

Análisis de un modelo didáctico para la enseñanza/aprendizaje del orden de las fracciones

Carmen Cubillo y Tomás Ortega

Resumen: El origen de esta investigación hay que situarla en las aulas de Enseñanza Secundaria en el curso 1992-1993, cuando la profesora constata las dificultades que tienen los alumnos para comprender el orden de las fracciones. Tras hacer un análisis de la bibliografía sobre el tema, se diseña un modelo de investigación en el marco de la investigación-acción, donde desempeña un papel muy importante la metodología de aula inspirada en la teoría de la gestión mental debida a A. de La Garanderie. Tras detectar las dificultades de aprendizaje más relevantes acerca del orden y representación de las fracciones en la recta, 1994-1995, siguiendo el modelo de gestión mental, se diseña un material de trabajo, a fin de analizar el proceso de enseñanza/aprendizaje, que se implementa en el curso 1995-1996. En el artículo se muestra cómo este modelo facilita el proceso didáctico y, a la vez, proporciona información suficiente para analizar qué conocimiento han adquirido los alumnos con esta metodología.

Palabras clave: orden, representación, fracciones, gestión mental.

Abstract: This study dates from the author's classroom experience in secondary education in the 1992-1993 school year, when she discovered the difficulties students had in grasping the order of fractions. After analysing the existing literature, a model was designed in the framework of active investigation, inspired in A. de la Garanderie's mental management theory model, where classroom methodology plays a fundamental role. After identifying the most important learning difficulties relating to the order and representation of fractions (1994-1995), we have followed the mental management model proceeding to design classroom material conducive to analysing the teaching-learning process, which was used in the classroom during the 1995-1996 school year. This article shows how the model facilitates the learning process while providing enough information to analyse what students have learned using this methodology.

Key words: order, representation, fractions, mental management.

Fecha de recepción: mayo de 1999.

1. INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas ha sido contemplado, hasta hace no mucho tiempo, desde una perspectiva predominantemente formalista, dando demasiada importancia al lenguaje simbólico, a la coherencia sintáctica y a la estructura lógica. La actividad matemática no se limita a puros actos formales en el vacío y, como toda actividad intelectual, es una actividad humana en un contexto cultural que se ve afectada por la interacción con otras personas, una modificación de las relaciones de los estudiantes con las matemáticas implica que los contenidos de esta disciplina y la disponibilidad de herramientas bajo su control tomen un significado diferente. Es en este sentido como los trabajos de Vygotski han servido para dar una nueva base teórica a la conceptualización de las relaciones entre aprendizaje y enseñanza.

En el vasto campo de la investigación educativa, se pueden distinguir orientaciones distintas, frente a la orientación positivista tradicionalmente predominante, cuyo modelo de referencia se sitúa en las ciencias naturales. Poco a poco se ha ido abriendo camino una orientación diferente que entiende la educación como un campo complejo en el que es difícil aislar variables para demostrar objetivamente su influencia en el conjunto. Los nombres bajo los cuales se presenta son variados y responden a matices diferenciables o a preferencias personales: investigación naturalística, investigación etnográfica, investigación cualitativa, estudio de casos, etc. A veces estas diferencias son más profundas, como pone de relieve el prólogo crítico de L. Smith a la obra de Hammersley (1990).

Con la corriente conocida con el nombre de investigación-acción (IA), que ha alcanzado un notable desarrollo en Gran Bretaña y cuyos ecos se pueden encontrar en los documentos oficiales de la reforma educativa española, se pretende vincular investigación, formación permanente, acción educativa y, como consecuencia, desarrollo curricular (Stenhouse y Elliott, 1986).

El origen de nuestra investigación está en el aula, donde la profesora-investigadora observó cómo ciertos alumnos, que presumiblemente debían superar con éxito problemas relacionados con el orden de las fracciones, fallaban de manera reiterada. Con la idea inicial de analizar esta situación, se concibió un proyecto de investigación en el marco del “estudio de casos”, se preparó un material curricular adecuado, se implementó utilizando una metodología inspirada en un “modelo de gestión mental” (MGM) y se analizaron los resultados que material y metodología produjeron en los alumnos.

En la elaboración del material curricular que utilizarían los alumnos para el estudio del “orden en las fracciones”, tema del currículo de Educación Secundaria Obligatoria, se han considerado los estudios existentes sobre el orden en las fracciones y se han tenido en cuenta los tres factores que justifican este estudio: por una parte, el enfoque que se adopta en el Diseño Curricular Base de Matemáticas del Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) sobre conocimiento numérico; por otra, las distintas corrientes sobre teoría del aprendizaje; y, por último, la filosofía que inspira las teorías de A. de La Garanderie (1983), esto es, la “gestión mental” (GM), que él define como “la capacidad de generar recursos intelectuales”. Las actuaciones de aula se llevaron a cabo durante los cursos 1994-1995 y 1995-1996, en un grupo de 1º de Bachillerato Unificado Polivalente (BUP) de estudios nocturnos (con edades comprendidas entre 15 y 25 años), en un Instituto de Enseñanza Secundaria de Valladolid.

2. PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

Una de las primeras necesidades que surgieron al iniciar la investigación fue la de revisión, información y análisis de aquellas investigaciones que se refirieran al problema que se iba a estudiar. Teniendo en cuenta que el aprendizaje del orden en las fracciones presenta dificultades para los alumnos, tanto de tipo de comprensión conceptual como de destrezas de cálculo, nos fijamos en aquellas investigaciones que trataban de detectar esas dificultades y su origen para, a partir de su conocimiento, proponer soluciones alternativas en su enseñanza/aprendizaje.

La dificultad de la comparación de dos fracciones puede variar mucho dependiendo de los enteros que figuren en los numeradores y denominadores. Hart (1980) observó que 66% de los chicos de 15 años se daban cuenta de que $\frac{3}{10}$ era mayor que $\frac{1}{15}$. Noelting (1980) realiza una experiencia durante su trabajo en Quebec y confirma que la dificultad de la comparación de razones, o de fracciones, puede variar enormemente, dependiendo de las relaciones entre los números.

Una forma de usar la equivalencia es hallar una fracción comprendida entre otras dos: Hart (1980) halló que sólo 21% de los chicos de 15 años lo resolvían con éxito. Brown (1981) observa que, incluso a los 15 años, son pocos los alumnos que imaginan la recta numérica con un número infinito de números racionales entre cada par de enteros; recoge datos sobre aproximación, lectura de escalas

y comparación de magnitudes, aspectos, todos ellos, relacionados con la noción de equivalencia, y observa las dificultades que se generan en chicos de hasta 15 años, señalando que sólo 35% de ellos sabe seleccionar el menor número decimal de una serie de decimales dados. Una encuesta sobre adultos, encargada por la Comisión Cockcroft (1981), puso de manifiesto la incapacidad para comprender los porcentajes. Hart (1981) pone de manifiesto que tan sólo una minoría de alumnos de secundaria comprende realmente la equivalencia en el contexto de razones, decimales y porcentajes. El problema, según este autor, está en el vacío que existe entre los ejemplos concretos, el sombreado y el plegado de papel, y la resolución para realizar con éxito problemas en los que sólo intervienen números. Post (1985) señala que, para realizar con éxito la tarea de ordenación de fracciones, es necesario partir de contextos discretos.

Ésta sólo es una muestra de los muchos estudios sobre el tema, pero se observa que todos ellos se centran en analizar dificultades de los alumnos en la comprensión del orden de las fracciones; sin embargo, no aparecen evaluadas estrategias de enseñanza. Para nosotros el proceso es muy importante y en este estudio ocupa un lugar destacado.

Tras revisar los planteamientos del Currículo de Matemáticas de Educación Secundaria, teniendo en cuenta los distintos enfoques de las teorías del aprendizaje, nos ocupamos del “cómo enseñar” y analizar el proceso de enseñanza/aprendizaje del orden de las fracciones y la representación gráfica de las fracciones en la recta. Nuestra metodología está inspirada en la teoría de la GM en matemáticas debida a A. de La Garanderie y nuestra hipótesis de trabajo es que el MGM facilita este proceso didáctico y, a la vez, proporciona información suficiente para analizar qué conocimiento han adquirido los alumnos con esta metodología; supuestos que nos obligan a esbozar a continuación un resumen de ella.

Los trabajos de A. de La Garanderie sobre GM se insertan dentro de las corrientes de investigación actuales, orientadas a descubrir el funcionamiento del cerebro. Se tienen, así, ideas más precisas sobre los procesos que permiten que los aprendizajes se desarrollen en mejores condiciones. Los datos recogidos durante largos años con sus alumnos le permitieron identificar diferentes “perfiles de aprendizaje”. Estos “perfiles” se organizan alrededor de “hábitos mentales” casi inconscientes, que ponen en práctica los verdaderos “gestos mentales”, siendo estos últimos los que permiten describir, comparar y aprender; de ahí que A. de La Garanderie define la GM como una capacidad de generar recursos intelectuales. Este autor considera que son cinco los gestos mentales diferentes que revisten la mayor importancia en las actividades de aprendizaje, y éstos son: *la atención*,

Cuadro 1 Esquema de J.P. Chich (1991) de los tres códigos de aprendizaje según el MGM

“yo percibo la información”	REPRESENTACIÓN mental de la información = EVOCCIÓN codificación cortical	“yo manifiesto que he comprendido”
PRESENTACIÓN de la información = codificación perceptiva	¡SILENCIO! “yo la trato mentalmente...”	UTILIZACIÓN de la información = codificación de transferencia
PROYECTO DE EVOCCIÓN = ATENCIÓN	PROYECTO DE RESTITUCIÓN	Evaluación posible

la memorización, la comprensión, la reflexión y la imaginación. Se tienen así, a partir de este MGM, ideas más precisas sobre los procesos que permiten desarrollar los aprendizajes en mejores condiciones y, por tanto, las directrices metodológicas.

La investigación emprendida por La Garanderie con los “buenos alumnos” le ha permitido observar que éstos, en esa trayectoria de aprendizaje que va desde la presentación de una información hasta su utilización, más o menos conscientemente, efectúan una etapa intermedia que es la de la evocación. Estas tres fases, presentación evocación y utilización, son necesarias para que se produzcan las modificaciones de los conocimientos previos, y se permita así alcanzar los nuevos conocimientos.

En conclusión, el proyecto de la GM consistirá en explicitar las diferencias existentes entre la percepción, la evocación y la utilización de los conocimientos adquiridos en el proceso de aprendizaje. Un esquema que refleja la relación entre esos tres códigos del aprendizaje se debe a J.P. Chich (1991) y se representa en el cuadro 1.

Al tratar de secuenciar los pasos que se dan en la enseñanza de las matemáticas, según el modelo de GM, hemos tenido en cuenta la secuencia que establece J.P. Chich, que indica los pasos que se deben seguir en el desarrollo de una unidad de contenidos. Nosotros, tanto en la elaboración del material para el alumno sobre el “orden en las fracciones” como en las actuaciones en el aula, hemos seguido esas pautas de trabajo, motivo por el que se reproducen aquí. Son éstas:

1. Enunciado del contenido.
2. Evocación de los conocimientos previos.
3. Posibles aplicaciones.

4. Presentación diferenciada. (De los aspectos conceptuales y procedimentales por potenciar, teniendo en cuenta el desarrollo de los parámetros y familias que caracterizan a cada propuesta.)
5. Diálogo pedagógico sobre las aplicaciones.
6. Presentación diferenciada. (Completa la visión de los contenidos de la unidad con el mismo tratamiento anterior.)
7. Diálogo pedagógico sobre conocimientos adquiridos.

A continuación, se presenta una muestra del material elaborado para el alumno en el que aparecen señaladas de manera explícita estas pautas de implementación.

3. MATERIAL DEL ALUMNO

Así pues, las siete pautas de implementación sirven de organizadores del material del alumno y, junto a ellas, en las presentaciones diferenciadas, aparecen las familias, evocaciones visuales (EV) y evocaciones auditivas (EA), y los cuatro parámetros definidos por A. de La Garanderie como indicadores de los niveles de aprehensión de la realidad: P1 y P2 que evocan las operaciones “simples”, y P3 y P4 que evocan las operaciones complejas que requieren una transformación del contenido. La eficacia en el aprendizaje, según J.P. Chich, pasa por la capacidad de evocar en todos los parámetros. Como ejemplo se muestra una síntesis del material elaborado para el aprendizaje del orden y de la representación de las fracciones, y que se implementó en el segundo ciclo. Como puede verse en la secuencia didáctica que se presenta a continuación, la evocación desempeña un papel fundamental en el proceso de aprendizaje, se hace presente en cuanto se termina de enunciar una actividad y, en esta metodología, constituye el fundamento de la situación de aprendizaje, ya que es la base de la decisión del alumno, la aplicación, y se relaciona con los cinco gestos mentales mediante una secuenciación de acciones.

3.1. ENUNCIADO DEL CONTENIDO

- Contenidos por tratar: ordenación y representación en la recta numérica de fracciones y decimales.

- Revisión de conocimientos previos.
- Actividades iniciales.

3.2. EVOCACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Necesitas recordar.
- Ordenación y representación de N y Z .
- Los números racionales, equivalencia, distintos usos de las fracciones.

3.3. POSIBLES APLICACIONES

Los contenidos que vamos a trabajar nos servirán para resolver ejercicios como los siguientes:

- Dos amigos están discutiendo sobre el siguiente asunto: uno ha caminado las $\frac{2}{3}$ partes de un trayecto de 1.5 km. y el otro las $\frac{4}{5}$ partes del mismo recorrido. No se ponen de acuerdo sobre quién anduvo más. ¿Podrías resolver esta duda, razonando la respuesta?
- Tomando como unidad un segmento $[CD]$, dibuja otros segmentos que representen $\frac{1}{2}$ de $[CD]$, $\frac{2}{3}$ de $[CD]$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$, ... y ordénalos de menor a mayor.
- Representa en la recta: $\frac{2}{3}$, $(-1)/5$, $7/4$, ...

3.4. DIFERENTES FORMAS DE PRESENTAR LA ORDENACIÓN Y REPRESENTACIÓN NUMÉRICA DE NÚMEROS RACIONALES

Ya hemos estudiado cómo distinguir dos fracciones equivalentes. Intentaremos dar un paso más tratando de averiguar cuándo una fracción es mayor que otra.

EV/P2,P3. Trata de evocar mentalmente los criterios de ordenación.

EA/P2,P3. Existen diversos criterios para ordenar fracciones:

- 1) *Toda fracción positiva será siempre mayor que cualquier fracción negativa.*
- 2) *Pasar las fracciones a decimales.*

Un buen criterio para comparar decimales es escribirlos todos con igual número de cifras, lo cual es posible añadiendo ceros a la derecha y posteriormente comparar las cifras que ocupen un mismo lugar. Así, de 2.012 y 2.120 Ψ $2.012 < 2.120$.

EV/P2,P3. Mentalmente, ¿cómo ordenarías los números 0.1, 0.23, 0.115? Inténtalo de nuevo con los números: 2.045, 2.17, 3.8, 3.569.

EA/P2,P3. 3) Caso de varias fracciones. Para ordenar $1/4$, $2/5$, $3/8$, se reducen un común denominador $10/40$, $16/40$, $15/40$ y el orden de éstas implica el de las de partida: $1/4 < 3/8 < 2/5$.

EV/P2,P3. Piensa en este nuevo método de ordenación e intenta mentalmente comparar $2/5$ y $3/10$.

EV/P4. Piensa en ejemplos que te ayuden a contestar las siguientes preguntas: de dos fracciones que tienen el mismo denominador, ¿cuál es mayor?, ¿por qué?

EV/P4. Piensa en algún procedimiento para calcular números que estén comprendidos entre dos fracciones dadas.

EA/P4. Encuentra fracciones: a) entre $1/7$ y $5/7$, entre $2/9$ y $5/9$; b) entre $1/3$ y $4/5$.

EA/P3. Dos hermanos tienen como edades los $2/5$ y los $4/7$ de la edad de su padre: a) ¿cuál es mayor?; b) ¿es necesario conocer la edad del padre para saberlo?, ¿por qué?

EA/P3. A una persona golosa le ofreces las siguientes porciones de tarta: $1/3$, $1/4$ y $2/5$; a) ¿cuál de esas porciones elegiría?, b) ¿por qué?

EA/P3. Ordena de mayor a menor las fracciones que representen, respecto del total, las áreas oscurecidas. Figura 1.

EV/P3. Recuerda mentalmente cómo hacías para representar gráficamente números enteros.

EA/P3. Otra manera de ordenar fracciones consiste en representarlas gráficamente. Vamos a representar gráficamente $1/3$ y $2/3$, dando los pasos siguientes (figura 2):

- 1) Tomamos un segmento como unidad [OU].
- 2) Trazamos una recta r que pase por O y transportamos un segmento de medida "u" tres veces.
- 3) Unimos el extremo P con el punto U y trazamos paralelas a [PU] por M y N . Los puntos de corte del segmento [OU] representarán $1/3$ y $2/3$ respectivamente.

Figura 1

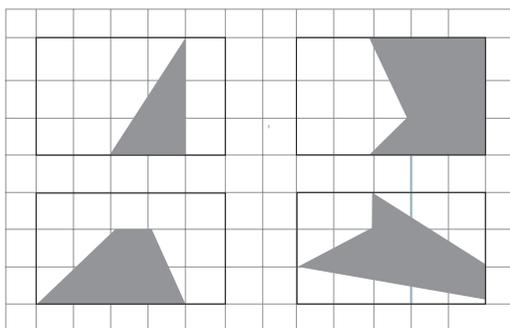
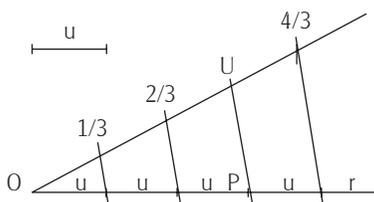


Figura 2



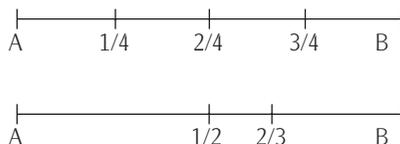
EA/P3. Si dos fracciones son equivalentes, ¿cómo las representarías gráficamente?

EA/P3. Trata de evocar visualmente los pasos seguidos para construir una fracción.

3.5. Diálogo pedagógico sobre aplicaciones

- Toma un segmento de partida.
- Ejercita la práctica de ordenación de fracciones, haciendo tus propias propuestas.
- Si utilizando el segmento de partida, las fracciones que quieres representar tienen denominador distinto, ¿qué pasos darías para representarlas sobre él?
- Generaliza la estrategia de representación de fracciones en el caso de números comprendidos entre el 2 y el 3.

Figura 3



3.6. PRESENTACIÓN DIFERENCIADA

EA/P3.

- 1) $1/4 < 2/4 < 3/4$ Si las fracciones tienen igual denominador, es mayor la que tiene mayor numerador. Figura 3.
- 2) Si queremos representar fracciones con distinto denominador como $1/2$ y $2/3$, las reducimos a común denominador, en este caso es 6, y luego representamos sus fracciones equivalentes $3/6 < 4/6$.
- 3) Si las fracciones tienen igual numerador $3/2$ y $3/6$, es mayor la de menor denominador $3/2 > 3/6$.

EV/P3. Trata de evocar los criterios establecidos para ordenar fracciones.

EV/P3. Ordena mentalmente: 1) $1/5, 4/5, 2/5, 3/5$; 2) $3/6$ y $2/4$; 3) $2/3$ y $3/5$.

EA/P3. Utiliza tu calculadora: $7/6$ en forma decimal es 1.1666...

- a) escribe otra fracción que sea un poquito mayor que $7/6$;
- b) escribe la diferencia en forma decimal;
- c) escribe otras fracciones que hagan esta diferencia cada vez menor.

EV/P3. Intenta buscar el camino para representar fracciones cuyo numerador sea mayor que el denominador.

EV/P3. Y si las fracciones son negativas, ¿qué harías para representarlas?

EA/P3. También hay fracciones como éstas: $11/2, 17/4, 67/10$. Para representarlas gráficamente tendremos en cuenta que $11/2 = 5 + 1/2, 17/4 = 4 + 1/4, 67/10 = 6 + 7/10$.

Si las fracciones son negativas, su representación en la recta se haría como en el caso de fracciones positivas, pero a la izquierda del cero.

EV/P3. Ordena de menor a mayor los siguientes decimales:

- a) 0.2, 0.18, 0.103, 0.0780, 0.0091;
- b) 0.1, 0.3, 0.21, 0.42, 0.125, 0.250.

3.7. DIÁLOGO PEDAGÓGICO SOBRE LOS CONOCIMIENTOS ADQUIRIDOS

- Hemos trabajado orden y representación gráfica de fracciones.
- Haz un esquema de estos contenidos.
- Lee de nuevo el apartado 3.3, ¿estás preparado para darle respuesta?

Así pues, trabajamos en el aula el orden de las fracciones, aplicando el MGM, que induce a poner en práctica situaciones de aprendizaje variadas e investigar cómo la incorporación del MG en el proceso de enseñanza/aprendizaje introduce variaciones en la comprensión de los alumnos respecto al orden en las fracciones.

Para lograr la información necesaria que nos permita dilucidar si se alcanza este objetivo, nos propusimos una serie de actuaciones que nos faciliten la recopilación de información para el análisis del conocimiento que los alumnos han adquirido por la secuencia de actuaciones que el modelo establece:

- Valorar la comprensión de los alumnos sobre cómo ordenan las fracciones, antes de iniciar la experiencia.
- Practicar de manera sistemática las secuencias del modelo al presentar los contenidos.
- Poner de manifiesto la comprensión de los alumnos sobre el tema objeto de estudio mediante el análisis y valoración de las transcripciones de aula, de las tareas y distintas pruebas de conocimientos hechas por los alumnos durante la experiencia.

4. FOCOS DE INVESTIGACIÓN Y MARCO METODOLÓGICO

Para desarrollar la planificación de las actuaciones, hemos establecido dos “focos de investigación”. El primero focaliza la búsqueda de las causas que originan las dificultades de enseñanza/aprendizaje del orden y de la representación gráfica de las fracciones en la recta, mientras que en el segundo foco se analizarán las potencialidades que genera en los alumnos el MGM al desarrollar estos temas. Más explícitamente, en el primer foco se investigará el tipo de relaciones que establecen los alumnos respecto al orden y representación en la recta de las fracciones, utilizando como material su libro de texto, y qué tipo de dificultades se presentan con mayor frecuencia. En el segundo foco se valorará la comprensión que muestran los alumnos sobre el orden de las fracciones y su representación en la recta cuando en el proceso de enseñanza/aprendizaje se aplica el MGM.

Hemos creído que la IA presenta el marco metodológico que mejor se adapta a nuestra investigación ya que, por una parte, *tiene en cuenta los valores vitales del grupo* (Elliott, 1990), nuestro grupo experimental tiene unas características especiales (edad de los alumnos, muchos trabajan, son de estudios nocturnos) y, por otra, según Kemmis y McTaggart (1988), Hopkins (1985), la IA ayuda a interpretar el ambiente de aula y a entender la práctica docente para mejorarla, buscando para ello entender mejor cuáles son sus contextos y condicionantes. Las cuatro etapas fundamentales de que consta la investigación-acción (planificación, acción, observación y reflexión), que son explicadas por Kemmis y McTaggart (1988, pp. 16-20), entran en juego en torno a una “preocupación temática”, de forma dinámica e integrada. La *planificación* –elaboración de un plan– debe anticipar y prever tanto la acción como las formas de observación, aunque debe ser lo suficientemente flexible para adaptarse a las situaciones imprevistas que se producen en la práctica. La acción diseñada por el plan debe tener en cuenta los riesgos que pueden implicar un cambio social y reconocer las limitaciones reales, materiales y políticas de la situación; además, debe ser elegida de tal modo que permita a los profesionales actuar más eficazmente, que los ayude a traspasar las limitaciones actuales, y que los convierta en más efectivos como educadores. La *acción* está guiada y es controlada por la planificación, pero debe estar abierta a los cambios que se puedan producir, y dispuesta a la negociación y al compromiso, pues se desarrolla en una realidad viva, dinámica, y sujeta a limitaciones. La acción debe ser examinada en el contexto en el que tiene lugar, para, posteriormente, ser evaluada. Así pues, se trata de una acción observada. La *observación* –recopilación de datos durante la acción– tiene por misión documentar la acción y proporcionar una base para la reflexión. Los investigadores deben observar el proceso de la acción, sus efectos, sus circunstancias y sus limitaciones. La observación se guiará con la finalidad de obtener una base fiable para la introspección crítica, y también debe ser lo suficientemente flexible y abierta para registrar lo inesperado. El objetivo de la *reflexión* consiste en describir y valorar los procesos, problemas y restricciones que se han puesto de manifiesto en la acción. La reflexión sirve de base para una nueva planificación, con lo que se pone en marcha otro ciclo.

En la práctica, el proceso de IA comienza con la identificación de la “idea general” de una situación educativa que es susceptible de mejora y, después de delimitar el problema de investigación, el equipo diseña un plan de actuación, lo ejecuta, lo evalúa y elabora un segundo plan que tenga en cuenta dicha evaluación, lo ejecuta, lo evalúa y elabora un tercer plan... Este proceso de peldaños he-

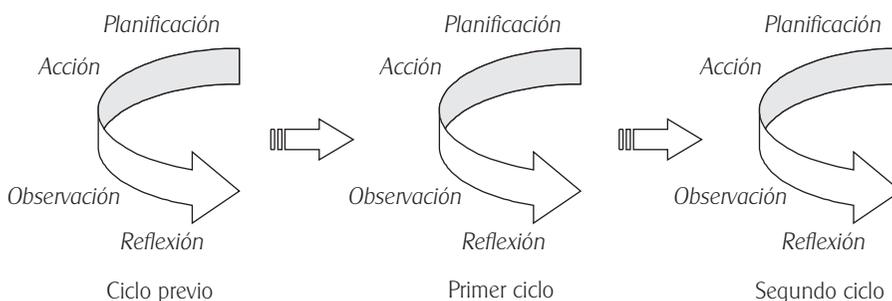


Gráfico 1

licoidales, que fue descrito por Lewin, se puede explicitar en el gráfico 1, que está inspirado en Kemmis y McTaggart.

A finales del curso 1992-1993, la exploración y análisis de los hechos por describir, el diseño del “plan general”, el desarrollo y verificación o control de los pasos de la acción, la explicación y superación de los obstáculos y efectos y, finalmente, la revisión de la “idea general” para proponer un nuevo “plan rectificado” configuran un *ciclo previo de exploración*, y de él hacen que cada foco de investigación dé lugar a un ciclo de investigación. El desarrollo de ambos ciclos requiere una planificación de las sesiones, un análisis del contenido, unas estrategias para su organización y presentación en el aula, y un procedimiento de observación que nos permita captar los fenómenos de comprensión de los alumnos.

En el primer ciclo se aplicaron los principios metodológicos de la GM, utilizando el libro de texto de los alumnos, creando un clima de confianza, favoreciendo el diálogo y la participación de los alumnos, tanto de manera individual como en pequeños grupos, tratando de enlazar los nuevos saberes con los que ya tenían, poniendo en práctica estrategias que permitieran detectar las dificultades que tienen los alumnos en relación con estos contenidos. La planificación del primer ciclo se da por concluida en septiembre de 1994, la acción se lleva a cabo en noviembre, y la fase de observación se desarrolla analizando, mediante un modelo descriptivo, las diversas fuentes de recopilación de datos: diario de la profesora-investigadora, diario de la observadora externa, cuadernos y pruebas de los alumnos y grabaciones de audio, que son revisadas por el equipo investigador. Así, por ejemplo, las respuestas emitidas en el siguiente ejercicio nos muestran las dificultades que tienen en la ordenación de las fracciones y, por tanto, los niveles de aprendizaje.

Dos hermanos tienen como edades los $\frac{2}{5}$ y los $\frac{4}{7}$ de la edad del padre. ¿Cuál de los hermanos es mayor? Razona la respuesta por escrito.

Valoración:

- No contesta; 0.
- Compara las fracciones y no lo hace adecuadamente; 1.
- Interpreta adecuadamente el enunciado del problema; 2.
- Compara las fracciones aplicándolas como operador una cantidad fija; 3.
- No justifica por qué uno de los hermanos es mayor que el otro; 4
- Compara las fracciones pasándolas a decimal; 5

Bien; 6.

Tipos de respuesta	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	5	7	9	3	2	1	4
Porcentaje	16.1	22.6	29	9.7	6.5	3.2	12.9

Sólo 12.9% hace bien el problema, 16.1% no hace nada, 22.6% compara las fracciones pero lo hace mal. Veintinueve por ciento entiende el problema pero no lo resuelve ...

El análisis de los datos permite hacer una serie de reflexiones que se enuncian después y se tienen en cuenta para planificar el segundo ciclo. Así, lo primero que se hace es elaborar un material didáctico para los alumnos que permita desarrollar todos los contenidos, contemplando los principios metodológicos del MGM, como se ha descrito en el ejemplo anterior, y que su implementación permita recopilar los datos necesarios para observar los fenómenos de comprensión de los alumnos:

- Si las distintas representaciones de las fracciones ayudan en la comprensión e interpretación del orden.
- Si tienen en cuenta los distintos criterios de ordenación con fracciones de igual numerador, con fracciones de igual denominador, con fracciones de denominadores cualesquiera.
- Si el orden lo establecen a partir de los signos que acompañan a las fracciones.

- Si al pasar de fracción a decimal y comparar los decimales les facilita la tarea de interpretación del orden.
- Si la representación geométrica de una fracción en la recta numérica favorece la interpretación del orden.

Las cuestiones específicas de este segundo foco permiten valorar la comprensión de los alumnos en relación con el orden de las fracciones durante el trabajo de campo. Lo mismo que en el ciclo anterior, se realiza un análisis detallado de todo el proceso de enseñanza/aprendizaje, utilizando las siguientes fuentes: diario de la profesora/investigadora, los cuadernos de los alumnos, las pruebas realizadas por los alumnos, las transcripciones de audio de las sesiones del trabajo de aula.

A fin de evaluar tanto el trabajo realizado en la organización de los contenidos como la comprensión mostrada por los alumnos en torno a los conocimientos desarrollados en el aula, en este segundo ciclo el diseño de un sistema de categorías formado por categorías de interacción didáctica (CID), categorías de contenido matemático (CCM) y categorías de comprensión del contenido (CCC) ha facilitado el análisis de todos los datos recogidos.

Las CID tienen por objeto analizar la comunicación verbal durante las sesiones de trabajo. Éstas son algunas: motivación, exposición, reflexión, actividades, síntesis, cuestión o pregunta del profesor, respuestas del profesor, cuestiones o preguntas de los alumnos, respuestas de los alumnos, trabajo en equipo, interacciones abiertas, etcétera.

Los múltiples elementos que hay que tener en cuenta en las CCM son: hechos, conceptos, explicaciones, procedimientos, normas, actitudes, experiencia personal, etc. Elementos todos que exigen atención independiente. Se han considerado las siguientes:

1. *Criterios para ordenar las fracciones.*
2. *Representación gráfica de las fracciones sobre la recta.*

Para comparar dos números racionales cualesquiera, se tendrá en cuenta los contenidos matemáticos conocidos, es decir se contemplarán:

- Los distintos casos que pueden presentarse al comparar fracciones (que tengan igual numerador, que tengan igual denominador, que tengan el mismo signo, con distinto signo, con denominadores cualesquiera).

- Criterios para comparar decimales.
- Criterios para comparar fracciones y decimales.
- Aplicaciones del orden al estudio de la densidad en los racionales, estrategias de cálculo y práctica con la calculadora.
- Las posibilidades que la geometría aporta para representar gráficamente fracciones en la recta numérica y su aplicación en la ordenación de números racionales.

Por último, las CCM se han elaborado de modo que permitan interpretar la comprensión de los contenidos objeto de estudio y las relaciones establecidas a partir de las actividades realizadas por los alumnos. Con estas categorías analizamos el grado de comprensión de los alumnos en relación con los hechos y destrezas, estructuras conceptuales y estrategias generales de las distintas representaciones de las fracciones y su orden. Se han considerado las siguientes:

1. *Ordenación de números racionales*. Se tendrán en cuenta:
 - 1a) Práctica de estrategias teóricas.
 - 1b) Práctica de estrategias de cálculo con fracciones (equivalencia).
 - 1c) Transformación de fracción en decimal.
 - 1d) Aplicaciones de la geometría en la representación de los números racionales sobre la recta numérica.

5. BALANCE DEL ESTUDIO

Presentamos aquí, por ciclos, la valoración que se ha hecho del análisis de los datos recopilados en cada uno de ellos.

PRIMER CICLO

Como ya se ha indicado, la valoración de este primer ciclo se hace teniendo en cuenta la comprensión del contenido, la forma de interpretarlo y las estrategias de estudio utilizadas por los alumnos.

De la comprensión mostrada por los alumnos sobre los contenidos:

- No todos los alumnos comprenden y utilizan significativamente los conceptos implícitos en el desarrollo de estos contenidos. La variedad de interpretaciones que los alumnos hacen, y que nos permiten establecer el nivel de comprensión alcanzado por ellos, no es homogénea y los errores y concepciones inadecuadas son elevados.

De la manera de abordar, interpretar, responder a cuestiones relativas a los contenidos:

- Insistir en la comunicación oral y escrita de los alumnos para dar significado a los contenidos, incluso cuando esos contenidos son ya conocidos por los alumnos.
- Establecer, siempre que sea posible, las diferencias entre conceptos y procedimientos.
- Practicar el análisis y la síntesis dentro de la experiencia de aula.
- Insistir en la lectura comprensiva de los textos y en la interpretación oral y por escrito que verifiquen de ella.

De la observación de las estrategias de estudio utilizadas por los alumnos:

- Favorecer la práctica de un modelo de estudio y de trabajo en el aula.
- Animar a la lectura de las anotaciones y actividades de sus cuadernos y hacerlos tomar conciencia de que es una forma de estudio de las matemáticas.
- Insistir en una metodología en la resolución de problemas.
- Desarrollar la atención en clase como acción para llevar a la práctica unos conocimientos.
- Desarrollar estrategias de trabajo que faciliten la práctica de iniciativas personales por los alumnos.

SEGUNDO CICLO

La reflexión sobre los resultados de esta fase que hacemos a continuación se fundamenta en la información recopilada durante el desarrollo de la experiencia en las transcripciones, en las tareas y en las pruebas escritas, tomando como soporte referencial los objetivos perseguidos y las categorías diseñadas. A continuación, se presentan las reflexiones más destacadas.

De las transcripciones

- Los alumnos comprenden la comparación de fracciones de distinto signo por el paralelismo que establecen con la comparación de números enteros; esta tarea se complica al comparar decimales. Nuestros resultados confirman los obtenidos por Post (1985) que señala que, para realizar con éxito la tarea de ordenación de fracciones, es necesario partir de contextos discretos.
- Los alumnos que calculan bien, además, llevan a cabo con éxito la comparación de fracciones y decimales, y la interpretación de la idea de densidad.
- La comprensión de la equivalencia ha influido de manera positiva en una mejor interpretación del orden de fracciones y de decimales.
- Representar fracciones en la recta numérica, para potenciar la noción de medida y desarrollar la relación de orden entre fracciones, permite observar los vacíos que tienen estos alumnos en conocimientos de geometría. En dibujo construyen, pero no realizan, la traducción a símbolo numérico de lo que representan. La experiencia ha puesto de manifiesto que son necesarios los “útiles de dibujo” en el aula de matemáticas.
- Los esquemas de contenidos ya forman parte del trabajo cotidiano de muchos alumnos.

De los resultados de las tareas

- En las tareas bien resueltas, sin llegar a dar una explicación perfecta, ya indican todos los pasos que realizan de manera ordenada.
- La interpretación del enunciado sigue siendo causa de error, pero el número de alumnos que presenta esta carencia ha disminuido.

Como ejemplo citemos que, en la tarea presentada en el apartado sobre la edad de los hermanos (que es contestada bien por 10 alumnos, 3 tienen algún error y 7 no la realizan), figuran justificaciones como la siguiente: *no tiene solución por desconocerse la edad del padre...*, frase que está contenida en el enunciado de la actividad.

- Visualizar una representación sobre un diagrama, cuantificar regiones y representarlás mediante fracciones para comparar sus medidas son destrezas adquiridas por los alumnos.
- Las tareas que piden ordenar decimales tienen resultados positivos.
- Las tareas de ordenar fracciones a partir de su representación geométrica lo hacen bien los “buenos” alumnos; los errores de los restantes se deben fundamentalmente a la mala calidad de los dibujos que realizan.

De las pruebas escritas

- En completar frases, relativas al orden, llega a 86% el número de respuestas positivas.
- El porcentaje de respuestas positivas al comparar fracciones y decimales se mantiene, disminuyen las respuestas negativas y es notable el incremento en el número de respuestas.
- En la traducción del orden (entre fracciones y decimales) asociado a un contexto, se ha incrementado notablemente el número de respuestas positivas y han disminuido los errores en los cálculos e interpretación de los contenidos.

6. CONCLUSIONES

Presentamos las conclusiones de nuestro estudio en tres apartados definidos por el currículo, la metodología y los contenidos.

En el nivel curricular, el material que se ha elaborado e implementado, siguiendo la metodología del MG, ha ofrecido a los alumnos propuestas variadas, aspectos claves en la enseñanza/aprendizaje según De La Garanderie.

En el nivel metodológico, nuestro trabajo se ha centrado en el desarrollo de los siguientes aspectos:

- En la elaboración, adaptación y puesta en práctica de un modelo de investigación-acción.
- En la elaboración de una unidad de contenidos sobre el orden en las fracciones siguiendo las teorías de De La Garanderie y en la puesta en práctica con los alumnos de los gestos mentales.

- En la elaboración de un sistema de categorías de interacción didáctica, de contenido matemático y de comprensión del contenido; sistema de categorías que ha permitido analizar las interacciones profesor-alumno-contenidos y valorar el trabajo realizado.

En el nivel de contenidos, se ha pretendido que los alumnos desarrollen y aprendan un conjunto de recursos eficaces para resolver problemas dentro y fuera del aula. Se destacan los siguientes hechos:

- La comprensión de la equivalencia ha influido de manera positiva en una mejor interpretación del orden de fracciones y de decimales.
- Visualizar una representación sobre un diagrama, cuantificar regiones y representarlas mediante fracciones para comparar sus medidas ha permitido observar la influencia de los distintos modelos de diagramas sobre los alumnos.
- En la traducción del orden (entre fracciones y decimales) asociado a un contexto, se ha incrementado notablemente el número de respuestas positivas y han disminuido los errores en los cálculos e interpretación de los contenidos.
- Tanto las transcripciones de aula como las tareas han evidenciado la participación progresiva de todos los alumnos en los diálogos y en todas las actividades.
- Los diálogos permiten observar su lenguaje y su interpretación de los contenidos, a veces contradictorios, pero todos los alumnos han pasado a participar emitiendo juicios.
- Los mapas conceptuales que construyen permiten observar las diferencias entre los conocimientos adquiridos por los alumnos y la mejora del trabajo sistemático y de síntesis de conocimientos.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brown, M. (1981), *Number Operations*, en K.M. Hart (ed.), *Children's Understanding of Mathematics*, John Murray, pp. 11-16.
- Cockcroft, M. (1985), *Las matemáticas sí cuentan*, Madrid, MEC.
- Chich, J.P., M. Jacquet, N. Meriaux, y M. Vermeyre (1991), *Pratique pédagogique de la gestion mentale*, Paris, Retz.

- Elliott, J. (1990), *La investigación-acción en educación*, Madrid, Morata.
- De la Garandarie, A. (1983), *Los perfiles pedagógicos*, Madrid, Narcea.
- Hart, K.M. (1980), *Secondary School Children's Understanding of Mathematics*, monografía de investigación, Universidad de Londres, Chelsea College.
- Hopkins, D. (1989), *Investigación en el aula*, Barcelona, PPU.
- Kemmis, S. y R. McTaggart (1988), *Cómo planificar la investigación-acción*, Barcelona, Laertes.
- Noelting, G. (1978), "The Development of Proportional Reasoning in the Child and Adolescent through Combination of Logic and Arithmetic", en E. Cohors-Fresenborg e I. Wachsmunth (eds.), *Proceeding of the Second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Universidad de Osnabruck, República Federal Alemana.
- Pérez, G. (1994), *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*, Madrid, La Muralla.
- Post, T. y K. Cramer (1987), "Children's Strategies in Ordering Rational Numbers", en *Arithmetic Teacher*, octubre, pp. 33-36.
- Smith, I.M. (1964), *Spatial Ability: Its Educational and Social Sifnificance*, Londres, University of London Press.
- Stenhouse, L. (1986), *La investigación como base de la enseñanza*, Madrid, Morata.

DATOS DE LOS AUTORES

Carmen Cubillo

Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática, Facultad de Educación y Trabajo Social, Universidad de Valladolid, Campus Miguel Delibes, España
correo electrónico:

Tomás Ortega

Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática, Facultad de Educación y Trabajo Social, Universidad de Valladolid, Campus Miguel Delibes, España
ortega@am.uva.es

