Magnitudes continuas y números reales

NOTAS DE CLASE

Fecha de recepción: mayo, 2001

Educación Matemática
Vol. 14 No. 1 abril 2002
105-110

Norberto Fava, Graciela Fernández y Héctor Pérez
Departamento de Matemática
Universidad de Buenos Aires
nfava@sinectis.com.ar; gfernand@dm.uba.ar; hperez@caece.edu.ar

Resumen: *La noción primitiva de cuerpo real se fundamenta en ciertas operaciones que usualmente realizamos con magnitudes continuas como la longitud, el área, el volumen, la masa y el tiempo. Es esta antigua noción de número, motivada por las aplicaciones geométricas y mecánicas, la que exploramos sistemáticamente en esta nota, en el contexto de una magnitud abstracta.*

Summary: *The early notion of a real field is founded on certain operations we usually perform on continuous magnitudes such as length, area, volume, mass and time. This old concept of number, motivated by applications to geometry and mechanics, is the one we explore systematically in this note, in the context of an abstract magnitude.*

1. Introducción

Los estudiantes de matemática suelen estar familiarizados con las propiedades de los anillos y cuerpos numéricos desde un punto de vista formal y abstracto, pero no ocurre lo mismo –por lo general– con la teoría que describe su utilización en las aplicaciones geométricas y físicas, a pesar de ser éstas las que conducen al concepto de cuerpo real, que damos por conocido.

El remedio es antiguo y se encuentra en la teoría general de las magnitudes continuas, que estudiamos con rigor en esta nota. El ejemplo más representativo de una magnitud continua es la longitud: las longitudes suelen sumarse y compararse por su tamaño y no hay quien ignore las propiedades más sencillas de estas operaciones que tienen su origen en experiencias reales y necesidades prácticas.

El excelente artículo de G. Vitali (3) nos ha servido para comprender más cabalmente el papel que desempeña en esta teoría el postulado de continuidad (véase abajo la demostración de Stolz). Nos referimos al siguiente enunciado: *"Si un segmento de recta PQ está dividido en dos partes, de suerte que: 1° todo punto de PQ pertenezca a una de las dos partes; 2° el extremo P pertenezca a la primera parte y Q a la segunda, y 3° cualquier punto de la primera parte preceda a un punto cualquiera de la segunda en el orden PQ del segmento, entonces existe un punto R de PQ (que puede pertenecer a una u otra parte) tal que todo punto de PQ que preceda a R pertenece a la primera parte, y todo punto de PQ que siga a R pertenece a la segunda en la división establecida"*. El axioma VII es una simple adaptación de este enunciado al carácter más general de nuestra nota.

Los enunciados con números romanos –siete en total– son los axiomas de la teoría. Aquellos enunciados cuya demostración se omite representan sencillos y útiles ejercicios.

2. Concepto de magnitud

Consideremos un conjunto $M = \{A, B, C\}$ entre cuyos elementos se ha definido una ley de composición + llamada *suma*, de modo tal que se satisfacen las siguientes propiedades:

I. $A + (B + C) = (A + B) + C$

II. $A + B = B + A$

III. Existe un elemento $0 \in M$, tal que $A + 0 = A$ para cualquier A

IV. Si $A + B = 0$ entonces $A = B = 0$

Decimos que A es menor que B y escribimos indistintamente $A < B$ o $B > A$ si existe tal que $B = A + L$. Inmediatamente se deducen las siguientes afirmaciones:

1° $A \neq 0 \Leftrightarrow A > 0$ 2° $A < B$ y $B < C \Rightarrow A < C$.

V. Para cualquier par de elementos de M se cumple una y sólo una de las relaciones

$$A > B,\ A = B,\ A > B$$

Ahora se demuestran como fáciles ejercicios las afirmaciones:

1° Si $A < B$ entonces $A + C < B + C$; 2° Si $A + C = B + C$ entonces $A = B$

Si $B < A$, el único L que satisface $A = B + L$ se llama *diferencia* entre A y B y se denota por $A - B$.

Ejercicio. Probar que si $A < B < C$ entonces $C - A > C - B$

VI. Si $A < 0$ entonces existe B tal que $0 < B < A$.

Supondremos que M no es trivial, es decir que contiene elementos distintos de 0. El producto nA del entero positivo n por A se define inductivamente por las fórmulas:

$$1A = A, \quad (n+1)A = nA + A.$$

Precisamente por inducción se demuestran las siguientes fórmulas:

$$n(A + B) = nA + nB, \qquad n(A - B) = nA - nB,$$
$$(m + n)A = mA + nA, \quad m(nA) = (mn)A.$$

La última nos autoriza a escribir sin incurrir en ambigüedad.

Ejercicios. Probar las afirmaciones: 1° Si $nA = 0$ entonces $A = 0$; 2° Si para algún $A \neq 0$, $mA = mA$ entonces $m = n$.

VII. (***Postulado de continuidad***). Sean $\mathbf{S}_1 = (H)$ y $\mathbf{S}_2 = (K)$ subconjuntos no vacíos de M con la propiedad de que cualquier elemento del primero es menor que cualquiera del segundo. Entonces existe $B \in M$ tal que $H \leq B \leq K$ para cualquier H del primer conjunto y cualquier K del segundo.

Teorema. ***(Divisibilidad)***. Para cualquier A y cualquier n existe B tal que $nB = A$.

Para la demostración necesitamos el siguiente lema.

Lema. *Si $A > 0$ entonces para cualquier n existe $B > 0$ tal que $nB < A$.*

En efecto, el axioma VI permite escribir A en la forma $A = B_1 + C_1$, donde $0 < B_1 \leq C_1$. Entonces $2B_1 \leq A$; y aplicando el mismo argumento a B_1 podemos encontrar $B_2 > 0$ tal que $2B_2 \leq B_1$. Es decir, $2^2 B_2 \leq A$.

Continuando en la misma forma obtendremos una sucesión (B_k) de elementos mayores que 0 que verifican $2^k B_k \leq A$; y es claro que para k suficientemente grande tendremos $n > 2^k$ lo que demuestra el lema.

Ahora podemos probar el teorema: consideremos una partición de M en dos conjuntos (H) y (K) definidos respectivamente por las relaciones $nH \leq A$ y $nK > A$. Por el postulado de continuidad existe B tal que $H \leq B \leq K$ para cualquier H del primer conjunto y cualquier K del segundo. Queremos probar que $nB = A$.

Si fuera $nB < A$, podríamos encontrar un elemento $D > 0$ tal que $nD < A - nB$, es decir, $n(B + D) < A$, lo que es absurdo. Si fuera $nB > A$ podríamos hallar $D > 0$ tal que $nD < nB - A < nB$, de donde $n(B - D) > A$, lo que es también absurdo. Por consiguiente, $nB = A$ como queríamos probar.

Definición. Dados A y n, el único B que verifica $nB = A$ se denota por $A/n \left(\text{o } \dfrac{A}{n} \right)$; en particular, $A/1 = A$.

Teorema. ***(Propiedad de Arquímedes)***. Si $0 < B < A$, entonces existe n tal que $nB > A$.

Demostración (O. Stolz). Suponiendo que un tal n no existiera, definimos una partición de M en dos clases según los siguientes criterios:

a) $(\forall n)\ nH < A$; **b)** $(\exists n)\ nK > A$.

Es claro entonces que B pertenece a la primera clase y A a la segunda; y asimismo que cualquier H es menor que cualquier K. En estas condiciones el postulado de continuidad asegura la existencia de un elemento C tal que $H \leq C \leq K$ para cualquier H de la primera clase y cualquier K de la segunda.

Consideremos ahora un elemento L tal que $0 < L < C$ (axioma VI). Entonces existe n tal que $n(C + L) > A$, y por consiguiente, $2n \dfrac{C+L}{2} > A$, lo que es absurdo pues $\dfrac{C+L}{2} < C$.

3. Símbolos racionales operando sobre M

Para lo que sigue conviene introducir la siguiente definición. Si f y g son funciones de M en sí mismo, la suma y el producto de ambas se definen por medio de las siguientes fórmulas:

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A), \quad (fg)(A) = f(g(A)).$$

Notación. En forma abreviada escribimos fA en lugar de $f(A)$.

A la luz las definiciones anteriores, las reglas operativas:

$$(m+n)A = mA + nA, \quad m(nA) = (mn)A,$$

expresan que a la suma de dos enteros positivos corresponde la suma de sus respectivas funciones, y al producto de dichos números la composición de las mismas. Además, por lo visto anteriormente, la función $A \to nA$ es igual a la función $A \to mA$ si y sólo si $n = m$. Estas propiedades justifican la identificación del entero positivo n con la función $A \to nA$, que adoptamos a partir de ahora.

Bastante más general es la noción de función definida por un número racional:

Definición. Si m y n son enteros positivos, denotamos por m/n a la función de M en sí mismo definida por el siguiente esquema:

$$A \to m(A/n)$$

Llamamos a esta función el *"número racional"* m/n, y escribimos $\frac{m}{n}A = m(A/n)$.

Notemos que, en particular, $\frac{n}{1}A = n(A/1) = nA$. La fórmula muestra que el número racional $n/1$ opera sobre M del mismo modo que el entero positivo n, lo que prueba la igualdad $n/1 = n$.

Si ponemos $B = (m/n)A$, entonces tendremos $nB = n[m(A/n)] = (nm)(A/n) = m[n(A/n)] = mA$. Luego, $B = (mA)/n$. Hemos probado la fórmula

$$\frac{m}{n}A = \frac{mA}{n}$$

Pongamos ahora $B = A/n$ y $C = B/k$. Entonces tendremos $(nk)C = n(kC) = nB = A$, lo que demuestra la fórmula

$$(A/n)/k = A/nk$$

Ahora es fácil probar que $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$. En efecto: para cualquier A

$$\frac{mk}{nk}A = mk(A/nk) = mk[(A/n)/k] = m(A/n) = \frac{m}{n}A.$$

Corolario. $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ *si y sólo si* $mq = np$

En efecto, (1°) si $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, entonces para cualquier A, $\frac{m}{n}A = \frac{p}{q}A$, y por consiguiente, $(nq)\frac{mA}{n} = (nq)\frac{pA}{q}$, de donde $mqA = npA$; y en consecuencia, $mq = np$.

(2°) Si $mq = np$ entonces $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq} = \frac{np}{nq} = \frac{p}{q}$.

4. Suma y producto de racionales positivos

La demostración de las siguientes fórmulas es un ejercicio sencillo que dejamos a cargo del lector:

$$\frac{m}{n}A + \frac{p}{q}A = \frac{mq+np}{nq}A; \qquad \frac{m}{n}\left(\frac{p}{q}A\right) = \frac{mp}{nq}A$$

En ellas reconocemos las expresiones que definen la suma y el producto de números racionales:

$$\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}, \qquad \frac{m}{n}\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}.$$

De manera que si r y s son números racionales positivos, se cumplen las reglas operativas:

$$(r+s)A = rA + sA, \quad r(sA) = (rs)A.$$

Estas fórmulas adquieren ahora un nuevo significado: suma y composición de funciones en lugar de suma y producto de números; pero el nuevo significado es consistente con el que conocemos por la aritmética de las fracciones. Como era de esperar, llamamos a rA el *producto* del número racional r por el elemento A.

Ejercicios. 1. Probar que $r(A+B)=rA+Rb$. 2. Probar que si $A>0$ y $r>s$ entonces $rA<sA$.

5. Producto por un número real

El producto de un número real positivo ρ por un elemento $A>0$ se define como el único B que satisface $rA<B<r'A$ para cualquier par de números racionales positivos r, r' que verifiquen $r<\rho<r'$ (la existencia y la unicidad de B están garantizadas por el postulado de continuidad y la propiedad de Arquímedes). La definición se completa con las fórmulas $0A=0, \rho\, 0=0$.

Notemos que la definición es consistente con la dada para el caso en que ρ es un número racional. Con facilidad se prueba que si $\rho>0$ y $\rho<\sigma$ entonces $\rho A<\sigma A$.

Teorema. $\rho A+\sigma A=(\rho+\sigma)A, \rho(\sigma A)=(\rho\sigma)A$.

Haremos la demostración suponiendo que $A>0$ y que los números ρ y σ son positivos.

(1°) Sean p y p' números racionales positivos que verifican $p<\rho+\sigma<p'$. Entonces existen números racionales positivos r, r', s, s' tales que:

$$r<\rho<r', \quad s<\sigma<s', \quad p<r+s, \quad r'+s'<p'.$$

En tal circunstancia tendremos

$$rA<\rho A<r'A \text{ y } sA<\sigma A<s'A,$$

y por consiguiente,

$$pA<(r+s)A=rA+sA<\rho A+\sigma A<r'A+s'A=(r'+s')A<p'A,$$

lo que demuestra la primera fórmula.

(2°) Sean p y p' racionales positivos que verifican $p < \rho\,\sigma < p'$. Entonces existen racionales positivos r, r', s, s' tales que:

$$r < \rho < r', \quad s < \sigma < s', \quad p < rs, \quad r's' < p'.$$

En tal circunstancia tendremos:

$$pA < (rs)A = r(sA) < r(\sigma A) < \rho(\sigma A) < r'(\sigma A) < r'(s'A) = (r's')A < p'A,$$

lo que demuestra la segunda fórmula.

Teorema. Si $B > 0$ entonces para cada A existe un único número real $\rho \geq 0$ tal que $\rho B = A$.

La demostración es inmediata si $A = 0$. Suponiendo $A > 0$ definimos ρ como la mínima cota superior de los números racionales positivos q que verifican $qB < A$. En símbolos:

$$\rho = \sup\{q : qB < A\}.$$

Es muy fácil comprobar que $r < \rho < r'$ implica $rB < A < r'B$; lo que en virtud de la definición 7 demuestra que $A = \rho B$.

El número ρ del teorema anterior se llama razón (o cociente) entre *A y B* y se escribe $\rho = A/B$.

Corolario. Si $U > 0$ y $\beta > 0$ entonces $(\alpha U)/(\beta U) = \alpha / \beta$.

En efecto, en virtud del teorema 7 tendremos: $\dfrac{\alpha}{\beta}(\beta U) = \alpha U$.

6. Unidades y medidas

Usualmente se elige como *unidad* un elemento $U > 0$ de $\boldsymbol{M}$. En tal circunstancia, el número $\alpha = A/U$ se llama *medida de A con respecto a U*, y el último corolario se enuncia diciendo que *la razón entre dos elementos de* $\boldsymbol{M}$ *es igual al cociente de sus medidas con respecto a la misma unidad*. Por otro lado, la fórmula ya demostrada:

$$\alpha U + \beta U = (\alpha + \beta)U$$

significa que *la medida de la suma de dos elementos de* $\boldsymbol{M}$ *es la suma de sus medidas*.

Referencias bibliográficas

Dedekind R. (1963), *Essays on the theory of numbers, I. Continuity and irrational numbers*, Dover Publications, New York, 1963.

Enriques F. (1968), U. Amaldi, *Elementi di geometria*, Zanichelli Bologna.

Enriques F., Amaldi U., Guarducci A., Vitali G., Vailatti G. (con prólogo de Julio Rey Pastor (1948)) *Fundamentos de la Geometría*, segunda edición, Buenos Aires: Ed. Iberoamericana.

Fava N. y Molter U., "Units of measurement", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, en prensa.

Lebesgue H. (1935), "Sur la mesure des grandeurs", *L'Enseignament mathématique*, Tomo XXXI (1931) a XXXIV.