

# Sobre la aplicación de la analogía para derivar un teorema extendido de Pitágoras para el tetraedro

M. A. Murray-Lasso

**Resumen:** El tetraedro trirectángulo es una generalización tridimensional del triángulo rectángulo bidimensional. Es una esquina separada de un cubo por medio de un plano oblicuo, igual que un triángulo rectángulo es una esquina separada de un cuadrado por medio de una línea oblicua. Dicho tetraedro también obedece un teorema extendido de Pitágoras en el que la suma de los cuadrados de las áreas de los triángulos rectángulos (“catetos”) incidentes en el ángulo triedro trirectángulo es igual al cuadrado del área del triángulo oblicuo (“hipotenusa”). Se hace uso intenso de la analogía para demostrar el teorema, y se generaliza a cuatro y más dimensiones. Para lograrlo, se escoge una demostración del teorema de Pitágoras fácilmente generalizable a más dimensiones. La solución utilizada trabaja con proyecciones ortogonales que se generalizan sin dificultad a más dimensiones. Se dan ejemplos numéricos y se menciona la dualidad entre simples polirectángulos (generalizaciones del tetraedro trirectángulo) y polígonos formados por las aristas y la diagonal máxima de un ortoedro.

**Abstract:** The trirectangular tetrahedron is a three-dimensional generalization of the two-dimensional right triangle. It is a corner cut from a cube by means of an oblique plane, just as a right triangle is a corner cut from a square by means of an oblique line. The tetrahedron mentioned also obeys an Extended Pythagorean Theorem in which the sum of the squares of the areas of the right triangles (“legs”) incident with the trihedral trirectangular angle is equal to the square of the area of the oblique triangle (“hypotenuse”). Intensive use is made of analogy to prove the theorem, which is generalized to four and more dimensions. To achieve this, an easily generalized proof of the Pythagorean Theorem to many dimensions is selected. The solution provided relies on orthogonal projections which are easy to extend to more dimensions. Numerical examples are provided and the duality between polirectangular simplices (generalizations of the trirectangular tetrahedron) and polygons constructed with the edges and the maximal diagonal of an orthohedron is noted.

---

Fecha de recepción: junio de 2001.

## INTRODUCCIÓN

Una de las principales herramientas de descubrimiento en las matemáticas es la analogía (Polya, 1965, 1954, 1981). Cuando se ha resuelto un problema que tiene algún parecido con un nuevo problema, una buena heurística es intentar aplicar al nuevo problema las ideas que funcionaron para el problema análogo. En vista de que analogía no es lo mismo que identidad, generalmente hay necesidad de hacerle algunas modificaciones a las ideas para que se ajusten al nuevo problema; sin embargo, en general es más fácil resolver el nuevo problema buscando y probando esas modificaciones que atacándolo desde cero. Brown y Walter (1990) han dado numerosas ideas para modificar y plantear nuevos problemas con similitudes a un problema base. Una de sus ideas importantes es hacer una lista de las características del problema y plantear problemas en las que se niegan una o varias de las características. Por ejemplo, si el teorema de Pitágoras funciona para triángulos rectángulos planos, una variante podría ser investigar qué pasa si un triángulo no es rectángulo (una solución es que se aplica la ley de los cosenos). Otra variante sería investigar qué pasa si la figura no es plana. (En este artículo investigamos este problema.) Una tercera variante podría ser qué pasa si, en vez de triángulo, se trata de un cuadrilátero. Si alguna de las variantes se ajusta al nuevo problema y somos capaces de resolver el problema variado, habremos resuelto con éxito el nuevo problema.

En este artículo se aplican las ideas planteadas a la demostración de un teorema extendido de Pitágoras. Este teorema aparece en Polya (1981, pp. 34-37). El autor lo demuestra utilizando en repetidas ocasiones el teorema de Pitágoras estándar. En este artículo presentamos una demostración diferente que resulta menos larga, requiere menos líneas auxiliares y sugiere conceptos adicionales, así como la manera de demostrarlo para cuerpos con cuatro o más dimensiones. Para ello, haremos un mayor uso de la analogía, partiendo de una demostración trigonométrica del teorema de Pitágoras estándar.

El problema en cuestión es tomar un tetraedro trirrectángulo, al cual, sin pérdida de generalidad, lo podemos colocar de manera tal que el vértice correspondiente al ángulo triedro trirrectángulo coincida con el origen de un sistema de coordenadas cartesianas  $x, y, z$ . A los tres triángulos rectángulos que forman parte de la superficie del tetraedro los haremos coincidir con los planos  $x - y, x - z, y - z$ . A estos triángulos los llamaremos  $A, B, C$ , respectivamente. El cuarto triángulo tiene como vértices los vértices de los triángulos  $A, B, y C$  que no coinciden con el origen, lo llamaremos *el triángulo oblicuo* y lo denominaremos  $D$ . En la

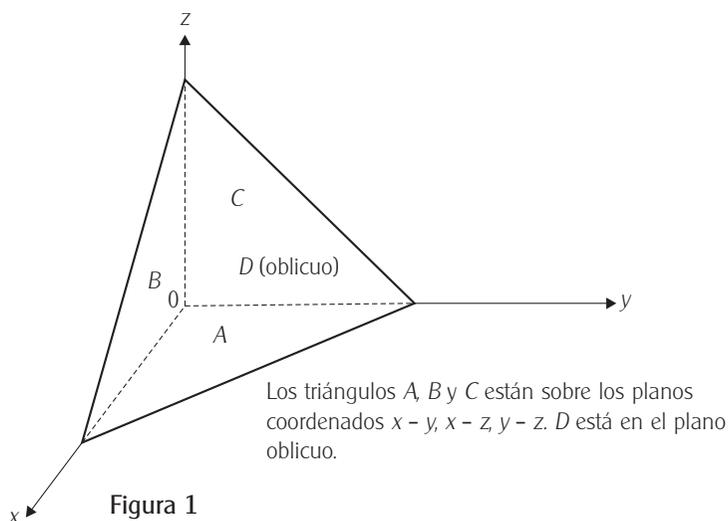


figura 1 se muestra el tetraedro en perspectiva. Como indica Polya (1981, p. 34), el triángulo rectángulo es una esquina de un cuadrado cortada por medio de una línea recta oblicua, mientras que el tetraedro trirrectángulo es una esquina cortada de un cubo por medio de un plano oblicuo. De ese hecho proviene la analogía entre el triángulo rectángulo y el tetraedro trirrectángulo.

Si encerramos entre paréntesis los nombres de los triángulos y denotamos así sus áreas, lo que se trata de demostrar es el siguiente teorema generalizado de Pitágoras

$$(D)^2 = (A)^2 + (B)^2 + (C)^2$$

que involucra las áreas de los tres triángulos “cateto” y el área del triángulo “hipotenusa.”

## EL TEOREMA DE PITÁGORAS ESTÁNDAR

El teorema extendido de Pitágoras para el tetraedro ya tiene algunas diferencias con el teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo. El número de términos del lado derecho es tres en vez de dos. Esto nos debe parecer lógico, ya que si hacemos la analogía del triángulo oblicuo con la hipotenusa y de los triángulos que se unen en el ángulo triedro trirrectángulo con los dos catetos que se en-

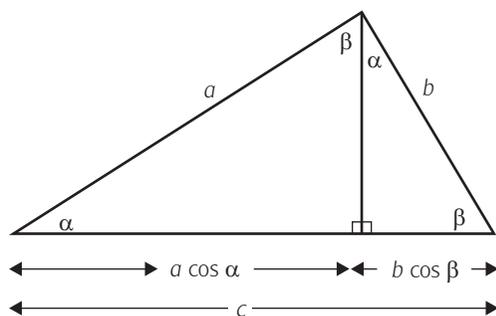


Figura 2

cuentran en el ángulo plano recto, el tetraedro tiene tres “catetos.” Para una figura plana su medida es el área, mientras que para una línea recta, su medida es la longitud. Hasta ahí la analogía parece lógica. Busquemos ahora una demostración del teorema estándar de Pitágoras que se pueda extender fácilmente a más dimensiones (Flores, 1992).

En la figura 2 se muestra un triángulo rectángulo en el que se ha trazado una perpendicular que va del vértice con el ángulo recto a la hipotenusa. El pie de dicha perpendicular divide a la hipotenusa en dos segmentos con longitudes:  $a \cos \alpha$  y  $b \cos \beta$  que son las proyecciones de los lados  $a$  y  $b$  sobre la hipotenusa (Jurgensen, Donnelly y Dolciani, 1963, p. 259). A cada lado le corresponde uno de los segmentos; a  $a$  le corresponde  $a \cos \alpha$ , y a  $b$  le corresponde  $b \cos \beta$ .

Evidentemente, la suma de los segmentos da el segmento total  $c$ , por lo que

$$c = a \cos \alpha + b \cos \beta. \tag{1}$$

Si en el triángulo rectángulo original utilizamos la definición de cos:

$$\cos = \text{lado adyacente/hipotenusa}$$

entonces

$$\cos \alpha = a/c; \cos \beta = b/c$$

que al sustituirse en la ecuación (1) da

$$c = a^2/c + b^2/c$$

de la cual, multiplicando ambos miembros por  $c$ , se obtiene

$$c^2 = a^2 + b^2$$

que es el teorema de Pitágoras.

### EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Pasemos ahora al tetraedro. Procediendo análogamente, desde el ángulo triedro trirectángulo que corresponde al ángulo recto del triángulo rectángulo, trazamos una perpendicular al plano oblicuo. El punto no divide nada. En este punto tenemos que improvisar. Se trata de dividir la medida del triángulo oblicuo, es decir, su área, en pedazos tales que sumen el área del triángulo oblicuo y cada pedazo corresponda a uno de los triángulos que se unen en el ángulo triedro trirectángulo. Una idea es tomar el pie de la perpendicular como vértice común de tres triángulos y, como los otros tres vértices, los vértices del triángulo oblicuo. Esto se muestra en la figura 3.

La división claramente permite la identificación de cada triángulo con cada una de las caras del ángulo triedro en analogía con la correspondencia de los catetos con los segmentos de recta en que se dividió la hipotenusa en el caso

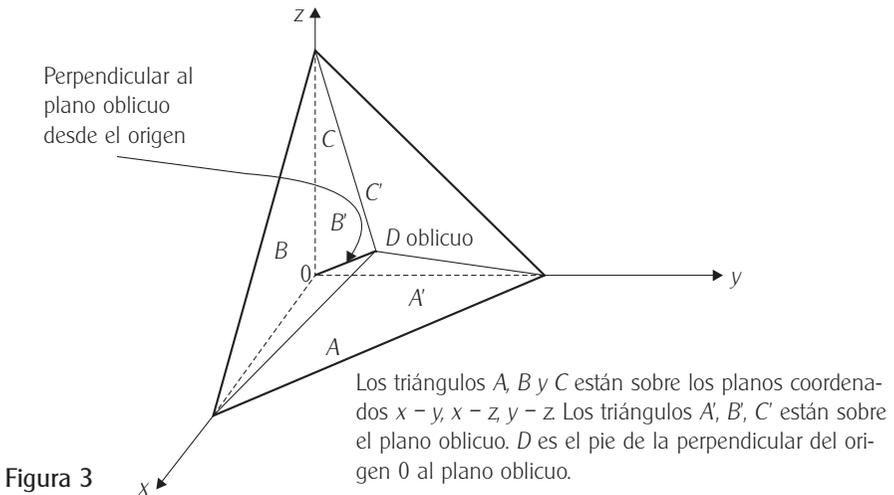


Figura 3

del triángulo plano. Para intentar una demostración del teorema de Pitágoras extendido, llamaremos a los triángulos formados sobre la superficie del triángulo oblicuo  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  como se muestra en la figura. 3.

Nótese que en la figura. 3, los triángulos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  están sobre el plano oblicuo, mientras que los triángulos  $A$ ,  $B$  y  $C$  están sobre los planos coordenados  $x - y$ ,  $x - z$ ,  $y - z$ .

Si denotamos las áreas de los triángulos con sus nombres encerrados entre paréntesis, evidentemente, como los tres triángulos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  justo llenan el triángulo oblicuo  $D$ , se tiene

$$(D) = (A') + (B') + (C')$$

operación que tiene su análoga en la ecuación (1). Pero el área  $(A')$  es la proyección del área  $(A)$  sobre el plano oblicuo, ya que sus tres vértices son las proyecciones de los tres vértices de  $A$ . Lo mismo se puede decir de los triángulos  $B'$  y  $B$ , y de los triángulos  $C'$  y  $C$ . Por tanto, podemos escribir

$$(D) = (A) \cos \alpha + (B) \cos \beta + (C) \cos \gamma, \quad (2)$$

donde los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los ángulos diedros entre el plano del triángulo oblicuo  $D$  y los planos  $x - y$ ,  $x - z$ ,  $y - z$  donde están los triángulos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , respectivamente (Moise y Downs, 1975, p. 315). Dichos ángulos tienen como valores los de los ángulos (planos) entre la perpendicular al plano del triángulo oblicuo que pasa por el origen de las coordenadas y los ejes coordenados  $z$  (que es perpendicular al plano  $x - y$  en el que está el triángulo  $A$ ),  $y$  (que es perpendicular al plano  $x - z$  en el que está el triángulo  $B$ ) y  $x$  (que es perpendicular al plano  $y - z$  en el que está el triángulo  $C$ ) (Larson y Hostetler, 1989, p. 783). En otras palabras,  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  y  $\cos \gamma$  son los cosenos directores de la recta que va del origen y es perpendicular al plano del triángulo oblicuo  $D$ .

El ángulo entre la recta perpendicular al plano del triángulo  $D$  y el eje  $z$  también vale  $\alpha$  y su coseno es el factor que lleva el área del triángulo  $D$  a la del triángulo  $A$ ;  $\beta$  es el correspondiente con el eje  $y$  y lleva  $D$  a  $B$ ; y  $\gamma$  es el correspondiente con el eje  $x$ , que lleva  $D$  a  $C$ ; de allí se obtienen las siguientes relaciones:

$$\cos \alpha = (A)/(D), \quad \cos \beta = (B)/(D), \quad \cos \gamma = (C)/(D)$$

Al utilizar estos valores en la ecuación (2) se obtiene:

$$(D) = (A)^2/(D) + (B)^2/(D) + (C)^2/(D)$$

y multiplicando ambos miembros por  $(D)$  tenemos:

$$(D)^2 = (A)^2 + (B)^2 + (C)^2$$

que es la expresión para el teorema extendido de Pitágoras para el tetraedro trirectángulo. Es evidente la analogía entre las expresiones y el álgebra intermedia entre las demostraciones para el triángulo rectángulo y el tetraedro trirectángulo.

## DISCUSIÓN

Se debe notar que la demostración que dimos del teorema de Pitágoras está íntimamente relacionada con proyecciones; por tratarse de geometría plana (dos dimensiones), se trata de longitudes de segmentos de recta, ya que los dos segmentos en los que se divide la hipotenusa son las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa y, por otro lado, los catetos son las proyecciones ortogonales de la hipotenusa sobre dos rectas ortogonales orientadas con la misma orientación que los catetos. Nótese que se manejan dos diferentes proyecciones, aunque los ángulos son los mismos. Los cosenos de estos ángulos desempeñan para el plano el mismo papel que los cosenos directores para tres dimensiones. (Compárese, por ejemplo,  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ ;  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ; Thomas, 1962, p. 614.)

Al pasar a tres dimensiones, lo que se proyecta son áreas, ya que el papel de los catetos lo desempeñan tres triángulos en planos que forman un ángulo triedro trirectángulo y el papel de la hipotenusa lo desempeña el triángulo sobre el plano oblicuo. Por estas razones, lo que interesa son los ángulos diedros entre los planos en cuestión. Dichos ángulos tienen la misma medida que los ángulos planos entre las normales a los planos. Estas normales, en muchos casos, son más fáciles de manejar por ser unidimensionales. Esto es particularmente cierto para espacios con más dimensiones que tres.

Aunque en dos dimensiones los métodos gráficos son muy convenientes, ya en tres dimensiones se presentan dificultades de construcción por los dibujos en perspectiva, aunque ayudan a la visualización. Para más realismo y precisión, habría que trabajar con modelos físicos como cuerpos de cartón, trazar líneas por medio de hilos, etc. En este caso, ayuda mucho recurrir al álgebra, a saber, al álgebra lineal.

En tres dimensiones, una expresión lineal en tres variables referidas a tres ejes cartesianos ortogonales representa un plano que es una estructura bidimensional. Si el término independiente es cero, entonces el plano pasa por el origen, de lo contrario se trata de un plano que interseca a los ejes coordenados en puntos diferentes al origen. Así, por ejemplo, la ecuación

$$ax + by + cz + d = 0$$

representa un plano cuyas intersecciones con los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  son  $-d/a$ ,  $-d/b$  y  $-d/c$ , respectivamente (Larson y Hostetler, 1989, p. 782). Una manera de representación, que a veces resulta conveniente, es resolver la ecuación para representar los puntos que la satisfacen en términos de parámetros. Si despejamos cada una de las variables  $x$ ,  $y$ ,  $z$  en términos de  $d$  y algunos parámetros, se obtiene:

$$x = -d/a - b y/a - c z/a$$

donde se le pueden dar valores arbitrarios a  $y$ ,  $z$ , digamos  $t_1$ ,  $t_2$ . Podemos entonces escribir la solución general

$$\begin{aligned} x &= -d/a - b t_1/a - c t_2/a \\ y &= t_1 \\ z &= t_2 \end{aligned}$$

o en notación vectorial:

$$(x, y, z)' = (-d/a - b t_1/a - c t_2/a, t_1, t_2)' = (-d/a, 0, 0)' + t_1 (-b/a, 1, 0)' + t_2 (-c/a, 0, 1)'$$

donde, para ahorrar espacio vertical, escribimos los vectores columna como vectores fila y, al final, agregamos el apóstrofe que denota transposición (conversión de filas a columnas y viceversa). La última expresión indica claramente que el vector  $(x, y, z)'$  es igual a un vector constante  $k = (-d/a, 0, 0)'$  más la suma de dos vectores constantes  $v_1 = (-b/a, 1, 0)'$  y  $v_2 = (-c/a, 0, 1)'$  multiplicados por los coeficientes  $t_1$  y  $t_2$  que son arbitrarios. En otras palabras, cualquier punto en el plano se puede expresar como la suma de un vector constante y una combinación lineal de dos vectores; estos vectores deberán ser linealmente independientes para poder generar todo el plano. Como evidentemente los vectores  $v_1$  y  $v_2$  son li-

nealmente independientes, generan un plano (de dos dimensiones) que pasa por el punto  $k$ . Si deseáramos encontrar un vector que sea ortogonal al plano generado por  $v_1$  y  $v_2$ , habría que resolver simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{aligned}(-b/a, 1, 0) (x, y, z)' &= 0 \\(-c/a, 0, 1) (x, y, z)' &= 0\end{aligned}$$

Como la matriz de coeficientes de estas ecuaciones homogéneas tiene rango 2 y hay tres incógnitas, la solución será un vector constante no cero (ortogonal a  $v_1$  y  $v_2$ ), digamos  $v_3$ , multiplicado por un parámetro arbitrario  $t_3$ . Nótese que en el proceso se ignoró el vector constante  $k$ , ya que basta encontrar un vector ortogonal al plano paralelo que pase por el origen, para el cual  $k$  es el vector cero. Conviene notar que, si se cuenta con la ecuación del plano en la forma  $ax + by + cz + d = 0$ , el vector  $(a, b, c)$  es ortogonal al plano y no hay necesidad de resolver ecuaciones para encontrar un vector ortogonal al plano (Thomas, 1960, p. 621). Otra alternativa para encontrar un vector ortogonal a  $v_1$  y  $v_2$  es usar el producto cruz  $v_1 \times v_2$  (Thomas, 1960, p. 616).

Supóngase que ahora se desea encontrar la intersección de la recta  $t_3 v_3$  (que pasa por el origen) con el plano citado arriba. Como el plano está dado por

$$(x, y, z)' = k + t_1 v_1 + t_2 v_2$$

y la recta está dada por

$$(x, y, z)' = t_3 v_3.$$

Igualando los lados derechos tenemos  $k + t_1 v_1 + t_2 v_2 = t_3 v_3$ ; rearreglando se convierte en:

$$t_1 v_1 + t_2 v_2 - t_3 v_3 = -k$$

Los tres vectores  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  son linealmente independientes; por lo tanto el sistema en las tres incógnitas  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  tendrá una solución única. Conocida  $t_3$ , se determina el punto de intersección utilizando

$$(x, y, z)' = t_3 v_3$$

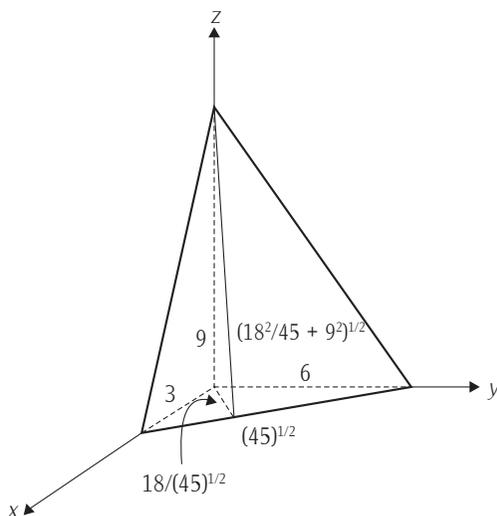


Figura 4

### EJEMPLO NUMÉRICO DEL TEOREMA APLICADO A UN TETRAEDRO TRIRRECTÁNGULO

Para aclarar las ideas expresadas algebraicamente, verificaremos el teorema extendido de Pitágoras para el tetraedro de la figura 4, cuyos cuatro vértices son  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 6, 0)$ ,  $(0, 0, 9)$  y  $(0, 0, 0)$ . Junto a diversas líneas de la misma figura, se muestran sus longitudes, las cuales se pueden calcular usando el teorema de Pitágoras y el hecho de que la altura de un triángulo rectángulo, usando como base la hipotenusa, divide a ésta en segmentos proporcionales a los cuadrados de los catetos adyacentes.

Las áreas de los triángulos rectángulos sobre los planos coordenados  $x - y$ ,  $x - z$ ,  $y - z$  son:  $A = 3 \times 6/2 = 9$ ,  $B = 9 \times 3/2 = 27/2$ ,  $C = 9 \times 6/2 = 27$ . Los correspondientes cuadrados son:  $A^2 = 81$ ,  $B^2 = 729/4$  y  $C^2 = 729$ . La suma de estos cuadrados vale 992.25. El cuadrado del área del triángulo sobre el plano oblicuo es  $45 \times ((18^2/45 + 9^2)/4) = 992.25$ , que coincide con la suma de los cuadrados de los triángulos rectángulos previamente calculada. Por tanto, se cumple el teorema extendido de Pitágoras.

Podría interesar determinar el punto donde cruza la perpendicular al plano oblicuo que pasa por el vértice del ángulo trirrectángulo. Esto se podría calcular

encontrando un vector ortogonal a dos vectores linealmente independientes en el plano oblicuo. Estos vectores se pueden calcular conociendo tres puntos de dicho plano. Con un vector ortogonal determinado, se puede escribir fácilmente la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el origen y tiene la misma dirección que el vector. De igual manera, se puede escribir la ecuación paramétrica del plano oblicuo. Haciendo simultáneas las ecuaciones, se determina el punto único que satisface a ambas, el cual corresponde al punto buscado (Hadley, 1962, pp. 51, 61; Gass, 1966, p. 62). El resultado es  $(x, y, z)' = (108/49, 54/49, 36/49)$ . Dejamos los detalles al lector.

## DUALIDAD: EL TEOREMA EXTENDIDO Y LA SUMA VECTORIAL DE LOS LADOS DE UN POLÍGONO

Si analizamos cuidadosamente los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$ , cuyos cosenos aparecen dos veces, haciendo operaciones diferentes en la demostración del teorema extendido de Pitágoras, podemos llegar a la siguiente conclusión, en vista del resultado final del teorema extendido:

1. Las áreas de las diversas figuras planas las podemos representar por medio de vectores cuya magnitud (longitud) es igual al área representada y cuya orientación es ortogonal al plano del área representada. En ingeniería es común representar un par, momento, cantidad de movimiento angular o una velocidad angular que actúan en un plano con un vector ortogonal al plano, de magnitud igual a la cantidad representada y con un sentido dado por la ley del tornillo de rosca derecha (Seely y Ensign, 1948, p. 23; Cannon, 1967, pp. 22-23). En forma natural se presenta la oportunidad de darle a las áreas un signo positivo o negativo, escogiendo el sentido del vector ortogonal. En la geometría griega ni siquiera se había inventado el cero o los números negativos, por lo que siempre se consideraron positivas las longitudes, áreas y volúmenes. Aquí seguiremos dicha costumbre. Así, en la figura 1, las áreas de los triángulos  $A$ ,  $B$  y  $C$  pueden quedar representadas por vectores en las direcciones y sentidos de los ejes  $z$ ,  $y$ ,  $x$ , respectivamente.
2. Puesto que se cumple el teorema extendido de Pitágoras para el tetraedro trirectángulo

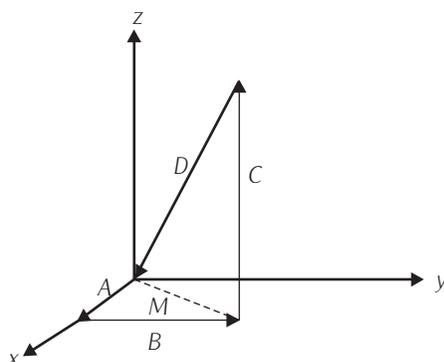


Figura 5

$$(D)^2 = (A)^2 + (B)^2 + (C)^2$$

ésta se puede interpretar como la aplicación de la ley del paralelogramo (o ley del triángulo o del polígono). Podemos entonces pensar en los vectores que representan las áreas como las fuerzas resultantes debido a una presión unitaria uniforme en todo el medio que rodea a un tetraedro trirectángulo. Cada área, al multiplicarla por la presión unitaria, da como fuerza resultante el vector que representa el área con dirección ortogonal al área y dirigida hacia el cuerpo.

3. Una posible interpretación de nuestra descripción sería que los tetraedros trirectángulos están en equilibrio bajo las presiones mencionadas, por lo que la suma vectorial de las fuerzas queda representada por el teorema extendido de Pitágoras. Con una interpretación *ad hoc* de los sentidos de los vectores (cambiándole el sentido al vector  $D$ ), los vectores que representan las áreas de los triángulos del ángulo trirectángulo y del plano oblicuo cierran el polígono de fuerzas dando una resultante cero (véase la figura 5).
4. En la figura 5 los vectores  $A$ ,  $B$  y  $C$  representan las áreas de los tres triángulos  $A$ ,  $B$  y  $C$  del tetraedro trirectángulo, y el vector  $D$  representa el área del triángulo sobre el plano oblicuo. Aplicando dos veces el teorema estándar de Pitágoras a los triángulos formados por los vectores  $A$ ,  $B$ ,  $M$  y  $M$ ,  $C$ ,  $D$ , se obtiene

$$(A)^2 + (B)^2 = (M)^2; \quad (M)^2 + (C)^2 = (D)^2;$$

por tanto

$$(A)^2 + (B)^2 + (C)^2 = (D)^2$$

Esta interpretación se puede extender a cualquier número de dimensiones para simplejos multirectángulos de  $n$  dimensiones. (Un *simplejo* de  $n$  dimensiones es un poliedro convexo que tiene exactamente  $n + 1$  vértices. La frontera del simplejo contiene *simplices* de menor dimensión, los cuales reciben el nombre de *caras simpliciales*; el número de tales caras de dimensión  $i$  es igual al número de combinaciones de  $n + 1$  objetos tomados de  $i + 1$  en  $i + 1$ , o sea

$$\binom{n+1}{i+1} = \frac{(n+1)!}{(i+1)!(n-i)!}$$

El simplejo es una generalización del segmento de recta, el triángulo y el tetraedro (Gass, 1968, pp. 53-54). En las extensiones a simplejos de cuatro y más dimensiones (A), (B), ... son "hiperáreas", es decir, por ejemplo, para cuatro dimensiones, son volúmenes de tetraedros, ya que los simplejos de cuatro dimensiones están delimitados por simplejos de tres dimensiones y, en general, los simplejos de  $n$  dimensiones están delimitados por simplejos de  $n - 1$  dimensiones. Estos últimos son pedazos de hiperplanos: en tres dimensiones pedazos de planos (triángulos), en dos dimensiones pedazos de línea y, en una dimensión, puntos.

La identificación de los conceptos nos ayuda a visualizar que el teorema se puede extender, pues, por ejemplo, el concepto de proyección se define en forma análoga para objetos en más dimensiones.

## EXTENSIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A CUATRO DIMENSIONES

Existen por lo menos dos tipos de extensiones del teorema de Pitágoras. La más conocida es la que corresponde a encontrar una diagonal que atraviesa el espacio interior de un paralelepípedo rectangular recto (*ortopedro*, Baldor, 1983, p. 252) y sus generalizaciones. Simplemente aplicando el teorema de Pitágoras primero en un plano y luego en otro, se puede llegar al resultado que se ilustró en la figura 5. La extensión a cuatro y más dimensiones está clara; independientemente de la imposibilidad para dibujar geoméricamente los ortopedros, pode-

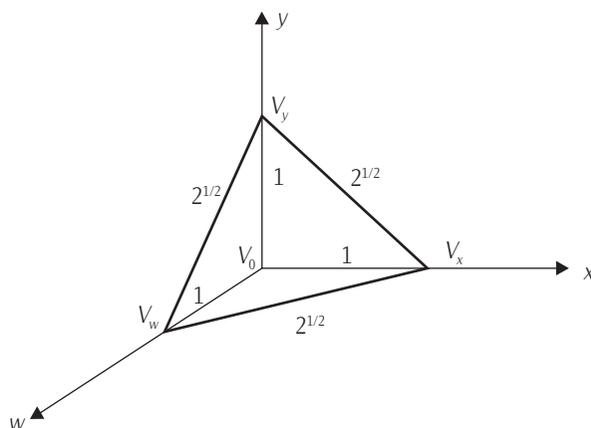


Figura 6

mos postular cuerpos que son extensiones del cuerpo en tres dimensiones. Para calcular la distancia entre dos vértices que no están en el mismo hiperplano, se aplica una generalización del teorema de Pitágoras de la siguiente índole:

$$Z^2 = A^2 + B^2 + \dots + Y^2$$

donde las letras  $A, B, \dots, Y$ , representan longitudes de líneas unidimensionales, cada una orientada en una dirección ortogonal a todas las demás y  $Z$  representa una línea oblicua que parte de un vértice del ortoedro al otro vértice que no está en el mismo hiperplano.

Menos conocida, y motivo principal de este artículo, es la segunda extensión, donde las magnitudes consideradas no son unidimensionales (líneas), sino que van subiendo de dimensión, comenzando por ser longitudes de líneas (lados de triángulos rectángulos en un plano) luego áreas bidimensionales (triángulos rectángulos para el tetraedro trirrectángulo), hiperáreas (volúmenes de tetraedros para simplejos tetrarrectángulos de 4 dimensiones), etcétera.

Los cuerpos correspondientes a los triángulos y tetraedros a los cuales hemos llamado “simplejos” están definidos para más dimensiones y aunque no se pueden construir (si se pueden manejar sus proyecciones en dos y tres dimensiones, análogamente a las proyecciones en dos dimensiones que se hacen de cuerpos en tres dimensiones), se utilizan mucho en aplicaciones como la programación lineal. No es frecuente tratar con cuerpos de este tipo que sean tetrarrectángulos, por ejemplo, en programación lineal en general no lo son, pero sí es frecuen-

te manejar proyecciones de cuerpos multidimensionales en hiperplanos o subespacios de diferentes dimensiones para problemas de mínimos cuadrados. Una de las generalizaciones del espacio euclideo a más de tres dimensiones se basa precisamente en el concepto de producto interno que está íntimamente relacionado con el concepto de proyección de un vector (segmento de recta dirigido) sobre otro (Leithold, 1973, pp. 815-816). Las coordenadas cartesianas de un vector multidimensional son las medidas de sus proyecciones ortogonales sobre vectores unitarios ortogonales entre sí. Los espacios multidimensionales han encontrado toda clase de aplicaciones en la ingeniería, física, estadística, economía y administración. El concepto se ha encontrado tan útil que se ha generalizado a un número infinito de dimensiones y han aparecido los espacios de Hilbert con múltiples aplicaciones a las vibraciones, conducción de calor, electromagnetismo y oscilaciones eléctricas, así como a la física cuántica y, con una generalización de los conceptos de longitud y área utilizando medidas más abstractas (normas), en los espacios de Banach (Taylor, 1958, p. 98).

Para ser más concretos, diremos que un simplejo en cuatro dimensiones es un cuerpo (que se puede considerar como una generalización del tetraedro) con cinco vértices con todos los vértices conectados por medio de aristas. Dicho cuerpo tiene tantos tetraedros como subconjuntos de cuatro vértices hay en un conjunto de cinco vértices, es decir,  $C_4^5 = 5!/4! = 5$ . El número de aristas de dicho cuerpo es 10 y también tiene 10 triángulos (Courant y Robbins, 1969, p. 233; Colerus, 1948, p. 361). Por otra parte, un hipercubo en cuatro dimensiones, se puede visualizar como dos cubos unidos entre vértices correspondientes por aristas que surgieron entre los vértices al desplazarse un cubo en una dirección ortogonal (*sic*) a las tres direcciones de cada una de las aristas. Para aclarar de dónde viene esta idea, consideremos que, si un punto tiene cero dimensiones y un segmento de recta una dimensión, se puede visualizar el segmento de recta como la estela que deja el desplazamiento del punto en una dirección fija. El desplazamiento de la recta en una dirección ortogonal a la recta deja una estela que es un rectángulo, el cual, con las dimensiones adecuadas, puede ser un cuadrado. El prisma recto de base cuadrada es la estela de un cuadrado al desplazarse en una dirección ortogonal al cuadrado. Si la altura es igual al lado de la base, entonces se trata de un cubo. El hipercubo de cuatro dimensiones es un caso particular de una estela de un cubo desplazándose en una dirección ortogonal a las otras tres. Aunque esto ya no lo podemos visualizar, mucho se puede decir sobre este cuerpo y se puede dibujar en perspectiva al proyectarlo en un espacio de dos o tres dimensiones. Un hipercubo proyectado a tres dimensiones y visto como esqueleto

con alambres entre los vértices se podría ver como dos cubos (una posibilidad es dibujar un cubo dentro de otro) con alambres que conectan los ocho vértices del primer cubo con los ocho vértices correspondientes del segundo cubo. Si a uno de estos hipercubos le cortamos una de sus esquinas por medio de un hiperplano inclinado, se formaría un simplejo con cuatro hiperplanos (estructuras tridimensionales) mutuamente ortogonales que tendrían un punto cuadrimensional en común (en cuatro dimensiones cuatro hiperplanos en posición arbitraria –es decir, que no se presentan ciertos paralelismos– determinan un punto), el cual correspondería al vértice del ángulo triedro (en este caso sería un ángulo tetrahiperédrico) del tetraedro del artículo. Este cuerpo sería la generalización a cuatro dimensiones del tetraedro, y si sus cuatro hiperplanos tetraédricos tuvieran “áreas”  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  y  $(D)$  y el “área” del tetraedro en el hiperplano oblicuo tuviera “área”  $(E)$ , se cumpliría

$$(E)^2 = (A)^2 + (B)^2 + (C)^2 + (D)^2$$

una obvia extensión del teorema extendido de Pitágoras demostrado en este artículo. La demostración procedería describiendo un experimento de pensamiento que comenzara por poner el simplejo en posición tal que el origen del sistema de coordenadas cartesianas coincidiera con el vértice tetraédrico tetraarrectángulo y que los cuatro tetraedros trirectángulos estuviesen en los hiperplanos coordenados

$$w - x - y, \quad w - x - z, \quad w - y - z, \quad x - y - z$$

Posteriormente, se harían las mismas acciones que se hicieron para el tetraedro adaptándolas a la circunstancia de que se trabaja en cuatro dimensiones. Si se trabaja analíticamente, se puede definir el simplejo<sub>4</sub> (o versión cuadrimensional del tetraedro) por medio de desigualdades lineales.

Dada la dificultad de visualización, conviene proceder analíticamente. Los puntos en cuatro dimensiones serían cuartetos de números  $v = (w, x, y, z)$ . Una arista con extremos  $v_1 = (w_1, x_1, y_1, z_1)$ ,  $v_2 = (w_2, x_2, y_2, z_2)$  se puede representar paramétricamente por medio de la expresión

$$v(t) = v_1 \cdot (1 - t) + v_2 \cdot t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Un hiperplano de extensión infinita en cuatro dimensiones queda representado por una ecuación lineal en las cuatro variables  $w, x, y, z$  utilizadas para representar un punto, es decir

$$aw + bx + cy + dz + e = 0$$

con  $a, b, c, d$  y  $e$  números reales fijos. (Si estuviéramos en tres dimensiones, solamente se tendrían tres variables y la ecuación representaría un plano bidimensional infinito). Para representar cuerpos finitos se utilizan desigualdades. Por ejemplo, para representar un hipercubo con centro en el origen y lados con longitud 2 sobre los ejes coordenados que incluye superficie e interior, se puede escribir

$$|w| - 1 \leq 0, |x| - 1 \leq 0, |y| - 1 \leq 0, |z| - 1 \leq 0$$

Si lo que se quiere representar es nada más la superficie del cubo, entonces se agrega la condición de que por lo menos una de las desigualdades se cumpla con igualdad.

Para representar en cuatro dimensiones un simplejo cuyos vértices están dados por los cinco puntos  $a_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$ ,  $a_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})$ ,  $a_3 = (a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})$ ,  $a_4 = (a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44})$  y  $a_5 = (a_{15}, a_{25}, a_{35}, a_{45})$ , en vista de que el simplejo es el *casco convexo* de los vértices, el cuerpo se puede generar como una *combinación lineal convexa* (Winston, 1991, pp. 571-572) de los vértices y, por tanto, se pueden utilizar las siguientes igualdades y desigualdades paramétricas:

$$\begin{aligned} w &= a_{11} t_1 + a_{12} t_2 + a_{13} t_3 + a_{14} t_4 + a_{15} t_5 \\ x &= a_{21} t_1 + a_{22} t_2 + a_{23} t_3 + a_{24} t_4 + a_{25} t_5 \\ y &= a_{31} t_1 + a_{32} t_2 + a_{33} t_3 + a_{34} t_4 + a_{35} t_5 \\ z &= a_{41} t_1 + a_{42} t_2 + a_{43} t_3 + a_{44} t_4 + a_{45} t_5 \\ t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 &= 1 \\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_3 \geq 0, t_4 \geq 0, t_5 &\geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Si de los vértices dados, los cuatro primeros representan los vértices del tetraedro oblicuo, buscar una línea ortogonal a dicho tetraedro equivale a encontrar una línea que sea simultáneamente ortogonal a cada uno de los vectores que representan a los vértices; esto equivale a encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{aligned} a_{11} w + a_{21} x + a_{31} y + a_{41} z &= 0 \\ a_{12} w + a_{22} x + a_{32} y + a_{42} z &= 0 \\ a_{13} w + a_{23} x + a_{33} y + a_{43} z &= 0 \\ a_{14} w + a_{24} x + a_{34} y + a_{44} z &= 0 \end{aligned}$$

Nótese que se han invertido los índices de las  $a_{ij}$  en los coeficientes porque se está utilizando parte de la transpuesta de la matriz de coeficientes de la ecuación anterior. Aunque a primera vista parecería que la única solución del sistema homogéneo sería la solución trivial  $(0, 0, 0, 0)$ , la realidad de las cosas es que la matriz de la ecuación debe ser singular pues, al cortar la esquina al hiper-cubo para formar el simplejo, los cuatro vértices deben quedar precisamente en un hiperplano tridimensional (hay que recordar que para el caso tridimensional en que le quitamos un pedazo a un cubo, los tres vértices del triángulo oblicuo son coplanares, y lo análogo sucede al lograr el triángulo rectángulo, pues al cortar el cuadrado un pedazo, los vértices son colineales), por lo que los cuatro vectores deben ser linealmente dependientes, lo que implica una matriz singular y la existencia de una solución con un parámetro independiente, es decir, un subespacio unidimensional que pasa por el origen (debido a que la solución incluye la trivial). Conocida la expresión de la línea ortogonal, que se puede escribir

$$\begin{aligned} w &= t b_1 \\ x &= t b_2 \\ y &= t b_3 \\ z &= t b_4 \end{aligned} \tag{6}$$

donde los números  $b_1, b_2, b_3$  y  $b_4$  son números fijos y  $t$  puede tomar un valor arbitrario.

Con las ecuaciones (6) y las ecuaciones (5) a las que se elimina el término donde aparece  $t_5$ , se pueden eliminar  $w, x, y, z$  y dejar un sistema de cinco ecuaciones en las incógnitas  $t, t_1, t_2, t_3, t_4$ . (Las desigualdades se pueden ignorar, toda vez que estamos seguros de que el punto donde la recta ortogonal al tetraedro incide con el mismo satisface las desigualdades.) Determinadas las  $t$  de la ecuación (6) (la solución debe ser única), podemos calcular el punto de intersección  $d$  que, al combinarlo con los tríos de puntos  $(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_2, a_4), (a_1, a_3, a_4)$  y  $(a_2, a_3, a_4)$ , forma cuatro tetraedros cuyas hiperáreas (volúmenes por estar en el espacio de tres dimensiones) supondremos que valen  $A, B, C$  y  $D$ . Puesto que los cuatro tetraedros están en el mismo hiperplano del tetraedro cuyos vértices son  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ , cada uno de ellos es ortogonal a la recta descrita por la ecuación

(6). Por otra parte, los tetraedros que están sobre los hiperplanos coordenados  $w - x - y$ ,  $w - x - z$ ,  $w - y - z$ ,  $x - y - z$  y cuyos vértices son respectivamente  $(a_1, a_2, a_3, a_5)$ ,  $(a_1, a_2, a_4, a_5)$ ,  $(a_1, a_3, a_4, a_5)$ ,  $(a_2, a_3, a_4, a_5)$  tienen hiperáreas que son iguales al hiperárea del tetraedro (oblicuo) de vértices  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ , proyectada sobre cada uno de los hiperplanos coordenados.

Como en tres dimensiones, la proyección ortogonal de una región inmersa en un hiperplano sobre un segundo hiperplano se encuentra multiplicando la medida de la región por el coseno del ángulo entre los vectores normales a los hiperplanos. La definición del coseno entre dos vectores que pasan por el origen se apoya en el producto interno entre los vectores. Definimos el producto interno entre los vectores  $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$  y  $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$  por medio de la expresión

$$[g, h] = g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 + g_4 h_4$$

y el coseno del ángulo entre los vectores lo definimos por medio de la expresión (Hadley, 1962, p. 40):

$$\cos (g, h) = [g, h] / |g| |h|$$

donde los cuadrados de las magnitudes  $|g|^2$  y  $|h|^2$  de los vectores están dadas por

$$|g|^2 = [g, g], |h|^2 = [h, h]$$

En realidad, lo importante es que los cosenos de los ángulos con los que se proyecta el hiperárea del tetraedro oblicuo sobre los hiperplanos coordenados:  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  y  $\cos \delta$  son los mismos cosenos de los ángulos con los que se proyectan los tetraedros que están sobre los hiperplanos coordenados (los que forman el ángulo tetra rectangular) sobre el hiperplano oblicuo. *Ésta es la observación crucial de la demostración.* Como la suma de las hiperáreas de los cuatro tetraedros en los que se dividió el tetraedro oblicuo dan el hiperárea de dicho tetraedro, igual que en el caso de tres dimensiones, podemos escribir, llamando a estas hiperáreas  $(A')$ ,  $(B')$ ,  $(C')$ ,  $(D')$ , y  $(E)$  al hiperárea del tetraedro oblicuo

$$\begin{aligned} (E) &= (A') + (B') + (C') + (D') \\ (A') &= (A) \cos \alpha, (B') = (B) \cos \beta, (C') = (C) \cos \gamma, (D') = (D) \cos \delta \\ (A) &= (E) \cos \alpha, (B) = (E) \cos \beta, (C) = (E) \cos \gamma, (D) = (E) \cos \delta \end{aligned}$$

de donde

$$(E) = (A)^2/(E) + (B)^2/(E) + (C)^2/(E) + (D)^2/(E)$$

y, finalmente, multiplicando por  $(E)$  ambos miembros se llega a

$$(E)^2 = (A)^2 + (B)^2 + (C)^2 + (D)^2.$$

Esta última expresión la podemos llamar, con todo derecho, *el teorema extendido de Pitágoras en cuatro dimensiones para el simplejo<sub>4</sub> tetrarrectángulo*. Debe quedar claro que el argumento se puede extender sin dificultad a más dimensiones.

## EJEMPLO NUMÉRICO SENCILLO DEL TEOREMA EXTENDIDO DE PITÁGORAS PARA CUATRO DIMENSIONES

Un simplejo en cuatro dimensiones tiene cinco vértices. Si el simplejo es tetrarrectángulo se pueden hacer coincidir las caras simpliciales que forman el ángulo tetraédrico tetrarrectángulo con los cuatro hiperplanos coordenados  $w - x - y$ ,  $w - x - z$ ,  $w - y - z$ ,  $y - x - z$ , y el vértice correspondiente con el origen de las coordenadas a las cuales hemos llamado  $w$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Para evitar cálculos aritméticos laboriosos, consideraremos un simplejo muy sencillo, cuyos cinco vértices están dados por  $V_w = (1, 0, 0, 0)'$ ,  $V_x = (0, 1, 0, 0)'$ ,  $V_y = (0, 0, 1, 0)'$ ,  $V_z = (0, 0, 0, 1)'$  y  $V_0 = (0, 0, 0, 0)'$ .

Por estar en un espacio de cuatro dimensiones, las caras simpliciales en la frontera del simplejo bajo consideración son tetraedros, cada uno con cuatro vértices y las hiperáreas (volúmenes) elevadas al cuadrado y sumadas deben ser iguales al cuadrado del hiperárea (volumen) del tetraedro oblicuo que se opone al vértice que está en el origen.

A continuación, procedemos a calcular la hiperárea del tetraedro sobre el hiperplano coordenado  $w - x - y$ . El tetraedro tiene como vértices  $V_w$ ,  $V_x$ ,  $V_y$  y  $V_0$ , como se muestra en la figura 6. Como la hiperárea es el volumen del tetraedro, el cual está en tres dimensiones, estamos en terreno familiar. Comenzamos por considerar como base el triángulo rectángulo que está en el plano  $w - x$ , cuyos vértices son  $V_w$ ,  $V_x$  y  $V_0$ . Este triángulo tiene su ángulo recto en el origen y las longitudes de sus dos catetos son unitarias. Por lo tanto, su área es  $1/2$ . La altura

del tetraedro (la cual se mide sobre el eje  $y$ ) es uno. Por lo tanto, el volumen (hiperárea) del tetraedro (que es una pirámide triangular) es  $(1/2)(1/3) = 1/6$ .

Por la perfecta simetría del simplejo, los otros tres tetraedros sobre los otros tres hiperplanos coordenados deben tener el mismo volumen (hiperárea). Si sumamos los cuadrados de los volúmenes de los cuatro tetraedros el resultado es  $4 (1/36) = 1/9$ .

Procedemos ahora a calcular el volumen del tetraedro oblicuo, el cual tiene como vértices  $V_w, V_x, V_y$  y  $V_z$ . La distancia entre cada uno de los seis pares de vértices es  $(2)^{1/2}$ . Como todas las aristas del tetraedro tienen la misma longitud, se trata de un tetraedro regular. Su volumen en función de un lado es (Welchons, Crickenberger y Pearson, 1965, p. 334)

$$v = \frac{e^3(2)^{1/2}}{12}$$

donde  $e$  es la longitud del lado del tetraedro regular. Poniendo el valor  $e = (2)^{1/2}$  se obtiene

$$V = 1/3 \text{ y } V^2 = 1/9$$

por lo que se cumple con el teorema extendido de Pitágoras para este caso.

Para ilustrar cómo se manejan cuatro dimensiones para localizar el punto de cruce de la línea que parte del origen de las coordenadas y es ortogonal al tetraedro oblicuo, determinaremos dicho punto. El hiperplano tridimensional en el que está el tetraedro oblicuo contiene los siguientes puntos, que son vértices del tetraedro:

$$V_w = (1, 0, 0, 0)', V_x = (0, 1, 0, 0)', V_y = (0, 0, 1, 0)', V_z = (0, 0, 0, 1)'$$

Si tomamos una combinación lineal con coeficientes  $t_1, t_2, t_3, t_4$ , generaremos el hiperplano y podremos expresar cualquier punto  $(w, x, y, z)$  del mismo.

$$(w, x, y, z)' = (t_1, t_2, t_3, 1 - t_1 - t_2 - t_3)'$$

El vector ortogonal al hiperplano debe ser ortogonal a los vectores  $(1, 0, 0, -1)$ ,  $(0, 1, 0, -1)$ ,  $(0, 0, 1, -1)$ , por lo que lo podemos escribir

$$\begin{aligned}(w, x, y, z) (1, 0, 0, -1)' &= w - z = 0, \text{ de donde } w = z \\(w, x, y, z) (0, 1, 0, -1)' &= x - z = 0, \text{ de donde } x = z \\(w, x, y, z) (0, 0, 1, -1)' &= y - z = 0, \text{ de donde } y = z\end{aligned}$$

donde  $z$  es un número arbitrario al cual llamaremos  $t_4$ . Un punto arbitrario de la recta ortogonal tendrá coordenadas  $t_4 (1, 1, 1, 1)$ . Igualando el punto arbitrario del hiperplano y de la recta ortogonal tenemos

$$\begin{aligned}(t_1, t_2, t_3, 1 - t_1 - t_2 - t_3)' &= t_4 (1, 1, 1, 1)' \text{ que equivale a } t_1 = t_4, t_2 = t_4, t_3 = t_4, \\1 - t_1 - t_2 - t_3 &= t_4. \text{ De donde } 4 t_4 = 1, \text{ por lo que } t_4 = 1/4, \text{ y, finalmente,} \\(w, x, y, z)' &= (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)'\end{aligned}$$

es el punto buscado.

*Observación:* por la simetría del tetraedro analizado, el punto de cruce coincide con el centro de masa del tetraedro. Si se analiza la estructura del álgebra que se requirió, se puede *conjeturar* que el centro de masa de un simplejo<sub>4</sub> quedará a  $1/5$  de la altura del simplejo (distancia entre su vértice y cara simplicial opuesta). Para el simplejo<sub>5</sub> la distancia sería  $1/6$ , ... , y para el simplejo <sub>$n$</sub>  sería  $1/(n + 1)$ ; éste sería el término general de la secuencia: *segmento de recta* =  $1/2$ , *triángulo* =  $1/3$ , *tetraedro* =  $1/4$ , ...

## CONCLUSIÓN

El teorema de Pitágoras tiene fama de ser el teorema más importante y famoso de todas las matemáticas (Wylie, Jr., 1964, p. 141; Davis y Hersh, 1981, pp. 147-151). Muchas generalizaciones de conceptos matemáticos están íntimamente relacionadas con dicho teorema. Algunos ejemplos son los conceptos matemáticos de "punto" que, aunque proviene de la geometría, se ha generalizado en el álgebra, en las funciones de varias variables, en las ecuaciones diferenciales, en el análisis funcional, en el cálculo operacional. En muchas de estas extensiones se definen las coordenadas como proyecciones sobre vectores unitarios ortogonales y se define la longitud de los vectores y la distancia entre puntos (que en algunos casos son funciones) por medio de generalizaciones del teorema de Pitágoras, que en muchos casos se toma como postulado. Debido a lo anterior, un análisis que sirva para aclarar el significado del teorema de Pitágoras y sus posibles extensiones tiene el potencial de enriquecer el entendimiento de los estudiantes

en varias áreas de las matemáticas. Por esta razón, invertir tiempo y esfuerzo en profundizar en dicho entendimiento será, en general, un tiempo y esfuerzo bien invertido.

En este artículo se utiliza la analogía para demostrar un teorema sobre áreas en un tetraedro trirectángulo utilizando ideas análogas a las que se usan en una de las tantas demostraciones del teorema de Pitágoras. Las ideas principales tienen que ver con proyecciones ortogonales que se pueden definir tanto para puntos, como para líneas, áreas bidimensionales, volúmenes y en general hiperáreas. Al utilizar el concepto de proyección, se vislumbra la posible generalización de la extensión del teorema a cuerpos geométricos en espacios de más dimensiones que tres. La generalización se hace utilizando el álgebra lineal, en la que se tiene toda una teoría  $n$ -dimensional sobre la cual nos podemos apoyar para darle precisión a los conceptos, pese a la dificultad de visualizarlos físicamente. Los conceptos de punto, línea, plano (e hiperplano), arista, cara, longitud, distancia, área (e hiperárea), ángulo, proyección, ortogonalidad se pueden manejar con facilidad usando álgebra lineal dentro de la geometría analítica. Se relacionan conceptos algebraicos como dependencia lineal, combinación lineal y combinación lineal convexa, rango de una matriz y otros, para guiar la intuición. Así, se concluye que, en un espacio de cuatro dimensiones, la intersección de un tetraedro con una línea es un punto y no un segmento de línea, como sucedería en tres dimensiones, debido a que el tetraedro en cuatro dimensiones es una porción de hiperplano que involucra una restricción lineal con cuatro variables y la línea involucra tres restricciones lineales, por lo que la intersección implica restringir  $1 + 3$  dimensiones de las cuatro disponibles, de lo que resulta que la intersección tiene cero dimensiones libres y corresponde a un punto. La situación descrita corresponde en tres dimensiones a la intersección de un plano (una restricción lineal) con una línea (dos restricciones lineales) las cuales agotan la dimensionalidad (3), por lo que el resultado de la intersección es un punto, lo que contrasta con el caso de la intersección de un tetraedro (ninguna restricción lineal en un espacio de tres dimensiones) con una recta (dos restricciones lineales) que produce un pedazo de línea. (En la anterior discusión ignoramos las restricciones que producen las desigualdades que, al convertirse en igualdades añadiendo una variable de holgura, no implican una restricción en dimensionalidad (Hadley, 1962, p. 72). Todas estas consideraciones se manejan automáticamente en el contexto del álgebra lineal, programación lineal y la teoría de ecuaciones lineales simultáneas.

Además, en el artículo se trata muy brevemente un caso de dualidad, en el que se señala que el tetraedro tiene un dual que es un polígono tridimensional

que corre sobre las aristas de un ortoedro. El polígono obedece la ley del paralelogramo de los vectores, por lo que las áreas se pueden representar por medio de vectores ortogonales a los planos de las áreas, y el teorema extendido de Pitágoras, motivo principal de este artículo, se puede interpretar como un teorema entre líneas (aristas y diagonal máxima del ortoedro) y cuadrados de longitudes de líneas. Esta dualidad se puede llevar a  $n$  dimensiones.

## AGRADECIMIENTO

El autor agradece a su colega, el matemático Mario Rodríguez Green, de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, así como a los revisores anónimos, por haber leído el manuscrito y señalado algunas fallas. Las fallas que persisten son, naturalmente, responsabilidad del autor.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baldor, J.A. (1983), *Geometría plana del espacio y trigonometría*, México, Cultural.
- Brown, S.I. y M.I. Walter (1990), *The Art of Problem Posing*, 2a. ed., Nueva York, Lawrence Erlbaum Publishers.
- Colerus, E. (1948), *Desde el punto a la cuarta dimensión. Una geometría para todos*, 2a. ed., Barcelona, Labor.
- Courant, R. y H. Robbins (1969), *What Is Mathematics?*, Londres, Oxford University Press.
- Davis, P.J. y R. Hersh (1980), *The Mathematical Experience*, Boston, Birkhäuser.
- Flores, A. (1992), "La feria de Pitágoras", *Educación Matemática*, (4) 2, pp. 62-78.
- Gass, S.I. (1966), *Programación lineal-métodos y aplicaciones*, México, Continental.
- Hadley, G. (1962), *Linear Programming*, Reading, MA, Addison-Wesley.
- Jurgensen, R.C., A.J. Donnelly y M.P. Dolciani (1963), *Modern Geometry*, Boston, Houghton Mifflin.
- Larson, R.E. y R.P. Hostetler (1989), *Cálculo y geometría analítica*, 3ª ed., México, McGraw-Hill.
- Moise, E.E. y F.L. Downs (1975), *Geometry*, Menlo Park, CA, Addison-Wesley.
- Polya, G. (1954), *Mathematics and Plausible Reasoning. Vol. I: Induction and Analogy in Mathematics. Vol. II: Patterns of Plausible Reasoning*, Princeton, N.J., Princeton University Press.

- Polya, G. (1965), *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas.
- (1981), *Mathematical Discovery-On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving* (vols. I y II), Nueva York, John Wiley & Sons.
- Seely, F. B. y N. E. Ensign (1948), *Mecánica analítica para ingenieros*, México, Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.
- Taylor, A. E. (1958), *Introduction to Functional Analysis*, Nueva York, John Wiley & Sons.
- Thomas, G. B. (1960), *Calculus and Analytic Geometry*, Reading, MA, Addison-Wesley.
- Welchons, M.A., W.R. Krickenberger y H.R. Pearson (1965), *Solid Geometry*, Boston, MA, Ginn and Company.
- Winston, W. L. (1991), *Investigación de operaciones-aplicaciones y algoritmos*, México, Iberoamérica.
- Wylie, Jr., C. R. (1964), *Foundations of Geometry*, Nueva York, McGraw-Hill.

## **DATOS DEL AUTOR**

---

**Marco A. Murray-Lasso**

Departamento de Ingeniería de Sistemas, Unidad de Enseñanza Auxiliada por Computadora,  
División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional  
Autónoma de México, México  
walpole@prodigy.net.mx

