Pensamiento matemático, cálculo diferencial y computadoras[1]

Mónica Ester Villarreal

Resumen: Este trabajo tiene como objetivo caracterizar los procesos de pensamiento de estudiantes universitarios al abordar cuestiones matemáticas de cálculo diferencial en un ambiente computacional. Tal caracterización se realiza a partir del análisis de episodios extraídos de experimentos de enseñanza realizados con estudiantes que participaron voluntariamente en el estudio. En dichos episodios, la computadora se muestra como un dispositivo que está mediando el pensamiento humano, y así, se constituye en una herramienta que transforma y, al mismo tiempo, forma parte de dicho pensamiento, integrando un *colectivo pensante* hombre-cosas. Los estudiantes desarrollan tanto abordajes visuales como algebraicos en el ambiente computacional, lo que sugiere la necesidad de coordinarlos para superar la dicotomía visual/algebraico. Juegos de conjeturas y refutaciones caracterizan los procesos de pensamiento matemático de los estudiantes que no siguen caminos lineales sino en forma de red.

Abstract: The aim of this work is to characterize students' thinking processes while working mathematical questions related to differential calculus in a computational environment. Such a characterization is built up from the analysis of episodes of teaching experiments conducted with students that volunteered to participate in this study. Those episodes show the computer as a device that is mediating the human thinking and as a tool that transforms and, at the same time, is a part of such thinking, integrating a *thinking collective* human beings-things. The students develop visual as well as algebraic approaches in the computational environment; this suggests the necessity of coordination between

Fecha de recepción: abril de 2000.

[1] Este trabajo está basado en la tesis de doctorado de la autora (Villarreal, 1999), que fue realizada bajo la dirección del doctor Marcelo Borba, en el Programa de Pós Graduação em Educação Matemática de la Universidade Estadual Paulista (UNESP Rio Claro), miembro del Grupo de Pesquisa em Informática outras mídias e Educação Matemática (GPIMEM) de la misma universidad, con el apoyo financiero de CNPq y CAPES, agencias de apoyo a la investigación de Brasil.

them, so as to overcome the dichotomy visual/algebraic. Conjectures and refutations characterize students' mathematical thinking processes, not following a linear path but rather forming a network.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. CÁLCULO Y COMPUTADORAS

La conjunción del cálculo y la tecnología en situaciones de enseñanza y aprendizaje ha sido estudiada desde diversas perspectivas. Investigaciones comparativas en clases de cálculo procuran determinar si la introducción de la computadora produce diferencias significativas en resultados de exámenes y niveles de aprobación. Otros estudios buscan caracterizar ventajas y dificultades provenientes de la propia tecnología, analizar las transformaciones que ella introduce en la dinámica de las clases de matemática, o estudiar procesos de construcción de conocimiento de los estudiantes en ambientes computacionales.

Los estudios comparativos, como los realizados por Palmiter (1991) o Lawson (1995), muestran resultados favorables al uso de la computadora e indican la aparición de actitudes positivas hacia la matemática, pero poco dicen respecto de aspectos relacionados con la enseñanza o del tipo de aprendizaje que fue posible en ese ambiente. Existen estudios que describen características, ventajas e influencias de los ambientes computacionales en la enseñanza y aprendizaje del cálculo (Schoenfeld, 1995; Smith, 1995; Heid y Baylor, 1993; Hillel *et al.*, 1992; Heid, 1988). Según estos trabajos, algunos rasgos destacados en propuestas de enseñanza del cálculo en ambientes informatizados son los siguientes:

1. ilustra y refuerza conceptos básicos;
2. reduce la preocupación con las técnicas de cálculo y permite concentrarse en las ideas centrales del cálculo, al abordar aplicaciones más realistas;
3. comunica nuevas ideas de manera visual y experimental antes de pasar a una explicación oral;
4. ofrece imágenes que, de otro modo, serían inaccesibles para los estudiantes.

De esa manera, el trabajo en un ambiente computacional favorece la posibilidad de alcanzar una mayor comprensión conceptual, ya que la computadora dispensaría o disminuiría el tiempo dedicado al aprendizaje de técnicas y algoritmos que cuentan con un énfasis predominante y ocupan gran parte de los cursos de cálculo. Otros autores (Borba, 1995a; Capuzzo Dolcetta *et al.*, 1988) destacan también que los ambientes computacionales favorecen un abordaje más experimental en el aprendizaje matemático que alienta a los estudiantes a formular, verificar o rechazar y reformular hipótesis, generar patrones, anticipar resultados y combinar abordajes gráficos con rutinas numéricas y analíticas. Además de la posibilidad experimental, varios estudios (Borba, 1995a; Schoenfeld, 1995; Smith, 1995; Capuzzo Dolcetta *et al.*, 1988) se refieren a la visualización como un aspecto favorecido por la computadora, ya sea por la posibilidad de generar representaciones gráficas con facilidad o por el tipo de abordaje matemático, más visual, que ella permite. Por otro lado, la importancia de la visualización en la enseñanza, aprendizaje y construcción de los conceptos de cálculo es indicada como esencial por muchos autores. Hallet (1991) señala que la visualización es de fundamental importancia para favorecer la comprensión matemática en los niveles iniciales de la universidad; sin embargo, el modelo tradicional de enseñanza del cálculo y su tipo de evaluación característica fomentan la memorización de fórmulas, reglas y técnicas algebraicas, provocando que los estudiantes eviten consideraciones visuales, como fue mostrado en estudios realizados por Eisenberg y Dreyfus (1991). Estos últimos autores señalan que muchos estudiantes manifiestan un cierto rechazo a este abordaje y prefieren un tratamiento algorítmico ya que, hipotetizan los investigadores, el pensamiento visual implicaría demandas cognitivas superiores a las del pensamiento algorítmico.

La generación de vínculos entre lo visual y lo simbólico ha sido abordada por algunos investigadores. Autores como Tall y Thomas (1989) discuten el uso de la computadora para alentar un abordaje más versátil en el aprendizaje matemático, involucrando tanto actividades simbólicas como visuales, ya que el abordaje tradicional conduce a una interpretación simbólica estrecha y el uso de la computadora proporciona una moldura visual "para la manipulación mental de conceptos de orden superior" (p. 117). No obstante, los autores señalan que en un ambiente computacional pueden surgir procesos algorítmicos ligados a una secuencia de comandos computacionales para realizar una tarea determinada, lo que se señala como una limitación. Tall (1993, 1996) se refiere a los papeles complementarios de lo visual y lo simbólico y afirma que la computadora puede generar un ambiente que permita relacionarlos. El autor indica que una concentración sobre los símbolos puede conducir a un abordaje que privilegia la memorización de procedimientos que se van complicando cuando el número de reglas aumenta; por otro lado, la computadora puede ser una fuente rica de imágenes visuales y computacionales que proporciona a los estudiantes la posibilidad de explorar ideas matemáticas y analizar ejemplos y contraejemplos de algunos conceptos. Sin embargo, Tall (1996) advierte que la concentración exclusiva en lo visual puede dar *insights* sobre lo que ocurre en contextos restrictivos con un limitado poder de generalización y que pueden constituirse en barreras potenciales si no se está atento tanto a las definiciones y deducciones formales como a las complejas imágenes mentales asociadas a ellas. Cabe observar que, aunque Tall (1993, 1996) reconoce el valor de lo visual y la necesidad de complementariedad con lo simbólico, el rigor matemático se vislumbra como objetivo final al que se subordina lo visual.

La posibilidad de coordinar representaciones múltiples (gráficas, numéricas, algebraicas), favorecida por la computadora, fue también señalada por Borba (1995b), que afirma la posibilidad de que una matemática visual o discreta, apoyada por el uso de computadoras, constituya un modelo que podría atraer a aquellos estudiantes que "en general rechazan, de manera explícita o implícita, la hegemonía del álgebra" (p. 90). En este sentido, Borba señala que las representaciones múltiples, favorecidas por algunos *softwares* matemáticos, pueden "desafiar el monopolio de las expresiones algebraicas en la educación matemática sin perder de vista la importancia del uso de estas expresiones" (p. 89).

Centrando la atención en estudios que se dedican a observar en detalle los procesos de pensamiento de estudiantes de matemática en ambientes computacionales, valiéndose de entrevistas o experimentos de enseñanza, se destacan trabajos en los cuales podría decirse que la tecnología es considerada, además de una herramienta para *hacer*, para *auxiliar* o para *mostrar*, también una herramienta para *pensar con*. En este sentido, los trabajos de Lautem, Graham y Ferrini-Mundy (1994), Borba y Confrey (1996), Borba (1995c, 1994) son ejemplos donde la computadora tiene un papel central en la comprensión matemática de los estudiantes. El estudio de Lautem, Graham y Ferrini-Mundy (1994) explora las comprensiones sobre los conceptos de función y límite de estudiantes de cálculo en un ambiente con calculadoras gráficas, proporciona datos que muestran la influencia de la tecnología en las concepciones y los procesos de resolución de problemas de los alumnos. Borba y Confrey (1996) y Borba (1995c, 1994) estudian las comprensiones y la construcción de ideas matemáticas de algunos estudiantes que trabajan con transformaciones de funciones con un *software* de representaciones múltiples, en un abordaje que parte de lo visual y gráfico. Los autores afirman que el raciocinio visual es una forma de cognición potencialmente poderosa que implica dar a los estudiantes el tiempo, la oportunidad y los recursos para elaborar construcciones, investigaciones, conjeturas y modificaciones de éstas.

Desde la perspectiva de las transformaciones que el empleo de la tecnología trae al aula, existen estudios que dan cuenta de los cambios que se producen en la dinámica de las clases de matemática. Borba (1995a) ilustra cómo el uso de la calculadora gráfica, para el abordaje de algunos contenidos de un curso de cálculo, suscitó nuevas perspectivas, provocó la realización de debates centrados en cuestiones matemáticas y subrayó un abordaje "más empírico" basado principalmente en el proceso de visualización. Estas características fueron notadas también por Borba (1997), que observó que el empleo de calculadoras gráficas permite a los estudiantes coordinar representaciones algebraicas y gráficas y realizar tareas que van más allá de la interpretación de gráficos, produciendo así una reorganización de la actividad en la sala de clases, intensificando la discusión matemática, la generación de hipótesis y el propio proceso de producción de conocimiento. El trabajo de Borba y Villarreal (1998), realizado también con un abordaje experimental, ejemplifica cómo el uso de calculadoras gráficas, además de reorganizar las actividades en la sala de clases, reorganiza también el pensamiento de los estudiantes e intensifica la discusión matemática entre ellos en un trabajo colectivo donde, además de los medios tecnológicos, la oralidad y el empleo de lápiz y papel son elementos que enriquecen las discusiones matemáticas.

Los trabajos aquí revisados rescatan diferentes aspectos vinculados con la relación entre cálculo y computadoras: el papel de la visualización y la experimentación, la reorganización de la dinámica del aula, limitaciones y ventajas provenientes de su uso. En este artículo se pretende rescatar el papel mediador y reorganizador de la computadora en el desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes de cálculo y se busca caracterizarlo en detalle. En la próxima sección, se presentan algunos elementos teóricos implícitos en este estudio y que vinculan computadoras y cognición.

1.2. Computadoras y cognición

El papel de la computadora como mediadora de la actividad intelectual humana ha sido descrito por Tikhomirov (1981) en su *teoría de la reorganización*. Según esta teoría, la actividad intelectual humana es modificada por el uso de la computadora, produciendo una reorganización en los procesos de creación, búsqueda y almacenamiento de información y en las propias relaciones humanas. Tikhomirov se refiere a la constitución de *sistemas ser humano-computadora* que producen una verdadera reorganización de la actividad humana y convierten a la computadora en mucho más que una herramienta de auxilio, en una herramienta que transforma la propia actividad.

La teoría de la reorganización es compatible con los conceptos de Levy (1993), quien desarrolla la idea de que "nuestro pensamiento se encuentra profundamente moldeado por dispositivos materiales y colectivos sociotécnicos" (p. 10). El concepto de *ecología cognitiva* que este autor propone, defendiendo la "idea de un colectivo pensante hombre-cosas" (p. 11), contempla las dimensiones técnicas y colectivas de la cognición e indica el surgimiento de nuevos estilos cognitivos en el tiempo de la informática.

Los dispositivos materiales (lápiz y papel, computadoras, calculadoras, etc.) son parte de un colectivo pensante y están relacionados con las tecnologías intelectuales descritas por Levy (1993): la oralidad, la escritura y la informática. Es claro que la oralidad y la escritura continúan siendo las tecnologías intelectuales más comunes en el trabajo matemático de los estudiantes. El abordaje algebraico de cuestiones matemáticas es característico de la cultura de la escritura, soporte fundamental para tales resoluciones. Este aspecto ya fue destacado en diferentes artículos por Borba (1993; 1995b), que señala la influencia de la *midia*[2] tradicional, lápiz y papel, en el estilo de producción matemática que subraya "el conocer un fenómeno dado, primordialmente a través del álgebra". En este sentido, puede decirse que la *midia* penetra la matemática y el pensamiento de quien hace y aprende matemática.

Difícilmente el abordaje de las cuestiones matemáticas sería algebraico sin lápiz y papel. Por eso, tal vez, algunos estudiantes no se sienten cómodos frente a la computadora, que exige otras formas de pensar, que sugiere nuevos abordajes. Levy (1993) describe con claridad esa tendencia:

> Es grande la tentación de condenar o ignorar aquello que nos es extraño. Es aun posible que no percibamos la existencia de nuevos estilos de saber, simplemente porque no corresponden a los criterios y definiciones que nos constituyeron y que heredamos de la tradición (p. 117).

Los estilos de saber, característicos de la cultura informática, pueden ser condenados o ignorados o no ser percibidos, porque no satisfacen los criterios y definiciones tradicionales que provienen de la civilización de la escritura.

[2] Con este término se designan los diferentes recursos y dispositivos que están mediando procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática: computadora, lápiz y papel, calculadora, oralidad, etcétera.

El colectivo pensante, del cual la computadora forma parte, parece privilegiar lo que se puede llamar pensamiento visual. La imagen se destaca como un punto de apoyo fundamental de las nuevas tecnologías intelectuales, sin implicar, con esto, un rechazo de lo verbal, lo escrito o lo algebraico, en el caso de la matemática.

En este trabajo se pretende mostrar cómo los procesos de pensamiento matemático desarrollados por estudiantes son condicionados, sin ser determinados, por el ambiente computacional en el que trabajan. Se presentan diversos ejemplos a través de los cuales se muestran las características de tales procesos de pensamiento.

2. EL ESTUDIO

2.1. Metodología de investigación

El objetivo del estudio aquí expuesto era caracterizar los procesos de pensamiento desarrollados por estudiantes en un ambiente computacional al realizar actividades matemáticas relacionadas con cálculo diferencial. Para la consecución de este objetivo fue necesario observar y registrar en detalle el trabajo de estudiantes en ambientes computacionales.

Se optó por una metodología de tipo cualitativa, basada principalmente en la realización de experimentos de enseñanza constructivistas (Cobb y Steffe, 1983); se trabajó con pares de estudiantes en un ambiente computacional. Un experimento de enseñanza (Cobb y Steffe, 1983) consiste básicamente en una serie de encuentros del investigador con los estudiantes por un cierto periodo de tiempo e implica procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes es influida, también, por la interacción con el investigador.

El estudio se realizó en horarios fuera de clase con tres pares de estudiantes voluntarias de primer año de Biología del Instituto de Biociências de la Universidade Estadual Paulista (UNESP, campus de Rio Claro, Brasil) que cursaban, en el momento de esta investigación, la disciplina matemática aplicada.

Se utilizó el *software Derive 3.14*. Ninguna de las participantes tenía experiencia con el *software*. Además de la computadora, siempre había disponibles lápices y papel, para que las estudiantes los utilizaran cuando lo considerasen necesario, ya que ocasionalmente escribían sus conclusiones, las que serían usadas en sesiones posteriores, sea para aplicarlas a nuevas situaciones, para cuestionarlas o para mejorarlas.

En el momento de iniciar este estudio, las estudiantes ya habían visto en el curso de matemática aplicada: el proceso de determinación de rectas tangentes a una curva a través de rectas secantes, la derivada de una función en un punto como el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, la derivada como función y algunas reglas de derivación.

Cada experimento de enseñanza fue estructurado en cuatro sesiones de trabajo con cada par de estudiantes participantes en el estudio. Estas sesiones tenían duración aproximada de una hora y media cada una y fueron realizadas y videograbadas en el laboratorio de video del Departamento de Matemática de la UNESP, Rio Claro.

En la primera sesión de trabajo se explicó el objetivo de la investigación y por qué era importante filmar las sesiones. Posteriormente se presentó el *software* con el que se trabajaría. Se introdujeron los comandos básicos para comenzar: escribir expresiones algebraicas, realizar gráficos, modificar escalas de los gráficos, marcar puntos en el plano cartesiano, etc. A medida que era necesario para el desenvolvimiento de las actividades propuestas, se fueron enseñando nuevos comandos.

Cada sesión se estructuraba en torno de cuestiones amplias que tenían la función de generar discusiones matemáticas entre las estudiantes y también con la investigadora. No existía una secuencia lineal. De esta manera, cada grupo participante de la experiencia recorrió caminos diferentes, dependiendo tanto de las intervenciones de la investigadora como de los intereses, preguntas, dudas y expectativas de las estudiantes generadas a partir del trabajo con la computadora o con las cuestiones matemáticas planteadas.

Después de cada sesión de los experimentos de enseñanza, se veían las correspondientes filmaciones y se proporcionaban elementos para responder a las preguntas de investigación. Se efectuaban anotaciones de situaciones frecuentes y recurrentes que llamaran la atención. A partir de ellas, se identificaban regularidades y patrones de comportamiento o resolución de problemas. Esto conducía al establecimiento de invariantes en las acciones de las estudiantes y la generación de conjeturas. Se registraron el accionar de las estudiantes y las intervenciones de la entrevistadora y, posteriormente, se analizaron. Este procedimiento permitía reestructurar las siguientes sesiones, establecer hipótesis de trabajo y reexaminar situaciones previamente observadas. Luego de completar todos los experimentos de enseñanza, los videos fueron completamente transcritos para poder realizar un análisis más profundo. Así, el proceso de análisis de los datos fue "no lineal", se desarrolló simultáneamente con la recolección de datos y se intensificó después de haberla acabado.

Se optó por un análisis de tipo inductivo/constructivo (Lincoln y Guba, 1985). Para tal análisis, no se parte de hipótesis previamente establecidas, sino que, a partir de los datos recogidos, se van generando "hipótesis de trabajo", esto es, proposiciones, conjeturas y relaciones entre ellas, y su validez se pone a prueba durante el transcurso de los experimentos de enseñanza.

Se seleccionaron y analizaron doce episodios (pasajes relevantes con elementos útiles para caracterizar los procesos y estrategias de pensamiento de los estudiantes). Algunos de ellos fueron discutidos con colegas del Grupo de Pesquisa Informática, outras Mídias y Educação Matemática (GPIMEM-UNESP-Rio Claro). A partir del análisis efectuado, se caracterizaron los procesos de pensamiento desarrollados por las estudiantes en el ambiente computacional en el cual trabajaron. Posteriormente, los episodios fueron observados a través de "lentes bibliográficos", esto es, fueron contrastados con la literatura pertinente, con la intención de construir nuevas comprensiones.

2.2. Tres episodios

A continuación se presentan tres de los doce episodios de aprendizaje analizados. En el primer episodio, se relata cómo las estudiantes del grupo constituido por Mayra y Carolina deciden si la recta $y = 4x - 4$, tangente a la parábola de expresión $y = x^2$, la toca en más de un punto. El segundo episodio muestra el análisis que las mismas estudiantes realizan acerca de gráficos de distintas funciones exponenciales desconocidas para ellas. El tercer episodio relata las estrategias desarrolladas por una estudiante (Camila) para determinar gráficamente la derivada de una función cuya expresión algebraica desconocía.

2.2.1. *Episodio 1*

En este episodio las estudiantes trazan en la computadora el gráfico de $y = x^2$, determinan algebraicamente, usando la computadora, la recta tangente a la parábola en el punto $x = 2$ ($y = 4x - 4$) y trazan su gráfico.

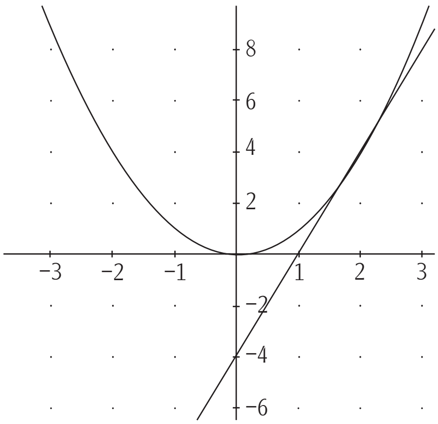


Figura 1

A partir de los gráficos mostrados por la computadora, surge un conflicto: la recta tangente parece estar tocando a la parábola en más de un punto (véase la figura 1). Esto motivó la pregunta de Carolina:

C: *¿una recta tangente puede tocar en varios puntos?*

La primera estrategia de las estudiantes para resolver este problema fue el empleo del comando *zoom* para aproximarse al gráfico, con el objetivo de conseguir una mejor visión de la región en que la recta tangente y la parábola parecen "estar juntas". Entretanto, esta opción no resolvió el problema, ya que parábola y recta tangente tienden a "confundirse" en un entorno del punto de tangencia, tal como se muestra en la figura 2.

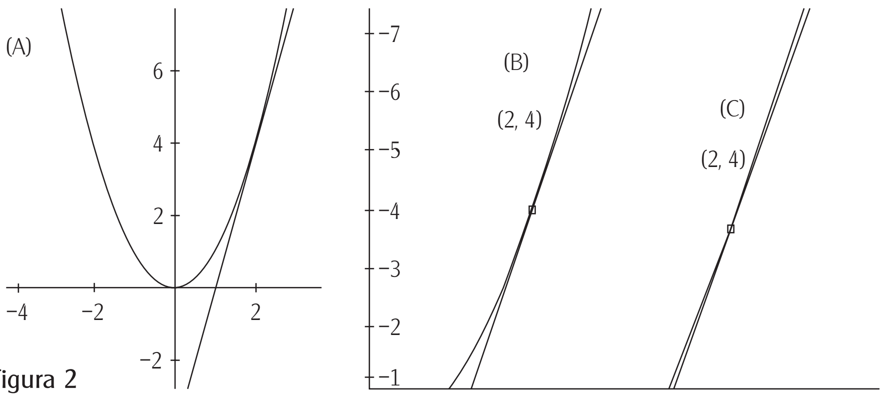
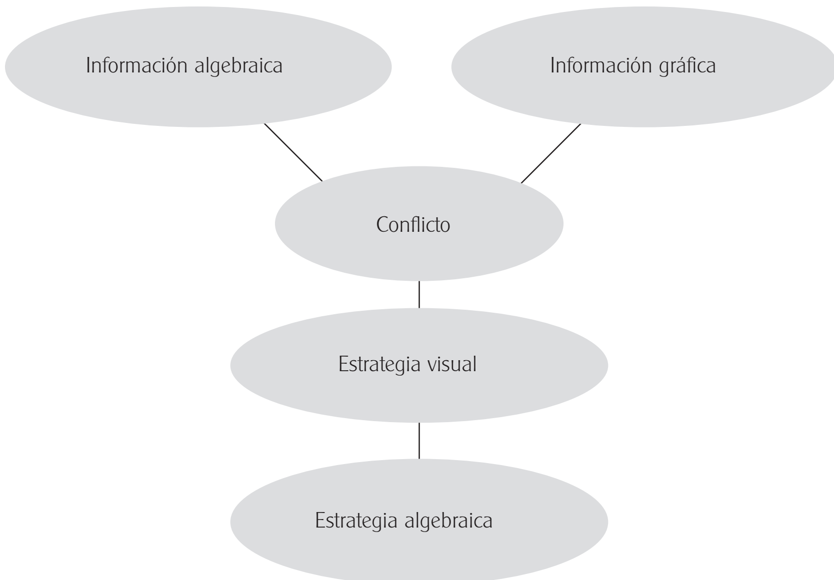


Figura 2

Surgió, así, la necesidad de un abordaje algebraico para resolver la cuestión: igualar las ecuaciones de la recta tangente y de la parábola para verificar si se encontraban en algún otro punto, además del punto de tangencia.

Resumiendo: existe una información algebraica proporcionada por la computadora cuando se determina la ecuación de la recta tangente a través de ella. Esa información dice que $y = 4x - 4$ es una recta tangente a la función $y = x^2$ en el punto (2, 4). Por otro lado, existe también una información gráfica cuando la recta tangente es trazada por la computadora, mostrando que esa recta aparentemente toca la parábola en más de un punto. Es a partir de la confrontación de esas dos informaciones que surge un conflicto y dos estrategias para resolverlo: visual, primero, y algebraica, después. Este proceso está representado en el siguiente esquema:



Cabe señalar que el conflicto que surge como una aparente contradicción entre las informaciones algebraica y gráfica no aparecería trabajando con lápiz y papel, ya que la representación gráfica que se genera con estas herramientas está subordinada a la siguiente imagen: “una recta tangente sólo toca a la curva en un punto”, y así el gráfico sería trazado de manera que eso ocurriera. La condición de tocar al gráfico en un punto es previa al dibujo y no consecuencia de él, pero, al trabajar con la computadora, eso no ocurre y de ahí el conflicto.

La estrategia del empleo del *zoom* para tener una mejor visualización del gráfico no resulta adecuada por el hecho de que la función es derivable y, así, localmente linealizable por la recta tangente. Sin embargo, esta aparente limitación visual de la computadora puede utilizarse como un auxiliar para trabajar la linealización local de funciones derivables, como la imagen gráfica de la derivabilidad de una función en un punto.

Este ejemplo muestra que los recursos del *software*: posibilidad de determinar rectas tangentes, trazado de gráficos y uso del *zoom;* en este caso particular, influyeron en el tipo de cuestiones que aparecieron en el episodio. La tarea presenta características peculiares provenientes del uso de esta *midia*.

El episodio muestra la importancia de un trabajo con representaciones múltiples, y las relaciones que las vinculan, para conseguir conectar dominios que, de otra manera, permanecerían separados pero conectados; generan comprensiones matemáticas más amplias y completas. Por otro lado, además de la necesidad de una coordinación entre representaciones múltiples, la introducción de la computadora en la ecología cognitiva de las estudiantes sugiere, también, la necesidad de una coordinación *intermidias* que permita transitar de una *midia* a otra, teniendo en cuenta las características propias de cada una. Tanto el trabajo con representaciones múltiples como la coordinación *intermidias* son indispensables en los colectivos pensantes de los cuales forma parte la computadora.

2.2.2. *Episodio 2*

En otro de los encuentros realizados con Mayra y Carolina, se abordó una cuestión matemática que no fue prevista por la entrevistadora. Las estudiantes exploraron gráficos de diversas funciones exponenciales desconocidas para ellas.

Inicialmente, trazan el gráfico de $y = 3^{x^2}$ (figura 3). Ellas nunca habían visto esa función y, buscando establecer conexiones con otros contenidos ya existentes, surgen preguntas que muestran la intención de vincular esa función exponencial con las funciones cuadráticas:

¿Una exponencial, cuando está elevada al cuadrado, se transforma en parábola?

En pocas palabras, se puede decir que las estudiantes piensan que el tipo de gráfico producido está asociado al formato del gráfico de la función que está en

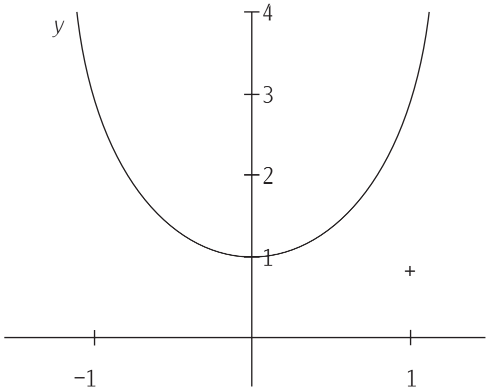


Figura 3

el exponente, es decir $y = x^2$. Inclusive trazan el gráfico de $y = x^2 + 1$ y lo comparan con el de $y = 3^{x^2}$ para visualizar si "coinciden".

Esa misma conjetura surge frente a la función $y = 3^{x^3}$ (figura 4). No obstante, cuando trazan su gráfico en la computadora, se hacen nuevas reflexiones: el gráfico es considerado como una "mezcla" de una función exponencial ($y = 3^x$) y de una función polinomial de grado 3 ($y = x^3$). Las estudiantes intentan justificar su conjetura escribiendo la función $y = 3^{x^3}$ como un producto entre 3^x y 3^{x^2}, pero perciben que ese producto no es 3^{x^3}, sino $3^{(x^2 + x)}$. Posteriormente, trazan el gráfico de la función $y = 3^{(x^2 + x)}$ e intentan asociarlo nuevamente con el gráfico de $y = x^2 + x$; observan que el punto crítico de la parábola coincide con el punto crí-

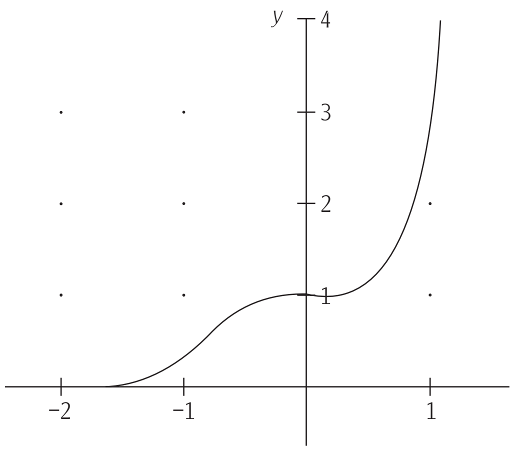


Figura 4

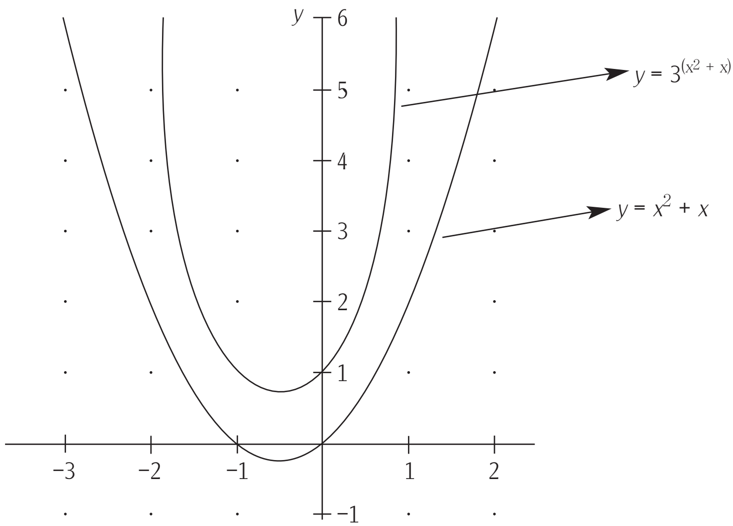


Figura 5

tico de la función $y = 3^{(x^2 + x)}$ (véase la figura 5), e inclusive intentan determinar ese valor valiéndose de la fórmula que permite calcular la abscisa del vértice de una parábola ($x_v = -b/2a$ si $y = ax^2 + bx + c$), pero perciben que eso no es posible.

En el transcurso del episodio, se trataron diversos tópicos, procurando tener una mayor comprensión matemática: composición de funciones como una operación que permite generar las funciones $y = 3^{x^2}$, $y = 3^{x^3}$ o $y = 3^{(x^2 + x)}$, a partir de funciones conocidas, como $y = 3^x$, $y = x^2$, etc.; resolución de ecuaciones e, incluso sin saber calcular la derivada de funciones de tipo $y = a^{f(x)}$ ($a > 0$ y $a \neq 1$), la presencia de la computadora permitió avanzar en este sentido y abordar cuestiones relacionadas con el cálculo algebraico de los puntos críticos de la función $y = 3^{(x^2 + x)}$.

A partir del trabajo en la computadora con este tipo de gráficos, surgen algunos comentarios que revelan el reconocimiento de que las informaciones visuales presentan aspectos positivos y limitaciones. Es evidente que, a partir de una información visual generada por las estudiantes en la computadora, surgieron las cuestiones ya relatadas. Por otro lado, las explicaciones algebraicas de las estudiantes intentan dar cuenta de las evidencias gráficas. Se recurre a funciones y reglas conocidas frente a la necesidad de explicar, también algebraicamente, el "extraño" comportamiento de estas funciones que nunca habían visto antes. Sólo el álgebra de las funciones no habría mostrado la riqueza de las cuestiones abordadas en el ambiente computacional y, recíprocamente, el poder de la información visual requiere también de la ayuda algebraica para tener acceso a explicaciones más allá de lo visual. Este episodio sugiere la necesidad del uso de representaciones múltiples para conseguir una mejor apropiación de los conceptos matemáticos.

Es interesante notar que, aunque las funciones exponenciales consideradas presenten expresiones algebraicas totalmente distintas de las correspondientes a las funciones cuadráticas, la asociación visual de los gráficos es más fuerte y persistente, y aparece en varios momentos del episodio aquí resumido. Aun después de haber reflexionado que, a pesar de la similitud de los gráficos, se trata de funciones diferentes, ante nuevas situaciones las estudiantes vuelven a utilizar fórmulas asociadas a las funciones cuadráticas para resolver cuestiones relacionadas con la función $y = 3^{(x^2 + x)}$.

Las funciones cuadráticas detentan una posición privilegiada en la enseñanza de la matemática. Existen fórmulas para determinar su vértice y raíces y, con frecuencia, se utilizan para introducir, por ejemplo, el concepto de derivada, entre otras aplicaciones. No es extraño, entonces, que aparezcan aquí dando soporte a algunas interpretaciones de las estudiantes. ¿Hasta qué punto el hecho de que las estudiantes extiendan la validez de las fórmulas que permiten determinar el vértice y las raíces de la parábola no es generado por la propia enseñanza? Frente a funciones desconocidas y aliadas a la computadora, las estudiantes generan nuevos gráficos que, aunque similares a los gráficos de las parábolas, tienen características propias. Las fórmulas conocidas para determinar vértice y raíces de parábolas pierden su validez para esas nuevas funciones. Se hacen necesarias, entonces, nuevas reflexiones matemáticas que expliquen las diferencias entre las funciones consideradas, pero también cuestiones tales como: ¿por qué el punto crítico de la función $y = 3^{(x^2 + x)}$ coincide con el punto crítico de su exponente $y = x^2 + x$? ¿Los puntos críticos de funciones de tipo $y = a^{f(x)}$ ($a > 0$ y $a \neq 1$) coinciden siempre con los puntos críticos de su exponente $y = f(x)$? ¿Por qué?

Este episodio puede considerarse también como un ejemplo de las posibilidades educativas que la computadora ofrece, ya que muestra una oportunidad de aprendizaje para las estudiantes a partir de la experimentación con funciones desconocidas, favorece la aparición de conexiones con conocimientos previos y exhibe la necesidad de establecer relaciones entre lo visual y lo algebraico para construir nuevas explicaciones y comprensiones matemáticas.

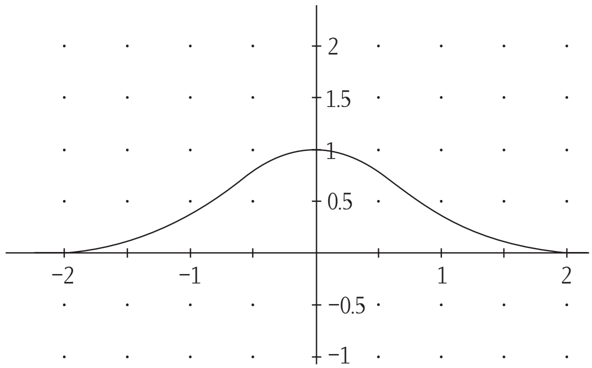


Figura 6

2.2.3. *Episodio 3*

El episodio que se presenta a continuación tiene como protagonista a Camila, que integraba otro de los grupos participantes del estudio, aunque en esta sesión trabajó sola. El problema abordado fue: dado el gráfico de una función en la computadora ($f(x) = e^{-x^2}$), trazar el gráfico de su derivada sin recurrir a la expresión algebraica de la función. El gráfico proporcionado por la computadora se muestra en la figura 6. A fin de que Camila pudiese realizar el gráfico de la derivada, se colocó una transparencia sobre la pantalla de la computadora.

Camila ya había trabajado en encuentros anteriores con este tipo de problema, pero con gráficos de funciones polinomiales. A partir de ese trabajo previo, se habían establecido algunas relaciones entre el signo de la derivada y el crecimiento de la función:

> En el trecho donde la función es decreciente, la derivada tendrá valores negativos; en el trecho donde la función es creciente, la derivada tendrá valores positivos.

Camila sabía también que los extremos de la función determinaban los ceros de la derivada.

A continuación se presentan las estrategias desarrolladas por la estudiante en el transcurso del episodio. La primera de ellas fue identificar el punto crítico de máximo en x = 0, por lo cual la derivada pasaría por el origen de coordenadas.

Posteriormente, Camila afirma que, en el intervalo donde la función es creciente, la derivada será positiva y, donde la función es decreciente, la derivada será negativa. Inicialmente indica que la derivada podría ser una curva decreciente que pasa por el origen. Aparentemente, la estudiante realizó una asociación con la parábola que representa la función cuadrática $y = -x^2$, que es el exponente de la función exponencial dada, y que se trata de una función cuya derivada conoce.

Camila señala que, para tener una noción del formato de la derivada, miraría "el grado de la función" que, en el caso de las funciones polinomiales con las cuales estaba familiarizada, proporciona información sobre el tipo de gráfico de la derivada, la cual sería de un grado menor. No obstante, en este caso la estrategia no funciona. Una vez que esto queda claro, Camila comienza a calcular la derivada en algunos puntos de la función a partir de la construcción de rectas tangentes. Esta actividad fue facilitada por la computadora que, a través del comando *tangent*, proporciona la ecuación y el gráfico de las rectas tangentes solicitadas. Sin embargo, la primera tentativa de Camila para calcular la derivada en el punto $(-1, f(-1))$ fue calcular el cociente $f(-1)/(-1)$, afirmando que ése era el valor del coeficiente angular de la recta tangente en el punto mencionado. El resultado de tal cociente es negativo, lo cual contradice el hecho previsto por Camila de que la derivada en ese punto debería ser positiva por ser creciente la función. Ella afirma:

> C: ... pero... debo haber dicho algo errado... porque yo dije que aquí la función, en ese trecho, es creciente [indica para $x < 0$] entonces dije que la derivada iba a ser positiva, la derivada iba a dar aquí encima [indica por sobre el eje X] pero si es negativa, va a estar para abajo... ¡ahí ya no entendí más nada!

Frente a esta contradicción y ayudada por la investigadora, Camila traza la recta tangente a la curva en el punto $(-1, f(-1))$, usando la computadora. Una vez obtenido el gráfico de dicha recta tangente, identifica con ayuda de la computadora el punto donde tal recta corta al eje Y ($y_0 = 1.109$) y plantea una ecuación ($f(-1) = (a - 1) + 1.109$), que también será resuelta por la computadora, para determinar el coeficiente angular (a) de la misma.

Una vez calculado el valor del coeficiente angular ($a = 0.741$), Camila tiene dificultades para identificar el par ordenado $(-1, 0.741)$ como un punto del gráfico de la derivada. Se supera el inconveniente a través de una analogía con el cero de la derivada, que fue determinado a través del coeficiente angular de la recta tangente a la función en el punto extremo $(0, f(0))$, punto donde ésta resulta ser ho-

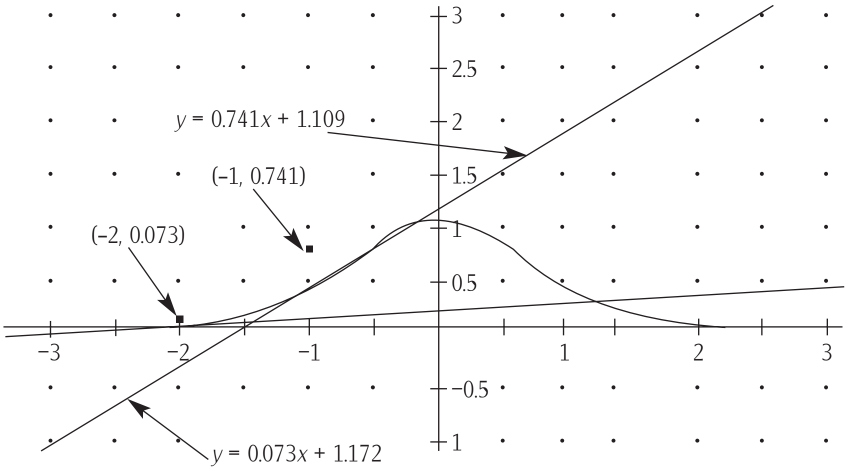


Figura 7

rizontal. Así, Camila consigue marcar un punto (–1, 0.741) en el gráfico de la derivada pedida. Luego repite el procedimiento descrito para determinar el valor de la derivada en x = –2 (véase la figura 7).

Al considerar puntos pertenecientes al intervalo –1 < x < 0, señala que ahí el gráfico de la derivada será decreciente, pues debe pasar por el origen. Afirma también que, para x > 0, el gráfico de la derivada será una curva decreciente.

Finalmente, la estudiante traza el gráfico de la derivada previsto por ella y lo contrasta con el proporcionado por la computadora (véase la figura 8). La estudiante analiza las diferencias entre los gráficos y observa que la derivada es simétrica respecto al origen, mientras que la función original es simétrica respecto al eje Y, y recuerda haber notado esta característica en algunas funciones polinomiales y sus respectivas derivadas, graficadas antes.

Este episodio sugiere la existencia de aspectos visuales y algebraicos en el pensamiento de Camila que en algunos momentos parecen desconectados. El valor de la derivada en un punto es determinado algebraicamente calculando el coeficiente angular de rectas tangentes trazadas en la computadora, pero la interpretación gráfica de ese cálculo se muestra inicialmente complicado. La construcción de posibles conexiones entre informaciones visuales y algebraicas caracteriza el proceso seguido por Camila en el transcurso del episodio, en el cual la

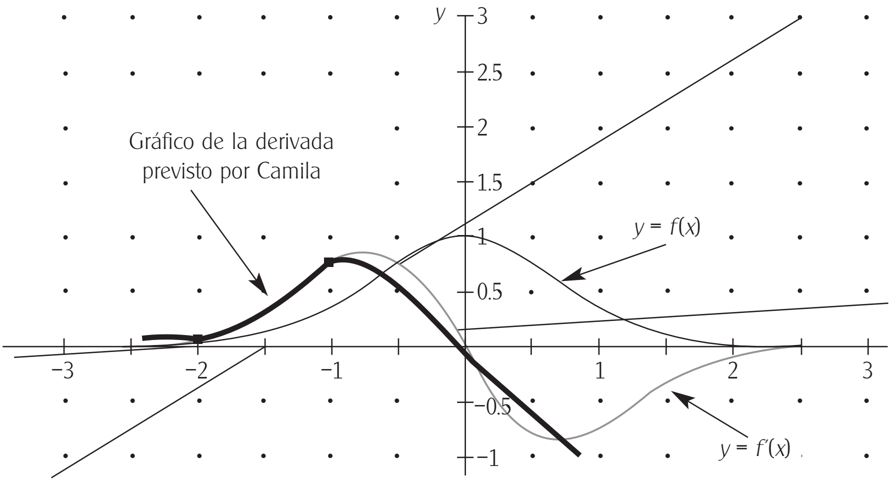


Figura 8

estudiante integró la computadora a sus actividades, conformando así un sistema que resuelve diferentes cuestiones matemáticas.

La construcción de la propia derivada a través del trazado de rectas tangentes se muestra como una actividad que permite, en cierta manera, visualizar la relación entre derivada y rectas tangentes. Esa génesis visual de la derivada por lo general queda en la sombra en cursos de cálculo. El cálculo de la derivada a través de reglas acaba surgiendo como una máquina que permite generar pendientes de rectas tangentes y se olvida que la derivada fue generada a partir de ellas.

Los patrones de simetría, observados por Camila en los gráficos en los que trabajó, muestran la generación de una conjetura informal que trata el hecho de que la derivada de una función par es una función impar y de que la derivada de una función impar es una función par. Es importante observar que este tipo de análisis fue facilitado por el trabajo hecho con gráficos y muestra el surgimiento de relaciones matemáticas que no estaban previstas.

3. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El análisis de los episodios relatados aquí de manera resumida sugiere los siguientes resultados:

1. El pensamiento matemático es mediado y reorganizado por los dispositivos utilizados.
2. En un ambiente computacional, las estudiantes desarrollan tanto abordajes visuales como algebraicos, lo que sugiere la necesidad de coordinarlos para superar una dicotomía entre lo visual y lo algebraico.
3. Los procesos de pensamiento matemático de las estudiantes se caracterizan por ser juegos de conjeturas y refutaciones articulados en forma de red.

El pensamiento de las estudiantes en ambiente computacional no sigue un estilo de tipo deductivo. Los aspectos visuales y las respuestas provenientes de la computadora influyen en el estilo de construcción matemática desarrollado por ellas. Conjeturas y refutaciones parecen estar en la base del aprendizaje matemático cuando hay una interacción intensa entre los actores del sistema constituido por estudiantes, investigadora, computadora, lápiz y papel.

En el caso de las estudiantes, las conjeturas se elaboran a partir de conocimientos previos. Se trata de suposiciones que, aunque no verificadas, tienen un sustento que puede ser la aplicación de una regla, las concepciones matemáticas presentes, las palabras del profesor, las intervenciones de la entrevistadora o de la colega, etc. Esas conjeturas se confrontan con las respuestas de la computadora, o con las ideas de la colega o son desafiadas por algún contraejemplo sugerido por las estudiantes, por la investigadora o por las representaciones proporcionadas por la computadora. Los contraejemplos ayudan a reformular la conjetura o a generar una nueva.

Otra característica del pensamiento de las estudiantes, íntimamente ligada al proceso de generación de conjeturas y refutaciones, es la constitución del conocimiento en red. Esto es, no existe una linealidad en la manera de abordar el contenido matemático. Cuando se destaca la voz del estudiante y se siguen los pasos de sus ideas, los caminos recorridos se revelan particularmente diferentes de una secuencia lineal característica en las clases tradicionales de matemática.

La metáfora del conocimiento como red de significados (Machado, 1995) se contrapone con la metáfora del conocimiento como un "balde" que se llena, con la imagen de la "educación bancaria" de Paulo Freire (1979), con la idea de cadena y de presentación lineal y lógicamente ordenada de contenidos, y respeta una secuencia jerárquica que va de lo simple a lo complejo, esto es, una visión cartesiana del conocimiento.

Finalmente, cabe señalar que, en esa constitución reticular del conocimiento, se observan abordajes tanto visuales como algebraicos en el tratamiento de cuestiones matemáticas. Tales abordajes no son excluyentes ni disyuntivos. Esto permite trabajar con vistas a la consecución de un equilibrio entre lo visual y lo algebraico en la educación matemática. El énfasis dado a las técnicas en la enseñanza matemática implica necesariamente un énfasis en lo algorítmico y en lo algebraico lo cual unido al valor limitado que se atribuye a lo visual y experimental en la educación matemática, podrían considerarse, en la terminología de Levy (1993), como efectos ecológicos que están relacionados con las tecnologías predominantes en las clases de matemática, y también en el propio proceso de producción matemática, esto es, la oralidad y la escritura. Precisamente, a través de la computadora, esto podría ser desafiado.

Considerando que la introducción de la computadora en ambientes de aprendizaje contribuye al establecimiento de una nueva ecología cognitiva, es razonable pensar que esta nueva especie que forma parte de esa ecología puede tener diferentes tipos de relaciones con los integrantes del sistema (elementos que la constituyen). Si la computadora simplemente se utiliza para hacer cuentas, será un suplemento, pero si se asume como una herramienta "para pensar con", será un reorganizador tanto de los procesos de pensamiento como de las relaciones entre los componentes del colectivo pensante integrado por seres humanos y dispositivos materiales. Esa reorganización producirá modificaciones en la organización de contenidos y en las actividades desarrolladas en clase. Alterará los papeles de los profesores y los estudiantes e inclusive la relación con el propio objeto de conocimiento.

Teniendo en cuenta la supremacía de la enseñanza tradicional en cursos universitarios de cálculo (al menos en Argentina o Brasil), los aspectos señalados sugieren la conveniencia de repensar su enseñanza a partir de una visión del conocimiento como red de significados y considerando a la computadora como posible protagonista de un papel que supera lo meramente auxiliar para transformarse en integrante de un *colectivo pensante* que caracteriza a una *ecología cognitiva* particular que produce una *reorganización* de los procesos de pensamiento y actividades, tanto de quien enseña como de quien aprende y de quien produce matemática.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Cristina Esteley y Humberto Alagia, por sus sugerencias y observaciones realizadas en versiones previas de este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Borba, M. (1993), *Students´ understanding of transformations of functions using multirepresentational software*, tesis de doctorado en Educación, Cornell University, 377 pp.

—— (1994), "A model for students´ understanding in a multi-representational environment", en J. da Ponte y J. Matos (ed.), *Proceedings of the 18th PME Conference,* Lisboa 2, pp. 104-111.

—— (1995a), "O uso de calculadoras gráficas no ensino de funções na sala de aula", en *Anais da Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática,* Recife, UFPE, pp. 67-72.

—— (1995b), "Funções, representações múltiplas e visualização na Educação Matemática", en *Anais do I Seminário Internacional de Educação Matemática,* Río de Janeiro, IM-UFRJ, pp. 71-90.

—— (1995c), "Computadores, representações múltiplas e a construção de idéias matemáticas", *Bolema,* Rio Claro, año 9, especial 3, pp. 83-101.

—— (1997), "Graphing calculator, functions and reorganization of the classroom", en M. Borba, T. Souza, B. Hudson, y J. Fey (ed.), *Proceedings of Working Group 16 at ICME 8: the role of technology in the Mathematics classroom,* Rio Claro, UNESP, pp. 53-62.

Borba, M. y J. Confrey, (1996), "A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment", *Educational Studies in Mathematics,* 31 (3), pp. 319-337.

Borba, M. y M. Villarreal (1998), "Graphing calculators and reorganization of thinking: the transition from functions to derivative", en A. Olivier, y K. Newstead (ed.), *Proceedings of the 22nd PME Conference,* Stellenbosch, 2, pp. 135-143.

Capuzzo Dolcetta, I. *et al.* (1988), "The impact of new technologies on teaching calculus: a report of an experiment", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 19 (5), pp. 637-657.

Cobb, P. y L. Steffe (1983), "The constructivist researcher as teacher and model builder", *Journal for Research in Mathematics Education,* 14 (2), pp. 83-94.

Eisenberg, T. y T. Dreyfus (1991), "On the reluctance to visualize in mathematics", en W. Zimmermann y S. Cunningham (eds.), *Visualization in teaching and learning Mathematics,* Washington, Mathematical Association of America, pp. 25-38.

Freire, P. (1979), *Educação e mudanza,* trad. de M. Gadotti y L. L. Martin, Río de Janeiro, Paz e Terra.

Hallet, D. (1991), "Visualization and calculus reform", en W. Zimmermann y S. Cunningham (ed.), *Visualization in teaching and learning mathematics,* Washington, Mathematical Association of America, pp. 121-126.

Heid, M.K. (1988), "Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool", *Journal for Research in Mathematics Education,* 19 (1), pp. 3-25.

Heid, M.K. y T. Baylor (1993), "Computing technology", en P.S. Wilson (ed.), *Research ideas for the classroom-High School Mathematics,* Reston, VA, NCTM, Macmillam, pp. 198-214.

Hillel, J. *et al.* (1992), "Basic functions through the lens of Computer Algebra System", *Journal of Mathematical Behavior,* 11(2), pp. 119-158.

Lautem, A., K. Graham y Ferrini-Mundy (1994), "Student understanding of basic calculus concepts: interaction with the graphics calculator", *Journal of Mathematical Behavior,* 13, pp. 225-237.

Lawson, D. (1995), "The effectiveness of a computer-assisted learning programme in engineering mathematics", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 26(4), pp. 567-574.

Levy, P. (1993), *As tecnologias da inteligência. O futuro do pensamento na era da informática,* trad. C. I. da Costa, São Paulo, Editora 34, 203 p.

Lincoln, Y. y E. Guba (1985), *Naturalistic inquiry,* California, SAGE, 416 p.

Machado, N. (1995), *Epistemologia e didática: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente,* São Paulo, Cortez Editora, 320 p.

Palmiter, J. (1991), "Effects of computer algebra systems on concept and skill adquisition in calculus", *Journal for Research in Mathematics Education,* Reston, 22(2), pp. 151-156.

Schoenfeld, A. (1995): "A brief biography of Calculus Reform", *UME Trends,* Lafayette, Purdue University, 6(6), pp. 3-5.

Smith, D. (1995), "Computers in Calculus Reform", *UME Trends,* Lafayette, Purdue University, 6(6), pp. 14-15, 31.

Tall, D. (1993), "Real Mathematics, rational computers and complex people", en *Proceedings of the Fifth Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching,* Addison-Wesley, pp. 243-258.

—— (1996), "Information Technology and Mathematics Education: Enthusiasms, Possibilities and Realities", texto de la conferencia dictada en el 8th International Congress on Mathematical Education (ICME 8), 1996, Sevilla.

Tall, D. y M. Thomas (1989), "Versatile learning and the computer", *Focus on learning problems in Mathematics*, 11 (2), pp. 117-126.

Tikhomirov, O.K. (1981), "The psychological consequences of computarization", en J.V. Wertsch (ed.), *The concept of activity in Soviet Psychology*, Nueva York, M.E. Sharpe, pp. 256-278.

Villarreal, M. (1999), *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas*, tesis de doctorado en Educación Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

DATOS DE LA AUTORA

Mónica Ester Villarreal

Facultad de Ciencias Agropecuarias, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina

mvilla@agro.uncor.edu