

# El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX<sup>1</sup>

Modesto Sierra Vázquez, María Teresa González Astudillo  
y Carmen López Esteban

**Resumen:** En este artículo, estudiamos el desarrollo histórico del concepto de continuidad en los manuales escolares de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria de los últimos cincuenta años. Analizamos treinta y un libros en tres fases, la última de las cuales recoge los resultados de las anteriores. Consideramos tres dimensiones de análisis: conceptual, didáctico-cognitivo y fenomenológico, que nos proporcionan una amplia perspectiva de los cambios experimentados en este desarrollo.

**Abstract:** In this paper, we study the historical development of the concept of continuity in the textbooks of Bachillerato and COU during the last fifty years. We analyse thirty one books in three stages. In the last one, which gathers the results from the others, we consider three dimensions: conceptual, didactic-cognitive and fenomenologic, that show us a wide perspective of the changes experimented in this development.

## INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis de los manuales escolares como reflejo de la actividad que se realiza en el aula, ya que son los manuales los que determinan en gran medida la práctica educativa más que las disposiciones ministeriales. Los historiadores de la educación han tomado conciencia de ello, como lo prueba el hecho de que están llevando a cabo proyectos en este sentido, entre los que destaca el Proyecto Manes, dirigido desde la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), en el que se pretende la ca-

Fecha de recepción: julio de 2001.

<sup>1</sup> Este trabajo es parte de proyectos de investigación financiados por la Junta de Castilla y León, por la Unión Europea (FSE) y por la Dirección General de Educación Superior (DGES-BXX 2000-0069).

atalogación documental, análisis bibliométrico y estudio de las características pedagógicas y político-ideológicas de los manuales escolares en la España contemporánea (1808-1990); también hay que hacer referencia a la reciente publicación de la *Historia ilustrada del libro escolar en España*, dirigida por el profesor Agustín Escolano.

Sin embargo, son escasos los trabajos relacionados con la educación matemática, lo que puede deberse tanto a la falta de formación matemática de los historiadores como al escaso interés de los matemáticos por este tema (Choppin, 1993). Entre los trabajos existentes destacan los de Schubring, en particular los que se refieren a la evolución de la enseñanza de los números negativos en los manuales alemanes y franceses de matemáticas entre 1795 y 1845 (Schubring, 1986, 1988) o el estudio de los manuales de Lacroix (Schubring, 1987; los de Pimm 1987, 1994) en los aspectos relativos al lenguaje y la legibilidad; Dormolen (1986) con la clasificación de los elementos que son imprescindibles en un libro de texto de matemáticas, y Howson (1995), que compara manuales escolares de ocho países diferentes para niños de trece años. Asimismo, los trabajos de Chevallard y colaboradores (Chevallard, 1985; Chevallard y Johsua, 1982) en los que aparece el concepto de *transposición didáctica*, es decir, la transformación del saber de los matemáticos al saber escolar, el cual se refleja fundamentalmente en los manuales escolares.

En un trabajo anterior (Sierra, González y López, 1999), analizamos la evolución del concepto de límite funcional en manuales escolares en España en los últimos cincuenta años; siguiendo la misma metodología, en este artículo realizamos el análisis de la evolución del concepto de continuidad en dichos manuales.

## METODOLOGÍA

Hemos analizado libros publicados desde la terminación de la Guerra Civil (1939) hasta finales del siglo xx. El análisis se ha llevado a cabo en tres etapas, cada una de las cuales profundiza el trabajo realizado en la etapa anterior.

En la primera etapa, se han elaborado fichas con los datos fundamentales del libro: título, autor/es, editorial, año de edición, plan de estudios y un resumen del contenido de los capítulos relacionados con la continuidad.

En la segunda etapa se agruparon los libros por periodos que, en líneas generales, corresponden a los sucesivos planes de estudios:

1. Periodo comprendido entre 1940 y 1967. Este periodo abarca desde el final de la Guerra Civil (1939) hasta 1967. Tiene un punto de inflexión en 1953, año en el que se publica un nuevo plan de estudios (modificado parcialmente en 1957). En 1962 se crea la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos de Enseñanza Media, cuyos trabajos marcan el inicio de un nuevo periodo. Se han analizado cinco libros de este periodo.
2. Periodo comprendido entre 1967 y 1975. Abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP), en 1975, consecuencia de la nueva Ley General de Educación (LGE) de 1970. Se han analizado nueve libros de diversos autores y editoriales, entre ellos los textos piloto publicados por la Comisión.
3. Periodo comprendido entre 1975 y 1995. Comprende desde la implantación del BUP hasta el inicio de los nuevos Bachilleratos derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). Se han analizado trece libros.
4. Periodo comprendido entre 1995 y 2000. Abarca desde la publicación en 1995 de los decretos curriculares derivados de la LOGSE hasta nuestros días. Se han analizado cuatro libros de los bachilleratos de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología.

En esta segunda etapa se han elaborado cuadros comparativos de los libros correspondientes a cada periodo que incluyen:

- a) Modo de introducción del concepto: formal, heurístico o constructivo.
- b) Tipo de definición: topológica, métrica, geométrica o por sucesiones.
- c) Secuencia de contenidos: se ha hecho un listado de las definiciones y propiedades relacionadas con la continuidad, numerándolas según su orden de aparición.
- d) Tipos de ejercicios y problemas.

En la tercera etapa se han considerado tres dimensiones del análisis (véase el cuadro 1).

*Análisis conceptual*, que se refiere a cómo se define y organiza el concepto a lo largo del texto, representaciones gráficas y simbólicas utilizadas, problemas y ejercicios resueltos o propuestos, así como ciertos aspectos materiales de los libros de texto que determinan la presentación del concepto.

**Cuadro 1**

Análisis conceptual	Análisis didáctico-cognitivo	Análisis fenomenológico
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Secuenciación de contenidos.</li> <li>• Definiciones: tipo y papel que desempeñan en el texto.</li> <li>• Ejemplos y ejercicios.</li> <li>• Representaciones gráficas y simbólicas.</li> <li>• Aspectos materiales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Objetivos e intenciones del autor (expresadas habitualmente en el prólogo).</li> <li>• Teorías de enseñanza-aprendizaje subyacentes.</li> <li>• Capacidades que se quieren desarrollar.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• En torno a las propias matemáticas.</li> <li>• En torno a otras ciencias.</li> <li>• Fenómenos de la vida diaria.</li> </ul>

*Análisis didáctico-cognitivo*, que se refiere tanto a la explicitación de los objetivos que los autores pretenden conseguir como al modo en el que se intenta que el alumno desarrolle ciertas capacidades cognitivas (Duval, 1995).

*Análisis fenomenológico*, que se caracteriza por los fenómenos que se toman en consideración con respecto al concepto en cuestión, en nuestro caso el de continuidad. Aquí se considera el análisis fenomenológico didáctico, en el que intervienen los fenómenos que se proponen en las secuencias de enseñanza que aparecen en los libros analizados (Puig, 1997).

Sin lugar a dudas, las concepciones epistemológicas de los autores acerca del conocimiento matemático están relacionadas con el modo de transmisión de dicho conocimiento y van a determinar qué tipo de capacidades se pretenden desarrollar en los alumnos, por lo que, a veces, es inevitable mezclar componentes epistemológicos y cognitivos en este análisis. Esto mismo sucederá con el análisis cognitivo y fenomenológico.

## RESULTADOS

Vamos a presentar los resultados de cada uno de los periodos considerados de acuerdo con el análisis conceptual, cognitivo y fenomenológico que hemos llevado a cabo según el esquema anterior. No obstante, en lo que se refiere al conceptual, aunque en la investigación original (Sierra, González y López, 1997) se cubrieron ampliamente los cinco aspectos considerados, aquí, por razones de extensión, nos limitaremos a las definiciones y a las representaciones gráficas y simbólicas.

## 1. DESDE LA TERMINACIÓN DE LA GUERRA CML HASTA LA INTRODUCCIÓN DE LA MATEMÁTICA MODERNA EN LOS INSTITUTOS DE BACHILLERATO (1940-1967)

Durante este periodo estuvieron vigentes dos planes de estudio: el de 1938 que se promulga durante la Guerra Civil y el de 1953. En el cuadro 2 se presentan las características más destacadas de estos planes de estudio. El concepto de continuidad aparece en los programas de 6º curso de bachillerato.

Los cinco libros se han dividido en dos bloques (véase el cuadro 3).

**Cuadro 2**

Plan	Edad de acceso	Etapas	Orientación general	Asignaturas de matemáticas
1938	10 años	Bachillerato (7 años)	Científico humanístico	7 cursos de carácter cíclico
		Examen de acceso a la universidad		
1953	10 años	Bachillerato elemental (4 años)	General	4 cursos
		Bachillerato superior (2 años)	Ciencias o letras	2 cursos
		Curso preuniversitario. Prueba de acceso a la universidad		1 curso

**Cuadro 3**

Bloque A	Bloque B
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Fernández de Castro, M. y Jiménez Jiménez, J. L., <i>Matemáticas. Preparación del examen de estado</i>, Escelicer, Cádiz-Madrid. (sin fecha, anterior a 1955).</li> <li>• Bruño, <i>Matemáticas 6º curso</i>, Ediciones Bruño, Madrid, 1968.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A., <i>Matemáticas. 6º curso de bachillerato</i>, Los autores, Madrid, 1950.</li> <li>• Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A., <i>Matemáticas. 5º curso de bachillerato</i>, Los autores, Madrid, 1968a.</li> <li>• Ríos, S. y Rodríguez San Juan, A., <i>Matemáticas. 6º curso de bachillerato</i>, Los autores, Madrid, 1968b.</li> </ul>

Hay una clara evolución en la secuencia de los contenidos desde el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez, donde se utiliza un lenguaje de variables, hasta los libros de Rodríguez San Juan y Sixto Ríos, donde el lenguaje de funciones aparece explícito. En los libros del bloque B, hay un cambio sustancial en la presentación; el concepto de continuidad se encuentra, junto con el de límite, en una lección dedicada a funciones, ambos conceptos se desarrollan desligados del concepto de variable. Se trata primero el concepto de límite; la definición se da por sucesiones y, a partir de este concepto, se define la continuidad.

A continuación se presentan los resultados más destacados en cada una de las tres dimensiones.

### **1.1. Análisis conceptual**

#### **a) Definiciones**

En el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez aparece la definición de límite de variable aplicada al caso de sucesiones, por lo que se mezclan los conceptos de variable y de sucesión (Sierra, González y López, 1999). Para definir la continuidad, como no se ha dado explícitamente la definición de límite de una función en un punto, hay que utilizar otro lenguaje, en este caso, el lenguaje de los incrementos. La definición es la siguiente:

Se dice que una función es continua en el punto  $a$  (es decir, cuando  $x = a$ ) si al tender  $x$  a  $a$  los dos incrementos tienden a cero. Si esto no se verifica la función se dice discontinua.

En Bruño (1968) se da la definición de límite utilizando el lenguaje de sucesiones y, a partir de ahí, la definición de función continua en un punto, aunque retoma el lenguaje de los incrementos y llega a la siguiente conclusión:

La condición necesaria y suficiente para que una función sea continua en un punto, es que al tender a 0 el incremento de la variable tomado a partir de ese punto tienda también a cero el incremento de la función.

Se observa en este autor una tendencia hacia un nuevo lenguaje en las definiciones, pero sin perder el lenguaje anterior.

Por su parte, Rodríguez San Juan y Sixto Ríos presentan la noción de continuidad de modo intuitivo y, a continuación, dan la definición clásica mediante el límite, que traducen inmediatamente a la forma métrica y posteriormente al lenguaje de incrementos.

## **b) Representaciones gráficas y simbólicas**

*Representaciones gráficas.* En los libros del bloque A las representaciones gráficas son muy escasas, se limitan a representar el caso de una función continua y diferentes casos de discontinuidades.

En los libros del bloque B hay un aumento notable de representaciones gráficas, para ejemplificar las propiedades de las funciones continuas y la discontinuidad. Las representaciones gráficas empleadas son cartesianas.

*Representaciones simbólicas.* Las notaciones que se utilizan en los libros del bloque A están asociadas con la idea de variable. Las variables se representan con las letras minúsculas del abecedario y los infinitésimos con las letras griegas correspondientes a las utilizadas para las variables. Se utiliza el símbolo  $\infty$  para representar el infinito y esto ocurrirá de aquí en adelante en todos los libros analizados. También se tratan órdenes de infinitésimos e infinitésimos equivalentes.

En los libros del bloque B aparece la simbolización moderna del límite y, por lo tanto, de la continuidad.

En todos los libros, excepto en el de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez, aparece la notación clásica de continuidad que utiliza el límite. Se usa la letra griega  $\Delta$  para simbolizar los incrementos.

## **1.2. Análisis didáctico-cognitivo**

En el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez los conceptos tienen un carácter esencialmente instrumental declarado por los autores al comienzo de las lecciones correspondientes al límite. Este carácter instrumental está presente en los otros libros estudiados. Además, hay que resaltar el carácter cíclico de los contenidos. La idea que subyace en todos estos libros es la de una matemática ya elaborada que el alumno debe memorizar y practicar resolviendo ejercicios.

Las capacidades que se pretenden desarrollar en el alumno son: memorización de definiciones y propiedades mediante alguna práctica algorítmica, con cierta excepción en los ejercicios planteados.

### 1.3. *Análisis fenomenológico*

En general, los libros analizados sólo hacen referencia a aspectos matemáticos cuando presentan los conceptos de límite y continuidad. Sin embargo, en el libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez (s.f.), cuando se trata el concepto de variable, se hace alguna referencia a fenómenos naturales como: hora del día, estación del año y situación meteorológica. Se puede asegurar que los conceptos de límite y continuidad son concebidos como una preparación para la derivada.

## 2. INTRODUCCIÓN DE LA MATEMÁTICA MODERNA: 1967-1975

Como es bien conocido, a comienzos de los años sesenta triunfó en casi todo el mundo occidental la enseñanza de las llamadas “matemáticas modernas”. En el caso español, en 1962 se constituyó la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media, la cual editó, en los años 1967 y 1969, textos piloto para el 5º y 6º cursos de bachillerato, respectivamente, textos que se convirtieron, de hecho, en el nuevo programa de matemáticas que progresivamente se fue implantando en el Bachillerato. Los fundamentos de estos textos piloto son la teoría de conjuntos y las estructuras de las matemáticas en sentido bourbakista, es decir, las estructuras algebraicas, de orden y topológicas (Rico y Sierra, 1994, 1997).

En cuanto a la continuidad, en dichos textos piloto, en el correspondiente al 5º curso, se hace una breve introducción en el capítulo dedicado a funciones de variable real y, en el de 6º curso, en un capítulo titulado de igual manera, se profundiza en este concepto, prevaleciendo el punto de vista topológico.

Los nueve libros analizados se han dividido en tres bloques que representan tres tendencias observadas en este periodo. Junto al nuevo paradigma (la matemática moderna) que surge como una nueva revolución, sigue coexistiendo el antiguo. Así, los libros del bloque A siguen el modelo de la etapa anterior; los del bloque B suponen una ruptura que presenta las nuevas ideas acerca de las matemáticas; los del bloque C introducen la matemática estructural y axiomática, pero a la vez proponen actividades para el alumno, y las explicaciones se apoyan en ellas.

**Cuadro 4**

Bloque A	Bloque B	Bloque C
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Sin autores, <i>Matemáticas sexto curso</i>, Edelvives, Zaragoza, 1972 (aprobado por OM 23-02-68).</li> <li>• Segura, S., <i>Matemáticas 6º curso</i>, ECIR, Valencia, 1974.</li> <li>• Tuduri, J. y Casals, R., <i>COU Matemáticas especiales</i>, Vimasa, Terrasa, 1974.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Abellanas, P., García Rúa, J., Rodríguez Labajo, A., Causulleras Regás, J. y Marcos de Lanuza, F., <i>Matemática Moderna. Quinto curso</i>, MEC, Madrid, 1967.</li> <li>• Abellanas, P., García Rúa, J., Rodríguez Labajo, A., Causulleras Regás, J. y Marcos de Lanuza, F., <i>Matemática Moderna. Sexto curso</i>, MEC, Madrid, 1969.</li> <li>• Marcos de Lanuza, F., <i>Matemáticas 5º curso</i>, G. del Toro, Madrid, 1972a.</li> <li>• Marcos de Lanuza, F., <i>Matemáticas COU optativa</i>, G. del Toro, Madrid, 1972b.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Agustí, J. M. y Vila, A., <i>Matemáticas 6º Bachillerato</i>, vol. 2, Vicens Vives, Barcelona, 1973.</li> <li>• Marcos, C. y Martínez, J., <i>Matemáticas generales COU</i>, SM, Valencia, 1973.</li> </ul>

**2.1. Análisis conceptual**

**a) Definiciones**

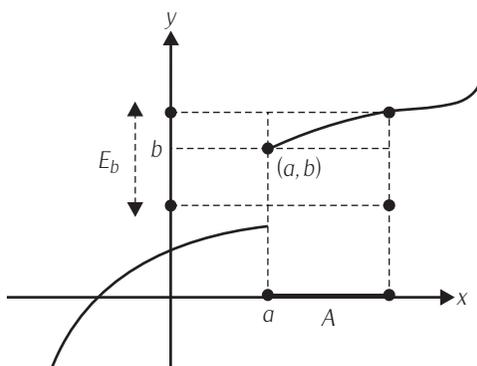
En los tres textos del bloque A la definición de continuidad es posterior a la del límite y se apoya en ella, utilizando el lenguaje de los incrementos. En el bloque B aparecen mezcladas ambas definiciones, con predominio de la visión topológica. Finalmente, en el bloque C cada uno de los dos autores sigue un criterio diferente: Marcos y Martínez dan la definición clásica, la topológica y la métrica, aunque trabajan preferentemente con la última y, en Agustí y Vila, se trabaja con la definición topológica. La idea intuitiva de continuidad está presente en todos los bloques y en todos los autores, bien como punto de partida, bien como conclusión.

Por ejemplo, en los textos piloto (bloque B) aparece la siguiente definición:

*Diremos que una función  $f(x) = y$  tiene por límite  $b$  para  $x = a$ , cuando para todo entorno  $E_b$  del punto  $b$ , se verifica  $f^{-1}(E_b) = E_a - a$ , o bien,  $f^{-1}(E_b) = E_a$ .*

En el segundo caso, además de tener límite la función en  $x = a$ , diremos que es continua en dicho punto.

Para la discontinuidad, además de presentarla de modo intuitivo, se da la definición negativa por entornos como se observa en la gráfica 1.



Gráfica 1

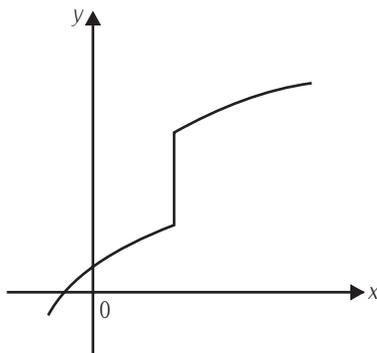
Como podemos ver, la gráfica de la función “está partida”, este concepto de estar partida podemos expresarlo de forma matemática mediante los entornos del punto  $b$ , observando que en este caso hay entornos  $E_b$  del punto  $b$  tales que  $f^{-1}(E_b) = A$ , siendo  $A$  un conjunto de puntos que no es un entorno del punto  $a$ .

## b) Representaciones gráficas y simbólicas

*Representaciones gráficas.* Aparecen tablas cartesianas y otras representaciones estrechamente ligadas al tipo de definición que se utiliza. En cuanto a las tablas, en el libro de Agustí y Vila (bloque C) al considerar la definición topológica de continuidad, las tablas de valores de la función se usan para comprobar que se verifica o no dicha definición para casos particulares.

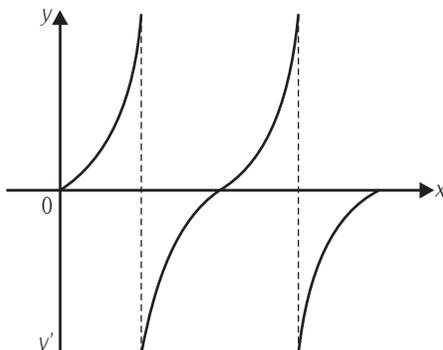
Las gráficas cartesianas aparecen en todos los libros analizados, algunas de ellas incluso realizadas a mano alzada, presentando las características que interesa resaltar. Sin embargo, el único libro que clasifica las discontinuidades es el de Edelvives (bloque A), que considera tres tipos:

- Salto brusco finito (gráfica 2).



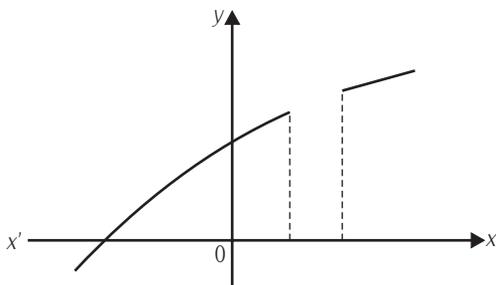
Gráfica 2

- Salto brusco infinito (gráfica 3).



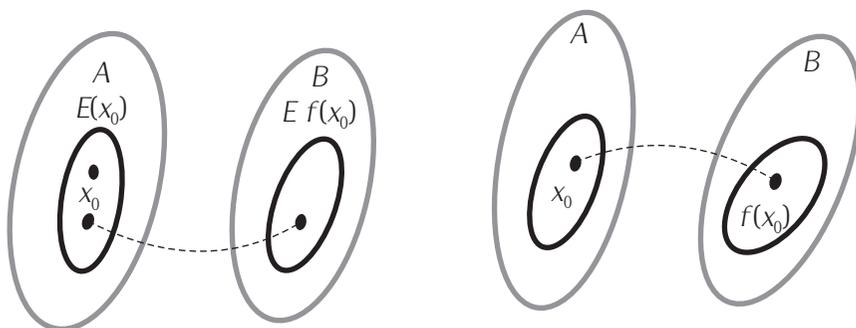
Gráfica 3

- Por tomar la función valores imaginarios (gráfica 4).



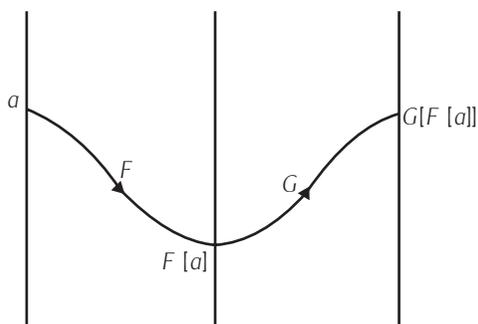
Gráfica 4

Además, hay otros tipos de representaciones gráficas como diagramas de Venn (Marcos y Martínez, 1973). (Véase la gráfica 5.)



Gráfica 5

Asimismo, se usa la recta numérica (Agustí y Vila, 1973) al tratar la continuidad de la función compuesta (gráfica 6).



Gráfica 6 Fuente: Agustí y Vila, p. 220.

*Representaciones simbólicas.* Todos los libros, excepto Agustí y Vila (bloque C) utilizan la notación  $\lim_{x \rightarrow f} f(x)$  y la simbolización empleada está en estrecha relación con la que se utiliza para el límite. Hay que destacar que en los libros del bloque A se usa la simbolización de incrementos en consonancia con las definiciones dadas en ese lenguaje, asimismo, se utilizan los infinitésimos. Los incrementos desaparecen casi por completo en los libros de los bloques B y C.

## **2.2. Análisis didáctico-cognitivo**

Cada uno de los tres bloques pretende desarrollar capacidades diferentes en los alumnos. Los libros del bloque A siguen el modelo de la etapa anterior y las capacidades que pretenden desarrollar son: aprendizaje memorístico de las definiciones y aplicación de estas definiciones a la resolución de ejercicios.

Los libros del bloque B significan la introducción de la matemática moderna en el bachillerato, rompiendo con la tradición anterior. Esta ruptura se ve reflejada en que los conjuntos y las aplicaciones son los cimientos sobre los que se pretende construir el edificio de las matemáticas, y las estructuras constituyen las herramientas para construir dicho edificio. Además, la orientación topológica de la continuidad es justamente la defendida por los pioneros de la reforma de la enseñanza de las matemáticas, de acuerdo con las ideas bourbakistas. Esta orientación se presenta también en los otros dos libros de este bloque. Las capacidades que se pretenden desarrollar son: adquisición de las formas de hacer matemáticas con el nuevo lenguaje, el conocimiento de la definición de continuidad en este lenguaje y las aplicaciones de las definiciones a la resolución de ejercicios relacionados con la continuidad.

La corriente de la matemática moderna está presente claramente en los libros del bloque C. Se advierte un cierto cambio en estos autores sobre la enseñanza de las matemáticas, ya que se empieza a considerar al alumno como sujeto que aprende, tratando de explicar este aprendizaje desde las teorías piagetianas. En cuanto a las capacidades que se pretenden desarrollar, mientras que en el libro de Marcos y Martínez (1973) se pretende que el alumno aprenda memorísticamente las definiciones, que se acostumbre al mecanismo de las demostraciones inductivas y realice numerosos ejercicios, en el libro de Agustí y Vila (1973) se pretende que el alumno vaya construyendo, de una manera dirigida, los distintos conceptos, que entrevea algunas demostraciones y realice numerosos ejercicios.

## **2.3. Análisis fenomenológico**

En todos los libros analizados no hay referencias a situaciones o fenómenos de otras ciencias distintas de las matemáticas. La matemática se encierra en sí misma y se explica por ella misma; incluso, desaparecen las interpretaciones y los problemas en sentido geométrico de la época anterior. Insistimos en el predominio de la visión topológica en el caso de la continuidad. Incluso al tratar discon-

tinuidad de una función, la idea de estar partida, más que una idea intuitiva, es una idea que se utiliza para reafirmar el uso de los entornos.

En definitiva, todos los libros analizados reflejan un cierto espíritu de la época en cuanto a la concepción de las matemáticas, lo que va a marcar toda una generación de profesores y alumnos que transmitirán y asimilarán, respectivamente, unas matemáticas sin conexión con otras ciencias y fenómenos.

Es interesante resaltar que, aunque los promotores de la reforma, Papy y Dieudonné, entre otros, señalan que las matemáticas están por todas partes y que son un instrumento para comprender la realidad, en escasas ocasiones, en sus obras dedicadas a la enseñanza, aparecen las matemáticas para interpretar fenómenos de otras ciencias. Igual sucederá en el caso español en los libros de texto de este periodo, lo que va a marcar toda una generación de profesores y alumnos que transmitirán y asimilarán, respectivamente, unas matemáticas sin conexión con otras ciencias y fenómenos.

### **3. DESARROLLO DEL PLAN DE ESTUDIOS DE BACHILLERATO UNIFICADO Y POLIVALENTE (BUP) Y DEL CURSO DE ORIENTACIÓN UNIVERSITARIA (COU): 1975-1995**

En el año 1970 se aprobó la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa (LGE) en la que se estableció el Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) y el Curso de Orientación Universitaria (COU) necesario para tener acceso a estudios universitarios. El nuevo bachillerato tenía una duración de tres cursos (alumnos de 14-17 años); sin embargo, hasta el año 1975 no se estableció el currículo para el nuevo bachillerato y para el Curso de Orientación Universitaria. El cuadro 5 muestra la estructura del plan de estudios.

Se han analizado trece libros en este periodo distribuidos en cuatro bloques (véase el cuadro 6).

Los libros del bloque A continúan en la línea iniciada en el periodo anterior, por lo que no exponemos los resultados. En los libros del bloque B, se impone la tendencia de la matemática moderna. El bloque C está formado por un único libro, el del Grupo Cero de Valencia. Los libros del bloque D, aunque desarrollan el plan de estudios del Bachillerato del año 1975, están influidos por las nuevas corrientes en didáctica de la matemática que, en el caso español, cristalizarán en un nuevo plan de estudios derivado de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990, a la que nos referiremos posteriormente.

**Cuadro 5**

Plan	Edad de acceso	Etapas	Orientación general	Asignaturas de matemáticas	
1975	14 años	BUP (3 años)	General	Matemáticas 1 <sup>o</sup>	
			General	Matemáticas 2 <sup>o</sup>	
			Materias comunes, optativas y técnico-profesionales	Matemáticas 3 <sup>o</sup> (optativa)	
		COU	Hasta 1987	Opción A	Optativa
				Opción B	Obligatoria
			Desde 1987	Opción A (científico-técnica)	Matemáticas I (obligatoria)
				Opción B (biosanitaria)	Matemáticas I (optativa)
				Opción C (ciencias sociales)	Matemáticas II (obligatoria)
				Opción D (humanístico-lingüística)	Matemáticas II (optativa)
			Examen de acceso a la universidad		

### 3.1. *Análisis conceptual*

#### a) *Definiciones*

Todos los libros del bloque B comienzan con la definición clásica de continuidad, es decir, a través del límite, dando posteriormente la métrica (Etayo *et al.*, 1977, y Anzola *et al.*, 1976) y la topológica (Boadas *et al.*, 1976, y Anzola *et al.*, 1976). En estos libros aparece la idea intuitiva de que una función es continua si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Solamente Boadas (1976) define la continuidad a la derecha y a la izquierda. Boadas *et al.* (1976), Anzola *et al.* (1976) y Lazcano *et al.* (1993) hacen una clasificación de las discontinuidades evitables, de primera especie y segunda especie, finita e infinita.

Cuadro 6

Bloque A	Bloque B	Bloque C	Bloque D
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Marcos de Lanuza, F., <i>Matemáticas 2º BUP</i>, G. del Toro, Madrid, 1978.</li> <li>• Marcos de Lanuza, F., <i>Matemáticas especiales, COU</i>, G. del Toro, Madrid, 1976.</li> <li>• Agustí, J. M. y Vila, A., <i>Matemáticas. Vectores, 2º BUP</i>, Vicens Vives, Barcelona, 1976</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Guillén, J., Navarro, R., Peña, J. A., y Ferrer, S., <i>Matemáticas 2º Bachillerato</i>, Magisterio, Madrid, 1976.</li> <li>• Boadas, J., Romero, R., y Villalbí, R., <i>Matemáticas 2º curso de BUP</i>, Teide, Barcelona, 1976.</li> <li>• Etayo, J., Colera, J. y Ruíz, A., <i>Matemáticas 2º de BUP</i>, Anaya, Salamanca, 1977.</li> <li>• Anzola, M., Caruncho, J. y Gutiérrez, M., <i>Matemáticas 2º de Bachillerato</i>, Santillana, Madrid, 1976.</li> <li>• Lazcano, I. y Barolo, P., <i>Matemáticas 2º BUP</i>, Edelvives, Madrid, 1993.</li> <li>• Álvarez, F., García, C., Garrido, L. M. y Vila, A., <i>Matemáticas. Factor 2</i>, Vicens Vives, Barcelona, 1992.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Grupo Cero, <i>Matemáticas de bachillerato. Volumen 2</i>, Teide, Barcelona, 1985.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hernández, F., Lorenzo, F., Martínez, A., y Valés, J., <i>Signo II. Matemáticas 2º Bachillerato</i>, Bruño, 1989.</li> <li>• Colera, J. y Guzmán, M., <i>Bachillerato. Matemáticas 2</i>, Anaya, Madrid, 1994.</li> <li>• Guzmán, M. y Colera, J., <i>Matemáticas I COU</i>, Anaya, Madrid, 1989.</li> </ul>

En el libro del Grupo Cero (que constituye el bloque C) no hay ningún capítulo especial dedicado a la continuidad; en el capítulo dedicado a gráficas, aparece por vez primera la idea intuitiva de discontinuidad ligada a un fenómeno natural: la ocultación por Io, uno de los trece satélites conocidos de Júpiter, de

la estrella Beta Scorpi C, muestra la gráfica del brillo de la estrella, antes, durante y después de la ocultación. Posteriormente, menciona la idea de discontinuidad al estudiar la gráfica de una función en escalera. Este libro dedica un apéndice a la formalización de los conceptos de límite y continuidad, dando la definición topológica de continuidad y la definición mediante el límite.

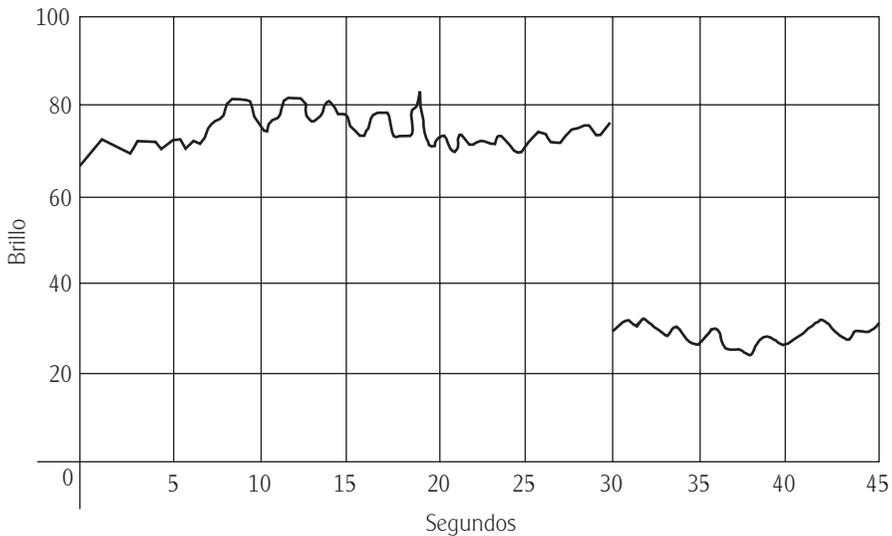
En cuanto a los libros del bloque D, Guzmán y Colera (1989) y Hernández *et al.* (1989) en segundo curso de bachillerato, hacen una introducción intuitiva de la idea de discontinuidad y continuidad, basándose en la gráfica de la función e incorporando, en el caso de Hernández *et al.*, la definición por límite y la métrica. Estas dos definiciones, junto con la topológica, son las utilizadas en el libro de COU, de Guzmán y Colera (1994).

## b) Representaciones gráficas y simbólicas

*Representaciones gráficas.* Se ha detectado un aumento considerable de representaciones gráficas respecto del periodo anterior. Gráficas cartesianas aparecen en todos los libros, en ellas se representan tanto funciones continuas como discontinuas, las más habituales son: rectas, parábolas, hipérbolas, logarítmicas, cocientes de polinomios, escalonadas, definidas a trozos. Estas gráficas se utilizan como apoyo a la definición intuitiva de continuidad, aunque difieren grandemente de un libro a otro.

Destaca por su peculiaridad la gráfica que aparece en el libro del Grupo Cero que indica el brillo combinado de la estrella Beta Scorpii C y de Io en un intervalo de tiempo que comprende 30 segundos antes de la ocultación hasta 15 segundos después de que ésta tuviera lugar (véase la gráfica 7).

*Representaciones simbólicas.* Las representaciones simbólicas son muy abundantes a comienzo del periodo considerado, el lenguaje de  $\epsilon$  y  $\delta$  está consolidado y aparecen por doquier símbolos, subíndices, valores absolutos, flechas, etc., aunque en ninguno de los libros aparecen los símbolos de los cuantificadores. Todos los libros utilizan la notación  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . El uso del lenguaje de entornos o del valor absoluto viene determinado por el peso que conceden los autores a las definiciones topológica o métrica en sus respectivos textos. Sin embargo, al final del periodo, los autores tienen una tendencia a la simplificación del simbolismo.



Gráfica 7

### 3.2. Análisis didáctico-cognitivo

En los prólogos de los libros del bloque B, los respectivos autores expresan sus intenciones, las cuales son coincidentes en todos ellos. La idea predominante es la de presentar las matemáticas desde la corriente de la matemática moderna, con rigor pero “al mismo tiempo evitar en un excesivo rigorismo que haría ininteligibles las citadas cuestiones para los alumnos de esta edad” (Anzola *et al.*, 1976) o “con el lenguaje y el rigor necesarios pero al mismo tiempo viables para los alumnos” (Boadas *et al.*, 1976). Sin embargo, a nuestro juicio, el rigor se mantiene a lo largo de los textos, hay una distancia entre los propósitos expresados por los autores y su concreción al presentar el concepto de continuidad. El método predominante para conseguirlo es presentar múltiples y variados ejemplos y ejercicios intercalados en el texto. Las capacidades que se pretende desarrollar son las siguientes: aprendizaje de las definiciones, no sólo desde el punto de vista verbal sino simbólico; manipulación de símbolos, reglas lógicas, conocimiento del método deductivo, adquisición de las herramientas necesarias para la resolución de ejercicios y comprensión de algunas propiedades fundamentales. En COU se tratará de consolidar estas habilidades.

En cuanto al libro del Grupo Cero (1985), sus planteamientos indican que el aprendizaje debe predominar sobre la enseñanza. Las teorías constructivistas del aprendizaje subyacen en las ideas de este grupo; además, estas ideas influirán en la configuración del currículo oficial actualmente vigente. Por ello, se trata de que sea el alumno el que investigue, conjeture y rectifique, si es preciso, para alcanzar el conocimiento, y la labor del profesor es la de gestionar el aprendizaje. Por esto, el libro no busca señalar un programa, sino aportar materiales para el trabajo de los alumnos. En palabras de los autores, “en una clase activa de matemáticas, la tarea primordial es hacer matemáticas, es decir, matematizar”. Y entienden hacer matemáticas como la actividad intensa del alumno para estudiar diversos fenómenos con los conceptos matemáticos que sirven para organizarlos e interpretarlos. A través de estos planteamientos, se pretende desarrollar en los alumnos capacidades inéditas hasta este momento en los libros de texto, como son inducir, conjeturar, experimentar, analizar, rectificar los propios errores y sintetizar, bajo la tutela del profesor.

Aunque en los libros del bloque D se sigue desarrollando el plan de estudios de 1975, hay en ellos un enfoque distinto, ya que, como se ha dicho anteriormente, participan de las ideas derivadas de la LOGSE. Así, en estos libros observamos las siguientes características:

- a) Importancia concedida a la motivación, ya que “los conceptos matemáticos surgen de modo natural del deseo de explorar cuantitativamente la realidad” (Guzmán y Colera, 1989, prólogo).
- b) El apoyo en la historia de las matemáticas y en sus aplicaciones.
- c) La presentación intuitiva de los conceptos antes de su desarrollo formal.
- d) La actividad intensa de los alumnos a través de la realización de numerosos ejercicios y problemas, los cuales son de diferentes tipos.
- e) La conexión con la realidad y con otras ciencias, que se manifiesta en la presentación de diversos fenómenos que se pueden organizar desarrollando los conceptos matemáticos.
- f) El énfasis puesto en los procedimientos de resolución de problemas.
- g) La incorporación de apoyos didácticos como resúmenes, utilización de la calculadora, orientación en el uso de herramientas matemáticas y ejercicios de autoevaluación.
- h) La presentación de anécdotas, hechos curiosos y llamativos para resaltar el aspecto social, lúdico y cultural de las matemáticas.

Las capacidades que se pretenden desarrollar son, entre otras: aprendizaje comprensivo de la definición partiendo de las intuiciones hasta llegar a su formalización, desarrollo de estrategias de pensamiento (experimentar, observar, buscar pautas y regularidades, formular conjeturas, demostrar), comprensión, interpretación y predicción de ciertos fenómenos y reconocimiento de la aplicabilidad de las matemáticas a otras ciencias.

Todo esto configura una nueva generación de libros de texto donde se notan las influencias de ciertas corrientes de la didáctica de la matemática como la fenomenología didáctica, el aprendizaje por descubrimiento y la resolución de problemas.

### 3.3. *Análisis fenomenológico*

En los libros del bloque B casi no hay referencias a fenómenos propios de otras ciencias distintas de las matemáticas, si hacemos excepción de un ejemplo que aparece en Etayo y Colera (1977) que relaciona la temperatura  $T$  de un gas con la potencia  $P$  con la que trabaja una máquina y dos situaciones que presenta el libro de Lazcano y Barolo (1993), la primera referida a la energía consumida por una lámpara en función del tiempo que permanece encendida, y la segunda al gasto de teléfono en función de los pasos. En el libro de Álvarez *et al.* (1992) aparece una situación para ilustrar la discontinuidad referente al cambio de velocidad de un móvil por efecto de un choque y otra situación referida a la capacidad de botellas de vino para ejemplificar una discontinuidad de tipo salto.

El texto del Grupo Cero (1985) se desarrolla de acuerdo con la aproximación fenomenológica de Freundenthal, incluso en el prólogo del libro se hace la siguiente cita de este autor: “la mentalidad matemática se expresa en la tendencia a matematizar las matemáticas. Por supuesto que los estudiantes deben aprender a matematizar situaciones reales. Matematizar situaciones matemáticas puede ser el final, pero no el comienzo. Para muchos, el objetivo de la enseñanza de las matemáticas es introducir a los muchachos en un sistema de matemáticas, sistema que, innegablemente, irradia encanto estético, el cual, sin embargo, no puede ser captado por personas que no tengan un profundo conocimiento de las matemáticas.” Hay, por consiguiente, a nuestro juicio, una diferencia profunda con el resto de los autores, todos hablan de hacer matemáticas, pero esta idea difiere esencialmente desde la perspectiva que la considera el Grupo Cero y desde la perspectiva en que la consideran los demás. Mientras que los autores anterior-

mente analizados se “encierran” en la misma matemática como ciencia y, para ellos, eso es hacer matemáticas, el Grupo Cero, siguiendo las ideas de Freudenthal, parte de una serie de fenómenos, de la física, economía, etc., que matematisan. En palabras de los mismos autores: “no tratan de desarrollar un cuerpo de ideas matemáticas y sólo después introducir varias aplicaciones, sino que las aplicaciones deben surgir de un modo natural, alejando la posibilidad de toda separación ficticia entre teoría y práctica”. Por ello, se rompe la secuencia ejemplo-definición-propiedades-ejercicios, convirtiéndola en: presentación de diversos fenómenos-análisis de estos fenómenos-introducción del concepto organizador-nuevos fenómenos-ejercicios.

En los libros del bloque D se presentan algunas situaciones relacionadas con otras ciencias. Así, por ejemplo, en el libro de Colera y Guzmán (1994) se considera una situación relacionada con un depósito de agua a partir de la cual se construye una función continua. Hemos observado que este libro presenta diversos fenómenos en relación con el límite, tendencia que no sigue en la continuidad.

#### **4. LIBROS DE TEXTO DEL BACHILLERATO LOGSE: 1995-2000**

Durante la década de los años ochenta se produjo un amplio debate sobre la reforma educativa en España que culminó con la aprobación y promulgación en 1990 de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE). Esta ley establece una nueva etapa de 12 a 16 años denominada Educación Secundaria Obligatoria (ESO). El bachillerato se reduce a dos años de duración, que se cursarán como regla general entre los 16 y 18 años y se suprime el Curso de Orientación Universitaria. Se han establecido cuatro modalidades de bachillerato: artes, ciencias de la naturaleza y de la salud, tecnología, humanidades y ciencias sociales. El cuadro 7 muestra la estructura del plan de estudios.

Algunas de las consideraciones que se hacen en el decreto ministerial que desarrolla el currículo para las asignaturas de matemáticas I y II son las siguientes:

- a) Participar en el conocimiento matemático consiste más que en la posesión de los resultados finales de esta ciencia, en el dominio de su “forma de hacer”.
- b) La adquisición del conocimiento matemático es un proceso lento, laborioso, cuyo comienzo debe ser una prolongada actividad sobre elementos

Cuadro 7

Plan	Edad de acceso	Etapas	Modalidades	Asignaturas de matemáticas	
1995	16 años	Bachillerato	Ciencias de la naturaleza y de la salud	Matemáticas I (obligatoria)	
				Matemáticas II	Opción de ciencias e ingeniería (obligatoria)
					Opción de ciencias de la salud (optativa)
			Tecnología	Matemáticas I (optativa)	
				Matemáticas II (optativa)	
			Humanidades y ciencias sociales	Matemáticas I aplicadas a las ciencias sociales	Opción ciencias sociales (obligatoria)
					Opción humanidades (optativa)
				Matemáticas II aplicadas a las ciencias sociales	Opción ciencias sociales (optativa)
					Opción humanidades (optativa)
			Artes	Matemáticas de la forma (optativa)	
Pruebas de acceso a la universidad (PAUS)					

concretos, con objeto de crear intuiciones que son un paso previo al proceso de formalización.

- c) Los aspectos conceptuales no son los únicos elementos que están presentes en la actividad matemática; a menudo, no son más que pretextos para la puesta en práctica de procesos y estrategias y sirven para incitar a la exploración y a la investigación.

De acuerdo con estas consideraciones, en el bachillerato se desarrollarán capacidades tan importantes como la abstracción, el razonamiento en todas sus vertientes, la resolución de problemas, la investigación y el análisis y compren-

sión de la realidad. Las matemáticas en el bachillerato deben desempeñar un triple papel: instrumental, formativo y de fundamentación teórica.

El nuevo bachillerato comenzó a impartirse de modo generalizado en el curso 1997-1998 y aún continúa impartándose el antiguo BUP en algunos centros no estatales. Además, en enero de 2001 apareció un nuevo Decreto ministerial sobre el currículo del Bachillerato que entrará en vigor en el curso 2001-2002. Durante estos años, observamos distintos fenómenos en la producción de libros de texto. Por un lado, algunas editoriales “clásicas” (Anaya, Santillana, Vicens-Vives, SM) en general han “maquillado” los libros del periodo anterior, que ya hemos analizado, adaptándolos al nuevo bachillerato. Por otro, editoriales dedicadas tradicionalmente a la educación básica (Edebé, Everest) han comenzado a publicar textos para ESO y bachillerato. También, editoriales tradicionalmente dedicadas a la enseñanza universitaria (McGraw-Hill) están elaborando libros para el bachillerato. Además, debido al nuevo decreto de currículo de bachillerato, se anuncian para el curso 2001-2002 nuevos libros de texto. Por estas razones, las consideraciones que se hacen a continuación están marcadas por las circunstancias en las que se desarrolla este periodo.

Hemos analizado los manuales siguientes, todos ellos correspondientes a editoriales “clásicas”:

- Grupo Azul 21, *Matemáticas 2, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*, Santillana, Madrid, 1997.
- Colera, J., Oliveira, M. J., Fernández, S. y Guzmán, M., *Matemáticas I (Bachillerato LOGSE)*, Anaya, Madrid, 1996.
- Colera, J., Oliveira, M. J. y Fernández, S., *Matemáticas 2 (Bachillerato LOGSE)*, Madrid: Anaya, 1997.
- Vizmanos, J. R. y Anzola, M., *Matemáticas I*, SM, Madrid, 1997.

En cuanto al *análisis conceptual*, en todos los libros hay temas específicos dedicados al límite y a la continuidad, donde la continuidad se desarrolla a partir de la idea de límite, aunque en Colera *et al.* (1996, 1997) y en el Grupo Azul 21 (1997) aparece la idea intuitiva de dibujar la función sin levantar el lápiz del papel y en Vizmanos y Anzola (1997) la idea de tasa de variación que recupera el concepto de incremento. Además, la definición métrica aparece en el segundo curso en todos los libros.

Las representaciones gráficas son superabundantes en los cinco libros analizados. Cada concepto va seguido de su interpretación gráfica y de ejemplos grá-

ficos que lo ilustran. Hay muchos gráficos cartesianos y un notable aumento de las tablas de valores, posiblemente debido a la introducción del límite por sucesiones. Además, en Vizmanos y Anzola (1997), se recuperan elementos de periodos anteriores como los diagramas de Venn, y se incorporan ciertos modos de los inicios de la matemática moderna, como las presentaciones tipo “película” que recuerdan las demostraciones por “películas” de Papy.

En relación con las representaciones simbólicas, hay una clara diferencia entre los libros. Mientras el Grupo Azul 21 (1997) utiliza un lenguaje simbólico abundante, Colera *et al.* (1996, 1997) y Vizmanos y Anzola (1997) suelen reducir el simbolismo. Así, el Grupo Azul 21 (1997) hace uso tanto de cuantificadores como de entornos y módulos, utilizando el lenguaje de  $\epsilon$  y  $\delta$ . La definición por  $\epsilon$  y  $\delta$  también aparece en Colera *et al.* (1996, 1997) y Vizmanos y Anzola (1997), sin utilizar simbólicamente los cuantificadores  $\exists$  y  $\forall$  y, en este último, reaparece la notación incremental.

En lo que se refiere al *análisis cognitivo*, todos los libros, excepto el de Matemáticas II de Colera *et al.* (1997), tienen un prólogo en el que los autores expresan sus intenciones. En los libros de Vizmanos y Anzola (1997) y Colera *et al.* (1996, 1997) se observa un intento de adaptación de los principios que inspiran el desarrollo curricular derivado de la LOGSE, lo que se manifiesta en dos direcciones: por un lado, se intenta dar significado a los conceptos, aproximándolos tanto a la realidad del alumno como al contexto histórico y cultural en el que han surgido; por otro, se incide en la resolución de problemas. Para estos libros son válidas las ocho características que señalábamos en el análisis cognitivo del periodo anterior, correspondientes al bloque D.

En el prólogo del libro del Grupo Azul 21 (1997), no se hace ninguna mención a la LOGSE; los autores manifiestan que: “hemos querido hacer un manual riguroso y útil[...] se ha cuidado mucho que resulte un libro adecuado para esta difícil travesía de la enseñanza media a la universidad”. Con estos presupuestos, se configura un texto que pone el énfasis en las definiciones y en las demostraciones. Aunque también, al final de cada tema, aparecen notas históricas que tratan de contextualizar los conceptos.

Este diferente tratamiento va a condicionar las capacidades que se pretenden desarrollar en el alumno. Así, mientras que en los libros de Vizmanos y Anzola (1997) y Colera *et al.* (1997), el énfasis está puesto en los procedimientos y en la comprensión de los conceptos, el libro del Grupo Azul 21 (1997) incide más en el aprendizaje deductivo y en los aspectos simbólicos y formales asociados a los conceptos de límite y de continuidad.

En cuanto al *análisis fenomenológico*, aunque en los cinco libros analizados hemos encontrado referencias tanto a situaciones de la vida diaria como a diversos fenómenos de la naturaleza, observamos una menor profusión que en el periodo anterior.

En el libro del Grupo Azul (1997) aparecen los siguientes fenómenos:

- Variación de la temperatura en el interior de la Tierra en función de la profundidad (función continua), y variación de la densidad del interior de la Tierra en función de la profundidad (función discontinua).

En Colera *et al.* (1997):

- El aumento que proporciona una lupa en función de la distancia de ésta al objeto.
- La temperatura del agua en función del tiempo que transcurre entre el momento en que entra en ebullición y el momento en el que pasa a temperatura ambiente.

Finalmente, en Vizmanos y Anzola (1997) se presentan los siguientes fenómenos:

- Costo de una llamada telefónica en función del tiempo (función escalonada).
- Crecimiento de una persona en función del tiempo (función continua).
- Aterrizaje de un avión (que proporciona una visión intuitiva del concepto de límite de una función).

Además, estos autores plantean situaciones estrictamente matemáticas en las que se utilizan distintos tipos de funciones; las más habituales son las polinómicas, racionales y escalonadas.

## CONCLUSIONES

Los planes de estudio, aunque no se han presentado pormenorizadamente, tienen las siguientes características señaladas en un artículo anterior (Sierra, González y López, 1999):

- El currículo oficial es cerrado hasta la última reforma derivada de la LOGSE.
- Su desarrollo no ha sido uniforme en cada una de las épocas; al analizar los libros de texto hemos demostrado las diferencias notables que existen entre ellos, a pesar de que en cada época deberían ajustarse a las disposiciones oficiales, y en una misma fecha coexisten libros de planes distintos.
- Existen “puntos de transición”: introducción de la matemática moderna y aprendizaje constructivista preconizado en la última reforma.
- Está influido por las corrientes internacionales.

En los libros de texto analizados en los diferentes periodos se presentan las siguientes características:

- Paso progresivo de los “libros de autor”, como los de Rodríguez San Juan, Sixto Ríos o Marcos de Lanuza, a los “libros de editoriales”, como Magisterio Español, SM, Anaya y Santillana.
- Son producto de cada época con su lenguaje y sus justificaciones; términos como *intuición*, *matematización*, *rigor*, *matemática aplicada* tienen distintos sentidos en cada uno de los periodos considerados, incluso en cada periodo de un libro a otro.
- Ciertos libros han sido precursores de los cambios relacionados con los puntos de transición de los programas oficiales, como los textos piloto o el libro del Grupo Cero.

El concepto de continuidad ha experimentado una evolución desde considerarlo ligado a los conceptos de función y límite hasta alcanzar entidad propia. Particularizando para cada periodo, hemos de destacar las siguientes conclusiones:

- En el primer periodo, inicialmente (hasta los años cincuenta) se dan definiciones en las que se mezcla el concepto de variable y el de función y se utiliza el lenguaje de incrementos para definir la continuidad y, posteriormente, con la clarificación del concepto de límite, se da una definición precisa de continuidad.
- Durante el periodo de la matemática moderna, casi todos los autores presentan previamente una idea intuitiva de continuidad y, posteriormente, se define a partir del límite; se pone el énfasis en una presentación formal y se utiliza la definición topológica.

- En el periodo 1975-1995 se rompe la tendencia anterior. Algunos autores comienzan con la continuidad y siguen con el límite y otros mezclan ambos conceptos. Además, se incorpora la definición métrica de continuidad, aunque se da también la noción intuitiva y otras definiciones y, en la última fase de este periodo, se hace énfasis en la presentación intuitiva relacionándola con situaciones de la vida diaria y fenómenos naturales.
- Finalmente, en el último periodo, quizás debido a la reducción del bachillerato a dos años, se observa una cierta “condensación” de los contenidos y, en particular, del de continuidad, con una tendencia, por parte de la mayoría de los autores, a dar mucha información en poco espacio.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. y M.A. Johsua (1982), “Un exemple d’analyse de la transposition didactique: La notion de distance”, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 3(1), pp. 159-239.
- Choppin, A. (1993), “L’histoire des manuels scolaires. Un bilan bibliométrique de la recherche française”, *Histoire de l’Éducation*, 58, pp. 165-185.
- Dormolen, J., Van (1986), “Textual analysis”, en B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (eds.), *Perspectives on Mathematics Education*, Dordrecht, Reidel, pp. 141-147.
- Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Berna, Peter Lang.
- Escolano, A. (dir.) (1997, 1998), *Historia ilustrada del libro escolar en España*, Madrid, Fundación Germán Sánchez Ruipérez.
- Howson, G. (1995), *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 texts*, Vancouver, Pacific Educational Press.
- Lowe, E. y D. Pimm (1996), “‘This is so’: a text on texts”, en A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.), *International Handbook on Mathematics Education*, Dordrecht, Reidel, pp. 371-410.
- Pimm, D. (1987), *Speaking mathematically*, Nueva York, Routledge y Kegan Paul. [versión en español: (1990), *El lenguaje matemático en el aula*, Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia-Ediciones Morata].

- Pimm, D. (1994), "Mathematics classroom language, form, function and force", en R. Bielher, R. W. Cholz, R. Sträber y B. Winkelmann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, Dordrecht, Kluwer, pp. 159-169.
- Puig, L. (1997), "Análisis fenomenológico", en L. Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Barcelona, ICE, Universidad de Salamanca-Horsori, pp. 61-94.
- Rico, L. y M. Sierra (1994), "Educación matemática en la España del siglo xx", en J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra, *Educación matemática e investigación*, Madrid, Síntesis.
- (1997), "Antecedentes del currículo de matemática", en L. Rico (ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*, Madrid, Síntesis.
- Sierra, M., M.T. González y C. López (1997), *Los conceptos de límite y continuidad en la educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos*, Salamanca, Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca (documento inédito).
- (1999), "Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU), 1940-1995", *Enseñanza de las Ciencias*, 17 (3), pp. 463-476.

## DATOS DE LOS AUTORES

---

### Modesto Sierra Vázquez

Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales,  
Universidad de Salamanca, España  
mosiva@usal.es

### María Teresa González Astudillo

Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales,  
Universidad de Salamanca, España  
maite@usal.es

### Carmen López Esteban

Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales,  
Universidad de Salamanca, España  
clopez@usal.es

- Schubring, G. (1986), "Rupture dans le statut mathématique des nombres négatifs", *Petit x*, núm 12.
- (1987), "On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook autor", *For the Learning of Mathematics*, 7(3), pp. 41-51.
- (1988), "Discussion epistemologique sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845", *Actes du Premier Colloque Franco-Allemand de Didactique des mathématique et de l'Informatique*, La Pensée Sauvage, pp. 137-145.
- Steiner, H.G. (1987), "Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education", *For the Learning of Mathematics*, 7(1), pp. 7-13.
- Tavignot, P. (1993), "Analyse du processus de transposition didactique. Application à la symétrie orthogonal en sixième lors de la réforme de 1985", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), pp. 257-294.

