla 5 se describe este esquema. Una vez analizados los datos de esta muestra de alumnos bajo esta nueva óptica y readaptado y refinado el instrumento, pretendemos aplicarlo para el análisis de datos de tipo cualitativo obtenidos mediante la técnica de entrevista que nos permitirá obtener mejor información del razonamiento empleado por los alumnos.

5.1 Los dos constructos observados

Con el fin de aproximarnos al modo de proceder de los estudiantes cuando realizan actividades que involucran razonamientos de tipo inductivo, hemos observado el trabajo realizado en

Tabla 5. Esquema de análisis para el estudio de casos.

	Nivel 1 Subjetivo	Nivel 2 Transición	Nivel 3 Cuantitativo informal	Nivel 4 Cuantitativo formal
Espacio muestral	Listado incompleto de resultados	Listado completo usando estrategias limitadas	Listado completo usando una estrategia parcialmente general o con limitaciones	Listado completo usando una estrategia general
Proceso de inferencia	Criterios subjetivos	Criterios subjetivos y/o numéricos con errores	Criterios numéricos y expresión informal	Criterios numéricos y expresión formal

clase por los 14 alumnos de nuestra muestra. La observación se ha limitado a dos constructos básicos por dos razones: la primera de tipo curricular, ya que la actividad se realizó en situación normal de clase se limita a contenidos incluidos en el currículo; la segunda, por las necesidades del propio trabajo, ya que como la observación tiene fines exploratorios con el objetivo de elaborar un instrumento de análisis para la realización de entrevistas clínicas en situación de laboratorio, no es necesario de momento que sea exhaustivo, bastará con la observación de las características básicas del proceso incluídas en el programa docente de ese tipo de alumnos. En cada uno de estos constructos hemos empleado cuatro niveles: en el caso del *espacio muestral* los descritos en el esquema de Jones *et al.* (1997) y en el caso *proceso de inferencia* los definidos por nosotros respetando las características básicas de los del esquema de Jones *et al.* Describimos ambos brevemente a continuación.

5.1.1 Espacio muestral

La comprensión completa del espacio muestral del experimento se ha conseguido cuando el alumno es capaz de listar todos los posibles resultados en forma sistemática y sin errores. Los alumnos que han realizado así la tarea han sido clasificados en el nivel 4. En el otro extremo, nivel 1, han sido clasificados los que han dado un listado incompleto de los posibles resultados. La distinción entre los niveles dos tres se ha hecho atendiendo a que el alumno dé el listado completo de resultados pero empleando una estrategia no sistemática o sistemática con errores.

5.1.2 Proceso de inferencia

El nivel 4 se ha conseguido cuando el alumno exhibe una concepción correcta del proceso junto a un buen lenguaje “técnico”. Los alumnos que muestran una concepción incorrecta pero exhiben buen dominio numérico y un lenguaje informal pero suficiente, se han clasificado en el nivel 3 o en el 2, atendiendo a sus argumentaciones a juicio del investigador-observador. En el nivel 1 se han clasificado aquellos alumnos que exhiben criterios subjetivos ajenos al proceso. Un ejemplo de este último caso es el siguiente: “no lo sé, porque en cada palo hay 10 cartas, y que en la muestra hayan salido más rojas no tiene nada que ver” (E7).

5.1.3 Resultados

El análisis de los datos bajo esta nueva perspectiva nos ha resultado mucho más complejo que antes, de manera que lo que hemos conseguido, fundamentalmente, es generar nuevas preguntas y líneas de investigación.

Como la finalidad de este análisis no es el estudio del nivel cognitivo de los alumnos sino estudiar la adecuación del modelo a nuestros propios fines, no es pertinente el comentario exhaustivo de los casos analizados sino los resultados más sobresalientes obtenidos.

Espacio muestral: hay varios estudiantes que cambian de nivel entre las preguntas 2 y 3 del cuestionario lo que indica que para estos alumnos el hecho de obligarles a reflexionar sobre la respuesta correcta a la segunda pregunta da como resultado que respondan bien a la siguiente. Lo curioso es que no pasa en todos los casos. En ESO hemos clasificado tres estudiantes en el nivel 4 en la tercera cuestión, mientras que en BUP, ninguno en ninguna de las dos preguntas.

Proceso de inferencia: ningún estudiante ha sido clasificado en el nivel 4 y la mayoría de los de ESO lo han sido en el nivel 1. Por el contrario, los de BUP han sido clasificados en los niveles 2 y 3.

6. Conclusiones provisionales y líneas de investigación

Como hemos comentado antes, en esta parte de la investigación más que resolver preguntas hemos conseguido generar interrogantes y nuevas líneas de investigación. En nuestro contexto, los dos constructos explorados nos parecen claramente insuficientes para caracterizar el pensamiento inferencial de manera que estamos trabajando en la línea de determinar cuáles serían los necesarios y suficientes para este fin. Hemos tenido muchas dudas a la hora de clasificar a los alumnos y nos preguntamos cuál es la información que necesitamos para conseguir esta clasificación, cuáles serían las “ventajas didácticas” de su conocimiento y las condiciones de estabilidad. ¿Es conveniente y necesaria una clasificación en niveles única para todos los constructos?, ¿qué relación hay entre los niveles y concepciones?, ¿las concepciones determinadas pueden servir como guía para la clasificación por niveles? La caracterización del razonamiento inferencial, el razonamiento inferencial de los alumnos de los distintos niveles de enseñanza, las estrategias y recursos didácticos para el aula, los criterios de evaluación, etc., constituyen campos inmensos de trabajo apenas explorados. Algunas áreas para la investigación son las siguientes:

a) Con respecto al contenido estadístico:

- Determinar los constructos básicos para caracterizar el razonamiento inferencial.
- Determinar otros constructos relacionados.
- Relacionar conceptos y procedimientos.
- Relacionar éstos con los anteriores (descriptiva, probabilidad, etc.).

b) Con respecto al modelo de análisis:

- Determinar los constructos a incluir en el modelo.
- Posible clasificación de los mismos.
- Determinar los niveles pertinentes y las características de los mismos.
- Ventajas y desventajas de un modelo único para todos los constructos.

c) Con respecto a la obtención de datos:

- Situación de clase normal o de laboratorio.
- Determinar las tareas pertinentes para la observación, etcétera.

7. Conclusiones

La actividad realizada ha resultado entretenida para los alumnos y ha servido ampliamente para la consecución de los objetivos propuestos. A saber, la ejemplificación de un proceso inferencial sencillo y de los conceptos inferenciales básicos como poblaciones, muestras y

sus relaciones; analizar la idea de muestra, la variabilidad muestral y las intuiciones sobre el espacio muestral que tienen estos alumnos. Nos parece necesario hacer mención especial de determinación de las concepciones sobre el proceso inferencial porque pueden condicionar en gran manera la enseñanza del tema.

Una primera conclusión global del análisis de los resultados obtenidos en la actividad de clase realizada, es la dificultad que supone el aprendizaje de conceptos inferenciales para este tipo de alumnos, así como el diseño de situaciones didácticas que puedan plantearse a los estudiantes para facilitar el aprendizaje significativo de ellos. Por una parte, el razonamiento inferencial implica el uso de cierto modelo de distribución muestral que no es de fácil manejo para los estudiantes de nivel secundaria. Por otra parte, estos estudiantes no emplean un modelo único en el establecimiento de relaciones entre muestras y poblaciones, sino que éste puede variar en función de muchos factores desconocidos por el momento como pueden ser intuiciones, la naturaleza del problema, el tamaño de las muestras, etc. Nuestros resultados confirman claramente los principales problemas señalados en Konold (1955), a saber, que: a) los estudiantes tienen teorías o intuiciones acerca de la probabilidad y la estadística anteriores a la instrucción y muchas de ellas están en abierta contradicción con la norma convencional; b) estas teorías o intuiciones son difíciles de alterar con la instrucción, y c) un estudiante puede mantener creencias múltiples y a menudo contradictorias acerca de una misma situación. Lejos de desanimar a los profesores que enseñan estos temas, esta situación debe contemplarse como un desafío para la investigación específica, en los ámbitos teórico y didáctico, que lleve a la aportación de pautas orientadoras para la enseñanza de la estadística inferencial en todos los niveles de enseñanza. Se impone la necesidad del diseño de recursos apropiados para el aula (Vallecillos y Moreno, 1997; Batanero *et al.* 1998; Moreno y Vallecillos, 1999) que, debidamente contrastados, puedan proporcionar la información necesaria para potenciar las intuiciones incorrectas y conseguir unificar en un solo modelo consistente e identificable para los estudiantes de secundaria el razonamiento inferencial.

Agradecimientos: A los Proyectos de Investigación PB97-0827y B02000-1507 financiados por el Ministerio de Ciencia y Tecnología, Madrid, España.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1990). "Epistemologie et Didactique". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), pp. 241-286
- Batanero, C.; Vallecillos, A.; Moreno, A.; Serrano, L.; Ortíz, J.J. y Cañizares, Ma J. (1998). Taller sobre Estadística y Probabilidad. *Actas de las IV Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas: Los recursos*. Granada: S.A.E.M. "Thales".
- Carpenter, T.P.; Fennema, E. (1992). "Cognitively guided instruction: Building of the knowledge of students and teachers". *International Journal of Educational Research*, 17, pp. 157-470
- Cobb, P.; Wood, T.; Yackel, E.; Nichols, J.; Wheatley, G.; Trigatti, B. y Perlwitz, M. (1990). "Classroom as learning environments for teachers and researches". En R. Davis, C. Maher y N. Noddigns (Eds.): *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph Series Number 4 (pp. 125-146). Reston, VA: NCTM.
- Cobb, P.; Wood, T.; Yackel, E.; Nichols, J.; Wheatley, G.; Trigatti, B y Perlwitz, M. (1991) "Assessment of a problem-centered second-grade mathematics project". *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (1), pp. 3-29.
- Cobb, P.; Yackel, E. y Wood, T. (1992). "Interactions and learning in mathematics classrooms situations". *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp. 99-122.
- Fennema, E.; Carpenter, T.P.; Frnake, M.L.; Levi,

- L.; Jacobs, V. R. y Empson, S. B. (1996). "Alongitudinal study of learning to use children's thinking in mathematical instruction". *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, (4), pp. 403-434.
- Fischbein, E.; Sainatinello, M.; Sciolis y Marino, M. (1991). "Factors Affecting Probabilistic Judgements in Children and Adolescents". *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 523-548.
- Jacobs, V. (1996). *Children's informal interpretation and evaluation of statistical sampling in surveys*. Ph. D. University of Wisconsin-Madison.
- Jones, G. A.; Langrall, C. W.; Thornton, C. A. y Mogill, A. T. (1997). "A frameworks for assessing and nurturing young children's thinking in probability". *Educational Studies in Mathematics*, 32, pp. 101-125.
- Jones, G.A.; Langrall, C. W.; Thornton, C. A y Mogill, A. T. (1999). "Students' Probabilistic Thinking in Instruction". *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, (5), pp. 487-519.
- Junta de Andalucía (1992). Decreto 106/1992 de 9 de Junio (BOJA del 20) por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la ESO en Andalucía.
- Junta de Andalucía (1994). Decreto 126/1994 de 7 de Junio (BOJA del 26 de Julio) por el que se establecen las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía.
- Junta de Andalucía (1997). Currículo de Bachillerato en Andalucía.
- Holling, E. R. (1999) "Becoming a reflective practitioner". En: E.R. Holling y E. I. Olivier (Eds.): *Pathways to Success in School: Culturally Responsive Teaching*. Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hopkins, D. (1993). *A Teachers' Guide to Classroom Research*. Buckingham: Open University Press.
- Kahneman, D.; Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristic and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Konold, C. (1995). Issues in Assessing Conceptual Understanding in Probability and Statistics. *Journal of Statistics Education*, 3 (1). (On line). (<http://www.amstat.org/publications/jse/v3n1/konold.html>)
- MEC (1990). Ley Orgánica 1/1990 de Ordenación del Sistema Educativo (LGSE, BOE de 4 de Octubre).
- MEC (1992). Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes al Bachillerato, (BOE 253).
- Moreno, A y Vallecillos, A. (1999). ¿Cuántas ranas hay en la charca?. Actas de las 9as. JAEN, pp. 294-298. Lugo: Cefocop.
- Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- NCTM. (1989). *Curriculum and evaluations standards for schools mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for schools mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Noffke, S. Y stevenson, R. (Eds.) (1995). *Educational Action Research*. New York: Teachers College Press.
- Robert, A. (1983). "L'adquisition de la notion de vonvergence des suites numeriques dans l'enseignement superioure". *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 3 (3), pp. 307-341.
- Rubin, A.; Bruce, B. y Tenney, Y. (1990). Learning About Sampling: Trouble at the Core of Statistics. *Actas del ICOTS III*, pp. 314-319. Dunedin: University of Otago.
- Vallecillos, A. (1994). Estudio teórico-experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. (Reseñada en *Educación Matemática*, 7 (1), pp. 141-143, 1995)
- Vallecillos, A. (1997). "El papel de las hipótesis estadísticas en los contrastes: concepciones y dificultades de aprendizaje". *Educación Matemática*, 9 (2), pp. 5-20
- Vallecillos, A. y Moreno, A. (1997). "Los profesores de matemáticas y la inferencia estadística en la enseñanza secundaria". En Berenguer, Ma. I.; Cobo, B y Fernández, F. (Eds.): *Investigación en el aula de Matemáticas: la tarea docente*. Pp. 279-287. Granada: S.A.E.M. "Thales".
- Zimmer, A.C. (1983). "Verbal vs. Numerical processing of subjective probabilities". En R. W. Scholz. (Ed.): *Decisions making under uncertainty*. (pp. 159-182). North Holland: Elsevier Science Publishers B.V.