Una nueva serie para el cálculo del número π

Sergio Falcón Santana

Resumen: Es de sobras conocido que existen muchísimas series numéricas para el cálculo de los primeros dígitos del número π. Pero, en general, todas estas series suelen obtenerse a partir del desarrollo en serie de un arco tangente. El presente trabajo pretende resolver este mismo problema mediante la suma de una serie numérica obtenida a partir del desarrollo en serie de potencias de la función arco coseno. Posee la ventaja, sobre otras muchas series anteriores, de que su convergencia es más rápida.

Abstract: It is well-known that there are many numerical series for the calculation of the first digits of the number π. But, in general, all these series are usually obtained from the development in series of an arc tangent. The present work tries to solve the same problem by means of the sum of a numerical series obtained from the development in series of powers of the function arc cosine. It has the advantage, over other previous series, that its convergence is faster.

DESARROLLO EN SERIE DE LA FUNCIÓN ARCO COSENO. CONVERGENCIA

Una forma relativamente sencilla de desarrollar en serie de potencias las funciones trigonométricas recíprocas consiste en desarrollar en serie la función derivada aplicando la fórmula del binomio de Newton e integrar la serie resultante, calculando posteriormente el valor de la constante de integración de modo que la variable tome el valor 0 (Falcón, 2001a).

Con este procedimiento, se encuentra el desarrollo de la función *arco coseno,* que es el siguiente:

Fecha de recepción: marzo de 2002.

$$f(x) = \text{arc}\cos x \rightarrow$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-1/2} = -\binom{-1/2}{0} + \binom{-1/2}{1}x^2 - \binom{-1/2}{2}x^4 + \binom{-1/2}{3}x^6 - \ldots =$$

$$= -1 - \frac{\frac{1}{2}}{1!}x^2 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}x^4 - \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}x^6 - \ldots = -1 - \frac{1}{2\cdot 1!}x^2 - \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 - \ldots \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = -x - \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{1}{3}x^3 - \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\frac{1}{5}x^5 \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\frac{1}{7}x^7 - \ldots + C$$

$$f(0) = \text{arc}\cos 0 = \frac{\pi}{2} = C \rightarrow \text{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} \qquad (1)$$

Nota 1: Hay que tener en cuenta que el cálculo de los números combinatorios se hace según la fórmula $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$, donde n representa un número real cualquiera, no necesariamente natural.

Nota 2: La expresión $(2n-1)!!$ se conoce con el nombre de doble factorial (o semifactorial) de $2n-1$ y su expresión es $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$. En caso de que el número fuera par, su doble factorial sería $(2n)!! = 2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2$.

Un problema interesante en todo desarrollo en serie es el estudio de la convergencia de la serie obtenida. Para ello se aplica el criterio de D'Alembert y resulta

$$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\left|\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{x^{2n+3}}{2n+3} : \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right| =$$

$$\lim\left|\frac{(2n+1)(2n-1)!!\,2^n n!\,(2n+1)x^{2n+3}}{(2n-1)!!\,2^{n+1}(n+1)n!\,(2n+3)x^{2n+1}}\right| = x^2\lim\frac{(2n+1)(2n+1)}{2(n+1)(2n+3)} = x^2\lim\frac{4n^2}{4n^2} = x^2 < 1$$

por lo que la serie converge para todo número real x tal que $-1 < x < +1$.

Falta estudiar la convergencia en los extremos del intervalo. Para $x = +1$, se obtiene la serie numérica $\sum_{0}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\frac{1}{2n+1}$, cuya convergencia se estudiará aplicando el criterio de Raabe:

$$\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim n\left(1-\frac{(2n+1)(2n+1)}{2(n+1)(2n+3)}\right)=\lim \frac{6n^2+5n}{4n^2+10n+6}=\frac{6}{4}>1,$$ por lo

que esta serie es convergente (el valor de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ se obtuvo del párrafo anterior).

Para x = −1 se obtiene la misma serie, aunque negativa, por lo que también es convergente. En consecuencia, la serie potencial obtenida correspondiente a la función arco coseno converge en el intervalo cerrado [-1, +1].

Nota: La expresión $(2n - 1)!!$ puede sustituirse por esta otra:

$$(2n-1)!!=\frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2}=\frac{(2n-1)!}{2(n-1)2(n-2)\ldots(2\cdot 2)(2\cdot 1)}=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

Suma de arcos cosenos

Antes de empezar esta sección tengamos en cuenta las consideraciones que se indican a continuación:

1. La función *arco* es la recíproca de su correspondiente función trigonométrica por lo que cos (arc cos t) = t.
2. Si t = cos u → arc cos t = u → sen (arc cos t) = sen u = $\sqrt{1-\cos^2 u}$ = $\sqrt{1-t^2}$

Por lo tanto, y teniendo en cuenta que cos (a + b) = cos$a$ cos$b$ − sen$a$ sen$b$, resulta: cos (arc cos a + arc cos b) = cos (arc cos a) cos (arc cos b) − sen (arc cos a) sen (arc cos b) = $ab - \sqrt{1-a^2}\,\sqrt{1-b^2}$ → arc cos a + arc cos b = arc cos ($ab - \sqrt{1-a^2}\,\sqrt{1-b^2}$)

Finalmente, el cambio b = a = x conduce a la interesantísima relación

$$2\text{arc cos } x = \text{arc cos } (2x^2 - 1). \qquad (2)$$

CÁLCULO DEL NÚMERO π

Si bien es cierto que el número π puede ser calculado a partir del desarrollo (1), la convergencia es más rápida haciendo uso de la fórmula (2). Si en ella sustituimos los correspondientes desarrollos en serie (1), resulta:

$$2\left(\frac{\pi}{2}-x-\sum_{1}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)=\frac{\pi}{2}-(2x^2-1)-\sum_{1}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\frac{1}{2n+1}(2x^2-1)^{2n+1}\to$$

$$\to\frac{\pi}{2}=1+2x-2x^2+\sum_{1}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!}\frac{1}{2n+1}(2x^{2n+1}-(2x^2-1)^{2n+1}).$$

Esta relación es muy interesante, porque establece que el valor de π se puede obtener a partir de una serie potencial determinada, para cualquier número real comprendido entre −1 y +1. Y así, por ejemplo, si se hace $x = 1/4$ y se toman sólo cuatro términos de esta serie, se obtiene para π el valor 3.1143. Un sencillo ejercicio de programación nos hace ver que esta serie se acerca más al valor correcto de π cuanto más se acerca x al punto medio del intervalo [0, 1] y se aleja de π cuando x se acerca a sus extremos.

Para una x que varía de 0 a 1 con incrementos de 0.05 y con sólo 7 términos de la serie, se obtienen los valores que se indican a continuación:

x = 0, π = 2.740763	x = 0.05, π = 2.909787	x = 0.1, π = 3.021307
x = 0.15, π = 3.086626	x = 0.2, π = 3.119972	x = 0.25, π = 3.134481
x = 0.3, π = 3.139711	x = 0.35, π = 3.141213	x = 0.4, π = 3.141539
x = 0.45, π = 3.141588	**x = 0.5, π = 3.141592**	x = 0.55, π = 3.14159
x = 0.6, π = 3.141582	x = 0.65, π = 3.141545	x = 0.7, π = 3.141408
x = 0.75, π = 3.140922	x = 0.8, π = 3.139278	x = 0.85, π = 3.133821
x = 0.9, π = 3.115391	x = 0.95, π = 3.047382	x = 1, π = 2.740761

Como se comprueba fácilmente, para x = 0.5 se obtiene el valor de 3.141592 para π que es exacto para estas primeras cifras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Falcón, S. (2001), *Cálculo I,* España, El Libro Técnico, pp. 68-99.
—— (2001), "Inabarcable π", *Elementos de Matemática,* vol. XV, núm. 62, pp. 5-10.

DATOS DEL AUTOR

Sergio Falcón Santana
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, España
sfalcon@dma.ulpgc.es