La formulación y reformulación de problemas o preguntas en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel medio superior

Juan Estrada Medina

Resumen: El estudio documenta los procesos cognitivos mostrados por estudiantes de bachillerato en un curso de cálculo. Los pupilos fueron expuestos a situaciones matemáticas en las cuales no aparecía un problema o pregunta planteado. La tarea de los alumnos fue formular y resolver los problemas o preguntas que podían inferirse a partir de la situación. La orientación pedagógica no fue que los jóvenes asimilaran contenidos, sino que aprendieran una actividad que fuera compatible con el hacer de las matemáticas y con una práctica que necesitarán en el futuro. Uno de los resultados más relevantes fue que los estudiantes, en su primera interacción con la situación, construyeron un modelo inicial. Éste se constituye con elementos parciales u omisión de otros, o no ven cierta información. Esta visión permea la formulación inicial del problema. A medida que los educandos interaccionaban con la situación, la formulación del problema reveló un avance por ciclos.

Palabras clave: formulación de problemas, aprendizaje de matemáticas, educación media superior.

Abstract: This study documents the cognitive process showed by high school students in a calculus course. The pupils were exposed to mathematical situations in which there was not a problem or a question posed. The task of the students was to pose and solve problems or questions that could be inferred from the situation. The pedagogic approach of the course was not the assimilation of contents but the learning of a compatible practice for the doing of mathematics that the students will need in the future. One of the most relevant results was that students, in their first interaction with the information given, built an initial model. Such model is formed by partial elements, omission of other elements or the students do not see certain information. This perception influenced the first formulation of the problem. As the students interact with the situation the formulation revealed a progress by cycles.

Key word: problem posing, learning of mathematics, high school education.

Fecha de recepción: diciembre de 2001.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Qué tipo de actividades ayudan a los alumnos a promover aprendizajes que son compatibles con las prácticas matemáticas? Por ejemplo, algunas de estas actividades son la formulación o reformulación de problemas matemáticos recomendada por la NCTM (1989, 1991): "A los estudiantes deben proporcionárseles oportunidades para formular problemas a partir de situaciones dadas y crear nuevos problemas mediante la modificación de un problema dado" (p. 95). Los *Principios y estándares para la Escuela de Matemáticas* (NCTM, 2000) retoman esta recomendación y señalan: "Buenos solucionadores de problemas tienden naturalmente a examinar situaciones cuidadosamente en términos matemáticos y a plantear problemas basados en situaciones que ellos ven" (p. 53). Además, sugieren que: "profesores y padres de familia estimulen esta propensión, ayudando a los pupilos a crear problemas matemáticos a partir de su experiencia" (*op. cit.,* p. 53) Dada la importancia de esta actividad en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el presente estudio se abocó a documentar el trabajo realizado por estudiantes de nivel medio superior que participaron sistemáticamente en una instrucción, la cual tuvo como eje actividades de formulación de problemas o preguntas y su resolución. Es decir, se le puso atención a los procesos que muestran los educandos cuando formulan un problema o una pregunta a partir de una situación o una información (por ejemplo, tabla, gráficas y/o enunciado verbal). Con el propósito de dirigir la atención a ciertos aspectos cognitivos que más interesa observar, se plantearon las siguientes preguntas de investigación que sirvieron como guía para organizar y analizar la información:

1) ¿Qué tendencias fueron notables en los estudiantes que participaron en una instrucción que tuvo como eje actividades de formulación y seguimiento de problemas? Esta cuestión se refiere a los patrones o propensiones más recurrentes que mostraron los pupilos en los diferentes escenarios.
2) ¿Qué tipo de recursos (representaciones, ideas, estrategias) revelan o ponen en juego los alumnos en la formulación? ¿Qué relación existe entre los problemas propuestos por los educandos y los procesos desarrollados en la solución (seguimiento)? Aquí se examinan los procesos de solución exhibidos en los problemas propuestos. Es decir, observar si este proceso guarda alguna o ninguna relación con el proceso de formulación.

3) ¿Se pueden identificar niveles en el proceso de formulación de problemas? Esta pregunta fue para ponerle atención con detalle a los pasos que revelan los alumnos cuando se les pide la formulación de un problema.
4) ¿Cuáles fueron las dificultades más notorias en el desarrollo de una enseñanza con un enfoque de formulación y reformulación de problemas o preguntas? ¿Cómo respondieron los estudiantes? El tipo de dificultades a que nos referimos son, por ejemplo, si los recursos (por ejemplo, conocimientos previos) de los alumnos fue una limitante para involucrarse en este tipo de actividades o la experiencia matemática adquirida en sus cursos anteriores.

MARCO CONCEPTUAL

Krutetskii (1976) fue uno de los primeros investigadores que reconoció la importancia de la actividad de formulación de problemas. Por ejemplo, para comprender la naturaleza de las habilidades matemáticas en niños considerados talentosos en matemáticas, utilizó un conjunto de situaciones en las cuales no aparecía un problema o una pregunta planteada. Algunas de las tareas de los niños fue formular un problema que debía resolverse con la información dada. Según Krutetskii, el problema podría ser inferido "...si el examinado percibe la lógica de las relaciones y dependencias dadas en el problema, si él comprende su esencia..." (p. 85).

En el modelo de Polya (1976) sobre el proceso de resolución de problemas (comprensión, planificación, ejecución del plan y visión retrospectiva) también aparece esta componente esencial del hacer matemático (¿podemos plantear el problema de manera diferente?, ¿variar el problema descartando parte de la condición?). Estas heurísticas tienen como fin transformar el problema dado.

Kilpatrick (1987) señala el valor pedagógico que puede tener este tipo de actividad en la enseñanza de las matemáticas: "...la idea de que los propios estudiantes puedan ser la fuente de buenos problemas matemáticos, probablemente no se le ha ocurrido a muchos estudiantes o a muchos de sus profesores" (p. 123).

Brown y Walter (1990, 1993) son los que más han profundizado en la temática de la generación de problemas, pero con la siguiente dimensión pedagógica:

> ...en la medida en que a los estudiantes se les da la oportunidad de crear y explorar sus propios problemas, tomarán más responsabilidad en su aprendi-

zaje. Podría tomar más tiempo cubrir un conjunto de conocimientos predeterminados y quizá se podría cubrir menos material, pero los estudiantes probablemente tomarán conciencia de su propio estilo de pensar, actitudes hacia el trabajo con otros, y también acerca de la naturaleza y el propósito de la disciplina (1993, p. 26).

El método que proponen para generar problemas comprende cinco etapas. De manera resumida, éstas son las siguientes:

Nivel 1: Selección de una situación matemática (por ejemplo, $x^2 + y^2 = z^2$).
Nivel 2: Descripción de atributos de la fase anterior ("es una ecuación", "hay tres variables", etcétera).
Nivel 3: Negación de los atributos anteriores (por ejemplo, supóngase que $x^2 + y^2 \leq z^2$).
Nivel 4: Formulación de problemas o preguntas (¿cuál es el significado geométrico de $x^2 + y^2 \leq z^2$?).
Nivel 5: Análisis de los problemas de la fase anterior.

En esencia, el método tiene dos momentos: se empieza por aceptar lo *dado*, en una segunda etapa se *desafía* lo dado mediante el recurso de preguntarse ¿qué pasa si? Este marco fue un elemento importante que se tomó en consideración para el diseño de algunas actividades en el estudio.

Para analizar los aspectos cognitivos en los estudiantes en la interacción con las tareas, se utilizó el marco de Thompson, Philipp, Thompson y Boyd, (1994). Los autores señalan que las actividades que desarrolla un profesor en el aula están estrechamente vinculadas con la imagen que posee de la matemática y la enseñanza. Identificaron dos tendencias: la *operacional* y la *conceptual*. Estas propensiones también se manifestaron en los alumnos que participaron en el estudio. Algunas características relevantes de la primera orientación son:

- Énfasis en identificar y ejecutar procedimientos.
- Tendencia a realizar operaciones en cualquier ocasión que se presenta, sin tener en cuenta el contexto en el cual aparecen.
- Tendencia a hacer caso omiso del contexto en el que se presentan los cálculos y como éstos podrían originarse naturalmente a partir del entendimiento de la situación.

En contraste, en la orientación *conceptual,* las acciones están impulsadas por:

- Propensión por aprender conceptualmente una situación.
- La recurrencia en el planteamiento de preguntas para ayudar a la comprensión de un contexto: ¿A qué refiere (este número) o esta información en la situación que se está abordando?
- ¿Qué estoy tratando de encontrar cuando efectúo este cálculo?

En resumen, un profesor o un estudiante ubicado en una orientación operacional tiende a conceptualizar las matemáticas como la aplicación de procedimientos y cálculos para obtener resultados numéricos.

El marco conceptual de Lesh y Kelly (1997) permitió analizar con detalle los pasos que mostraron dos estudiantes cuando se les pidió formular problemas a partir de una situación. Los autores señalan que los seres humanos elaboran modelos del mundo, los cuales sirven para interpretar, explicar, predecir, controlar y tomar decisiones en una situación dada. Esta idea de la construcción de modelos se utiliza para explicar el comportamiento de los estudiantes en un contexto de resolución de problemas. Durante este proceso identifican las siguientes características: *i)* las primeras interpretaciones de los estudiantes son a menudo bastante inestables, superficiales y prejuiciadas; *ii)* los estudiantes a menudo descuidan información que más tarde resultará ser importante; *iii)* la información superficial ocupa la atención en lugar de la profunda; *iv)* a menudo se ignoran inconsistencias en el razonamiento cuando la atención cambia de una perspectiva a otra. Otro rasgo es que los modelos pasan por ciclos, es decir, a medida que son introducidos y evaluados, algunos son refinados, ampliados, diferenciados o integrados, mientras que otros son rechazados sobre la base de una reflexión interna.

En relación con el estado de la investigación en formulación de problemas, es pertinente señalar que, a pesar de ser un tema que está presente en la discusión en la comunidad en Educación Matemática, la investigación no es abundante. Silver, Mamona-Down, Leung y Kenney (1996) documentan la capacidad de 81 profesores de enseñanza media para formular problemas. Los mentores no contaban con una experiencia previa en este tipo de actividades. Por tanto, se examinaron procesos espontáneos revelados por los docentes. La tarea (lanzamiento de una bola de billar en dos mesas de billar de dimensiones diferentes representadas en una cuadrícula) tenía tres partes. En la primera se pedía escribir preguntas o problemas, en la segunda los mentores debían resolver un problema ("predecir el destino final de la bola: ¿Cuándo llega la bola a la bolsa A, B, C y D?"). Finalmente, en la tercera se solicitaba a los docentes que escribieran los problemas que surgieron cuando estaban resolviendo el problema. Los informes escritos fueron la única fuente de información que utilizaron los autores para el análisis. Uno de los puntos nodales en el estudio de Silver *et al*. fue intentar esclarecer la relación entre formulación y resolución de problemas, la cual suponían podría inferirse a partir de las diferencias entre el tipo de problemas planteados por los solucionadores exitosos y por los no exitosos. Las clasificaciones anteriores deben entenderse en el sentido de que, si un profesor resolvió el problema correspondiente a la segunda parte de la tarea (¿Cuándo llega la bola a la bolsa A, B, C y D?), entonces se le considera *exitoso*. Sin embargo, esta relación entre ambos aspectos (formulación y resolución) no pudo establecerse, debido a que: "...desafortunadamente, la fase (resolución de problemas) fue resuelta exitosamente en el tiempo permitido por solamente unos cuantos individuos, y el número no fue suficiente para fundamentar un análisis cuidadoso de las diferencias anotadas arriba" (p. 307). También informan que "la mayor parte de las respuestas de los individuos fueron expresadas como problemas o preguntas que tomaban en cuenta la trayectoria o destino de la bola de billar en mesas de tamaño variable, el efecto de variar las condiciones dadas de las tareas o los supuestos implícitos de la tarea" (por ejemplo: ¿si las dimensiones de la mesa fueran disminuidas por dos, el número de golpes disminuiría por dos?) (p. 308).

Puesto que el punto sobre la relación entre formulación y resolución de problemas no había quedado dilucidado en el estudio anterior, Silver y Cai (1996) pretenden esclarecerla. Pero ahora analizan las diferencias entre los problemas planteados por estudiantes exitosos y no exitosos de secundaria. El criterio de selección de estos dos grupos se basó en las calificaciones (altas y bajas) obtenidas de la aplicación de un examen de ocho problemas.

La información proporcionada a los jóvenes fue:

> Escribe tres preguntas diferentes que puedan responderse a partir de la información siguiente: Jerónimo, Luis y Arturo realizaron un viaje en auto. Arturo manejó 80 kilómetros más que Luis. Luis manejó el doble de kilómetros que Jerónimo. Jerónimo manejó 50 kilómetros.

La fuente para el análisis fueron las respuestas escritas. Los investigadores encontraron que el grupo *exitoso* generó una proporción más grande de cuestiones matemáticas que el menos exitoso. Este último produjo un mayor número de *afirmaciones*. Otra diferencia fue que las afirmaciones generadas por los alumnos exitosos implicaban una interpretación correcta de la información ("Luis manejó 100 kilómetros”). Otra distinción fue que las afirmaciones de los no exitosos exhibieron una interpretación incorrecta de la información dada (“Arturo manejó 80 kilómetros”). En síntesis, el estudio registra una correlación entre la calidad de los problemas planteados y el grupo exitoso. No obstante, el hallazgo se presenta en el contexto de una tarea que se caracteriza por su rigidez para la creación de problemas.

English (1998) analiza la relación entre determinados perfiles cognitivos (por ejemplo, un fuerte sentido de número, pero débiles en resolución de problemas o fuertes en resolución de problemas y débiles en el sentido de número) y los patrones de respuesta con niños de ocho años. Se esperaba que estos alumnos con las diferencias cognitivas mencionadas exhibirían tendencias diferentes en el tipo de problemas planteados. Las tareas utilizadas fueron:

a) Se proporciona la siguiente oración numérica 12 - 8 = 4 (contexto formal). Se pide a los niños que inventen un problema (historia) que se resuelva con esta oración.
b) Se proporciona una fotografía u obra literaria (contexto informal). Con base en ella los niños deben generar problemas.

Unos de los hallazgos fue que los del primer perfil (“débiles en resolución de problemas”) revelaron una propensión para generar problemas de poca complejidad estructural con énfasis operacional. En contraste, los del segundo perfil (“fuertes en resolución de problemas”) tendieron a la formulación de problemas estructuralmente más complejos.

Sin embargo, la manera como se realizó el estudio arroja dudas sobre tales resultados. Por ejemplo, la clasificación de los participantes en perfiles tan definidos y precisos: “fuertes en resolución de problemas y débiles en el sentido del número” (p. 87). También se tomó una sola fuente para el análisis: las respuestas escritas de los niños. No se utilizó otro escenario (entrevistas, grabaciones) para observar si se presentaban dichos patrones de respuesta. Además, algunas de las tareas utilizadas (12 - 8 = 4) fueron actividades demasiados rígidas que limitaron la creatividad de los niños. El análisis de las respuestas se concentró en el producto y no en tratar de entender los procesos llevados a cabo por los niños cuando planteaban sus problemas. Finalmente, un aspecto al que no se le puso atención fue el de los procesos de resolución de los problemas propuestos por los niños, elemento que hubiera sido importante para entender los procesos en este tipo de actividades.

Metodología y procedimientos

La orientación metodológica en el trabajo fue de corte cualitativo, ya que el interés era analizar los *procesos* que muestran los estudiantes cuando interaccionan con situaciones en las que no hay un problema planteado. La tarea recurrente de los alumnos fue formular problemas y darles seguimiento. Por tanto, el propósito central del estudio fue entender algunos aspectos cognitivos de la actividad de formulación de problemas. Los elementos que se tomaron en consideración para dar credibilidad al estudio fueron: *a)* la realización de un estudio piloto en donde se probaron los instrumentos que se utilizaron para obtener información, *b)* la utilización de diferentes fuentes (informes escritos, trabajo individual y en equipo, tareas extraclase, entrevistas individuales, observaciones en el aula), y *c)* videograbación de dos estudiantes trabajando en una tarea de formulación de problemas. Estos escenarios sirvieron para comparar los comportamientos de los alumnos desde diferentes ángulos.

En el estudio participaron 26 estudiantes de bachillerato de una escuela pública con edad promedio de 18 o 19 años, en el contexto de la impartición de un curso normal de cálculo de 14 sesiones. La experiencia duró un semestre escolar (3 meses y medio). El mentor que impartió el curso realizó la investigación. Un primer paso en la implementación de la instrucción fue la revisión del programa de la asignatura. Su nota sobresaliente fue que comprende una gran cantidad de contenidos; no hay una jerarquía en las ideas matemáticas, es decir, todas están en un mismo plano. En suma, no se indica a qué conceptos se les deberá poner atención en el curso. Sin embargo, esta revisión sirvió para identificar las ideas principales (variación, medición de la variación, aproximación y acumulación de cambios) que se desarrollarían en la experiencia y para el diseño de actividades.

La dinámica de trabajo en el aula fue la siguiente: *i)* la clase se organizó en equipos de tres o cuatro personas y se formaron un total de siete equipos. Se entregaba una hoja escrita con una actividad a cada uno de los integrantes de los equipos, para que la trabajaran colectivamente; *ii)* terminadas las tareas, los equipos entregaban un informe escrito; *iii)* en la siguiente clase, el profesor seleccionaba dos equipos que representaban puntos de vista diferentes sobre el trabajo en una misma actividad; *iv)* un punto recurrente en la dinámica de la instrucción fue tomar las preguntas o problemas planteados por los jóvenes como base para las discusiones en el aula.

Tipo de actividades

Una de las características principales de las actividades utilizadas en la instrucción fue que se proporcionaba información o una situación, pero no aparecía un problema planteado. La tarea de los alumnos fue hacer una descripción de la situación, formular problemas y darles seguimiento. La información ofrecida se presentaba en diversas modalidades (cuadros, gráficas discretas o continuas y enunciados verbales). El contenido de las actividades comprendía ideas de precálculo (variación, medición de la variación, aproximación, acumulación).

El cuadro 1 muestra tales características.

Cuadro 1

Presentación de la información	Características de la actividad
Cuadro	Se proporcionan datos en un cuadro. La información muestra un aumento y una disminución en el comportamiento del fenómeno (epidemia).
Enunciado verbal	Se entrega un texto en el cual no aparece un cuadro o gráfica. El fenómeno se describe mediante la frase: "La población de peces en una laguna está disminuyendo a razón de 10% mensual".
Gráfica discreta	La gráfica representa un fenómeno de variación discreta (fluctuación del valor de una moneda).
Gráfica continua	La gráfica representa el movimiento de un objeto (distancia recorrida por un tren).
Cuadro con información faltante	Se proporciona un cuadro con información sobre el comportamiento de un fenómeno (variación de los precios del petróleo), pero algunos datos han sido omitidos.
Enunciados sin preguntas o problemas	Se seleccionan ejercicios de un libro de texto de cálculo, pero se omitió el problema o la pregunta.
Problemas diseñados por los alumnos	Los problemas son creados por los propios alumnos y presentados ante todo el grupo para su discusión.

ANÁLISIS

Para el análisis de la información se tuvieron en cuenta las observaciones de Lincoln y Guba (1985):

> ...identificar aquellas características y elementos de la situación que son los más relevantes del problema o cuestión [...] concentrándose en ellos con detalle. Si la permanencia prolongada proporciona amplitud, la observación persistente proporciona profundidad (p. 304).

Por consiguiente, se establecieron dos niveles de observación, uno global y otro específico. El propósito del primero fue identificar los aspectos más relevantes del proceso. Este nivel incluyó las siguientes fuentes: *a)* discusiones abiertas en el salón de clases, *b)* actividades diseñadas por los propios alumnos y su presentación ante el grupo, *c)* reportes escritos y tareas extraclase. En el segundo nivel nos interesó analizar con detalle el proceso de dos estudiantes cuando se les pidió formular un problema, dada una situación o una información. Esta actividad fue videograbada y el docente participó como entrevistador. El estudio comprendió las siguientes fases: *a)* se tomaron tres momentos en el semestre (tiempo que duró el curso) que identificaremos como fase inicial, fase intermedia y fase final; *b)* se eligieron a los mismos estudiantes que trabajaron en equipo, en pareja o individual, en algunas actividades en cada una de estas etapas; *c)* se identificaron los rasgos, patrones o dificultades más relevantes en el trabajo realizado; *d)* se llevó a cabo un seguimiento de esas tendencias o rasgos en actividades posteriores. Tal proceder permitió captar los comportamientos de los mismos estudiantes en tres periodos distintos.

ANÁLISIS DE RESULTADOS

A continuación, se hace un análisis de los resultados más notables en el trabajo de los estudiantes en algunas actividades comprendidas en los tres momentos antes mencionados.

Etapa inicial del estudio

En la etapa inicial se analizó información proveniente del siguiente tipo de actividades:

A causa del brote de una epidemia en una ciudad, se hizo el siguiente cuadro que registra el número de enfermos que han aparecido cada semana, durante 12 semanas. Con base en esta información formule preguntas o problemas y resuélvalos.

Semana núm.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Núm. de enfermos	100	244	356	436	484	500	461	392	266	160	80	40

Algunos de los objetivos de las actividades anteriores fueron documentar:

a) Cómo interaccionan los estudiantes ante una situación (información dada en un cuadro), en la que no hay un problema o pregunta planteado.
b) Qué (representaciones, ideas) evocan los alumnos en estas situaciones.
c) Qué aspectos de la información atendían o desatendían y qué clase de problemas formulaban.

La base para el análisis en estas actividades fueron los informes escritos de los equipos. En el trabajo realizado se observaron dos tendencias: la visión *operacional* y la *cualitativa*. Estos hallazgos coinciden con las orientaciones operacional y conceptual que observaron Thompson *et al.* (1994) en profesores de enseñanza media. En la primera predominó una disposición calculista con los datos. Es decir, la construcción de sentido de la situación se hace mediante la propuesta de preguntas que involucran cuestiones de cálculo. Ejemplos de respuestas de estos comportamientos son: ¿Cuántos enfermos se obtuvieron en promedio por semana? ¿Cuántos enfermos disminuyeron de la sexta a la décimo segunda semana? Otro tipo de preguntas fueron las que se podían responder por inspección directa de la información dada: ¿En qué semana se dio el índice más alto de enfermos? Obsérvese que el seguimiento se limita a llevar a cabo las operaciones anunciadas (calcular promedios, porcentajes) en las preguntas o problemas planteados.

En cambio, los alumnos ubicados en la tendencia cualitativa van más allá del aspecto operacional, es decir, no se quedan confinados al contexto de la información dada, sino que la utilizan para generar nueva información y la utilizan para analizar el comportamiento del fenómeno. Por ejemplo, elaboran un cuadro de diferencias a partir de los datos ofrecidos ("primero se calculó cuál fue el aumento o decrecimiento de enfermos por semana"), el cual les sirvió de base para plantear las siguientes preguntas: "¿Cuál fue la semana en la que hubo mayor incremento de enfermos? ¿En qué semana se registró el mayor índice de enfermos y el menor incremento? Otro rasgo fue la disposición a utilizar otra representación (gráfica) para interpretar el fenómeno ("se graficó para tener una visión, para saber cómo fue evolucionando la epidemia", "Como se observa en la gráfica, el número de enfermos iba en descenso"). Obsérvese la atención a los aspectos conceptuales del fenómeno representado en la información (crecimiento o decrecimiento). La visión calculista se mantuvo en algunos equipos en las actividades subsecuentes; sin embargo, a medida que los equipos interaccionaban en otros escenarios (confrontación con otros equipos, discusiones abiertas en el aula), se notaron cambios hacia un patrón cualitativo. Por desgracia, también se notó una tendencia por convertir la actividad de formulación y seguimiento de los problemas en un conjunto de reglas o en una rutina ("Haz un cuadro del fenómeno que se presenta", "Haz una gráfica", "¿Qué representa cada gráfica?").

En resumen, esta fase inicial fue para familiarizar a los estudiantes en este tipo de actividades y para introducir ideas de precálculo (medición de la variación y acumulación).

Etapa intermedia

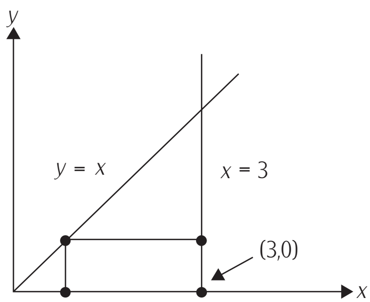
En la etapa intermedia se dio un giro importante en el tipo de actividades que trabajaban los estudiantes. Por primera vez, los alumnos abordaron situaciones que involucraban ideas de variación continua, las cuales podrían llevar a la formulación de problemas de optimización.

Algunas de las actividades trabajadas en esta fase fue seleccionar problemas de un libro de texto, pero el docente *borraba* la pregunta o problema. Con la información restante los alumnos debían de formular el problema *faltante* y darle seguimiento. Dos de las tareas fueron:

1) Se tienen 50 m de malla para cercar tres lados de un terreno de forma rectangular. El cuarto lado está limitado por una pared (véase la figura)

____
(en la línea punteada escribe el problema o la pregunta que falta).

2) En el primer cuadrante aparecen las gráficas de las recta $y = x$, $x = 3$. Ambas rectas y el eje x forman una región triangular. Dentro de ésta se construye un rectángulo de modo que uno de sus vértices (3,0) sea fijo (véase la figura) ____
(en la línea punteada escribe la pregunta o el problema que *falta)*.



Características de las tareas

Al omitir en ambas tareas la pregunta o problema, se elimina explícitamente la referencia a un problema de variación. Por tanto, la información restante queda abierta a plantear un sinnúmero de cuestiones. En este sentido, no se esperaba necesariamente que los alumnos tuvieran que plantear un problema de variación. Las tareas contienen información explícita (50 m de malla, tres lados, forma rectangular, ecuaciones, vértice fijo) e implícita (perímetro, área, un vértice está sobre la recta $y = x$). Sin embargo, la segunda involucra una gráfica. Tal circunstancia podría ocasionar dificultades en la interpretación de la información. Por ejemplo, darse cuenta de que el vértice del rectángulo sobre la recta $y = x$ determina un número infinito de rectángulos no es evidente para los alumnos (si el punto se mueve sobre la recta, ¿qué sucede con el área y el perímetro?).

El propósito de estas actividades fue analizar con detalle los pasos que llevaron a cabo dos estudiantes cuando se les pidió formular problemas. En la sesión, el docente participó como entrevistador. La transcripción del video fue utilizada para el análisis que se presenta a continuación.

Una vez que los estudiantes leyeron los textos de las tareas, el instructor comenzó con la pregunta: ¿Está claro lo que se pide? El objetivo era explorar lo que habían entendido de la situación. El primero en responder fue el alumno 1 ("lo que se pide es formular preguntas o problemas que han sido borrados de un enunciado"). Sin embargo, muestra dificultad en expresar oralmente la información proporcionada en el texto. De hecho, repite lo expuesto en la información con las siguientes palabras: "Cercar un terreno en forma rectangular [...] ya bardeado, o sea lo que se requiere con esos 50 m de malla es cercar el terreno..." Esta frase parecía sugerir que el alumno estaba entendiendo que todo el terreno estaba bardado. Por ello, el docente presionó para aclarar el punto. El alumno 2 respondió: "No, nomás para cercar el terreno sin la pared. A partir de dicha pared vamos a poner la malla que va a rodear ese terreno".

En este nivel, el docente les preguntó: ¿Cuál sería la pregunta o problema que *faltaba*? El alumno 2 no respondió de manera inmediata. Dibujó un rectángulo en el pizarrón que representaba el terreno, trazó sobre uno de sus lados la pared, y escribió $50 - L_p =$ perímetro (L_p representa la longitud de la pared) y comentó: "Porque ahora no utilizaríamos ya esos 50 m de malla, utilizaríamos menos, ya que uno de sus lados es la pared". Es posible que él estuviera asumiendo la pared como una parte de un terreno ya *determinado*. Es decir, que la malla originalmente se ajustaba al terreno, pero ahora como había una pared: "...utilizaríamos menos (malla), ya que uno de sus lados es la pared".

El modelo inicial de la situación que se ha formado el alumno, al parecer, es: Hay un terreno ya *determinado* en el que originalmente la malla se ajustaba a las medidas del terreno, pero ahora, con la pared, le sobra malla. Se observa que el dato de la pared está ocasionando dificultades en ambos alumnos. Prueba de esto es cuando el alumno 2 dice: "No sabemos cuál es la medida de la pared", y el alumno 1 expresa: "Faltó información sobre cuánto mide la pared". Es en este nivel donde el alumno 2 plantea el siguiente problema: ¿Cuáles serían las medidas, largo y ancho?

En suma, los alumnos entendieron que el problema se reducía a determinar las medidas (largo y ancho) del terreno. Una dificultad notoria fue que la pared no tenía asignado un dato numérico ("necesitamos saber el largo y ancho de la pared", alumno 2).

Como no se observaba un avance, el docente presionó a fin de que superaran dicha etapa. Preguntó: ¿Qué más observan? Se deseaba ver si los alumnos identificaban el área como una información relevante en la situación. Por ello, con toda intención, no se les mencionaba el área. Si lograban identificarla, quizá los llevaría a ver la situación de otra manera y así reformular el problema original (modificación del modelo inicial). Sin embargo, los alumnos no lograron dar este paso, lo cual sugiere que la identificación de la información en el sentido de "...percibir la lógica de las relaciones y dependencias dadas... " (Krutetskii, *op. cit.*) fue una dificultad notoria para los educandos. Esto podría arrojar alguna luz sobre los impedimentos que tienen los estudiantes cuando se les proporcionan los problemas y se les pide resolverlos.

Respecto a la tarea *2* mostraron un patrón diferente: lograron remontar el nivel anterior que se manifestó en la tarea *1*. Es decir, lograron formular el problema *faltante,* y lo notable fue que la formulación muestra una evolución, es decir, pasa por ciclos. Las fases que se pudieron identificar fueron:

a) Apropiación de la información.
b) Primera formulación del problema.
c) Reconocimiento de nueva información y reformulación del problema original.

Apropiación de la información. Es una fase de identificación de la información y, por tanto, de conceptualización de la situación. Los dos alumnos se fijan en aspectos parciales, otros son dejados de lado (un vértice sobre la recta $y = x$) o simplemente no los ven (por ejemplo, variación del área). Otro rasgo es que reproducen información dada: "las rectas $y = x$, $x = 3$ forman un triángulo con el eje x". Puesto que los alumnos no han identificado plenamente la información, el profesor inquiere a los alumnos (¿Qué más ven en el enunciado? ¿Qué entienden de que un vértice sea fijo?). Esta presión lleva a los alumnos a dibujar varios rectángulos inscritos en la región triangular: "...en este caso podemos construir varios rectángulos, pero éste [señala al que aparece dibujado en la tarea] siempre va a permanecer *fijo*, los demás se están moviendo, pero éste permanece *fijo...*". Nótese la persistencia en asirse al rectángulo inscrito que se proporciona en la tarea. En esta etapa podría suponerse que, por el hecho de que este alumno trazó varios rectángulos en la región, percibió la variación del perímetro y/o del área, pero no sucedió. Para saber qué tienen en mente, el docente considera oportuno preguntar: ¿Cuál creen que podría haber sido el problema o la pregunta que *faltaba*? Un alumno contesta: "Tratar de encontrar las medidas de lo que sería el largo y ancho de este rectángulo" (patrón similar que se reveló en la tarea *1*). Obsérvese de nuevo esta adherencia al rectángulo dado en la tarea, los demás rectángulos que ellos mismos trazaron no los conducen a observar el aspecto de variación y, por tanto, revisar su formulación inicial. Aquí concluye un ciclo en la formulación del problema, cuya nota es la fijación con el rectángulo dado en la tarea; esto a pesar de que los pupilos mostraron la existencia de varios rectángulos en la región que satisfacían la restricción del vértice fijo.

Reconocimiento de nuevos atributos en la situación y replanteamiento del problema original. En esta fase los alumnos identificaron nueva información, lo que implicó una reformulación del problema original. Pero este paso no se dio espontáneamente en los alumnos, como veremos más adelante. En la etapa anterior ya habían visualizado la existencia de varios rectángulos inscritos en la región, pero dicha percepción no los condujo a reconocer la variación del área como una información relevante en la situación.

Tal reconocimiento era importante, porque podría colocar el problema en otra perspectiva y probablemente llevarlos a reexaminar el problema original. No obstante, la identificación de uno de estos atributos (variación del área) no se iluminó con el trazado de varios rectángulos en la región, los alumnos siguieron anclados a la determinación de las medidas (largo y ancho) del rectángulo dado en la región ("pero éste siempre va a permanecer fijo").

El interrogatorio del profesor hizo que los alumnos se dieran cuenta de la existencia de una *infinidad* de rectángulos que satisfacían la condición de un vértice fijo: "Puede haber [...] una infinidad de rectángulos que van a estar vagando". No obstante, reconocer esta infinidad les planteó un conflicto: si hay una infinidad de rectángulos, ¿cuál seleccionar para encontrar las medidas (largo y ancho)? Quizás esto explique su adherencia al rectángulo dado en la tarea ("encontrar las medidas [...] de *este* rectángulo"). Esta contrariedad quedó manifiesta cuando un alumno dijo: "En este caso, como no se tiene algo fijo, íbamos a encontrar demasiados rectángulos y no íbamos a saber cuál era su medida, porque se está moviendo no está fijo, entonces no podemos sacar su medida..." Este dilema podría superarse si los alumnos reconocieran un problema de variación, lo que implicaría modificar su propuesta original. El docente se percató del conflicto y trató de ayudarlos a salir de él preguntándoles: ¿Qué sucede con el área de cada uno de ellos? Un alumno contestó: "se reduce o va ir aumentando". Tal afirmación da un giro a la situación; primero trazó varios rectángulos en la región triangular (figura 1).

Figura 1

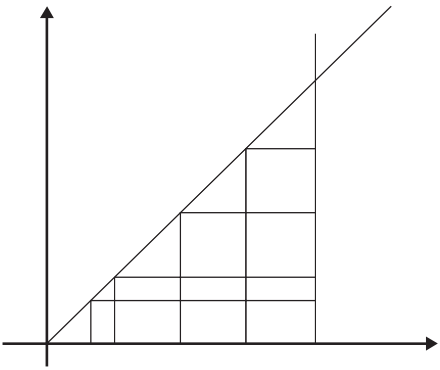
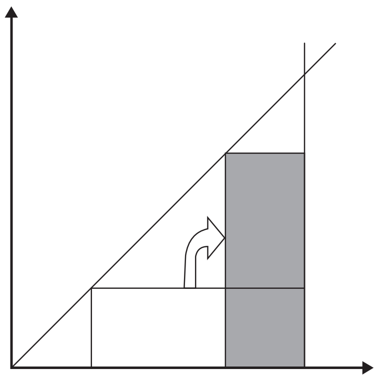
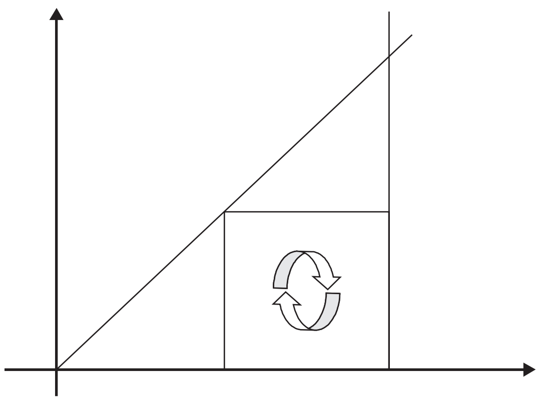


Figura 2



Luego se fijó en dos rectángulos (figura 2) y comentó: "Este rectángulo (sin sombrear) es el mismo que éste (sombreado), entonces, lo único que va a estar pasando es que este rectángulo lo vamos a ir rotando [...] las áreas vendrían en aumento y después irían en disminución..." Estas acciones con la representación geométrica lo llevaron a hacer una conjetura: "...y lo único que podemos encontrar sería un rectángulo unitario, tal que sería el área máxima". Esta conjetura surgió cuando el alumno giró el cuadrado un ángulo recto con la mano y se percató de que el cuadrado conservaba la misma posición (figura 3).

Figura 3



Obsérvese también que durante esta etapa de reformulación, aparece vinculada la plausibilidad de la solución o seguimiento del problema ("Lo más seguro es que nos encontramos con un rectángulo tal [...] que a lo mejor sería éste [señala el cuadrado anterior] en el cual su área sería la máxima"). Como puede verse, el alumno ha reformulado el problema original. Para cerciorarse, el mentor preguntó: ¿Cuál creen que podría haber sido el problema que *faltaba*? La respuesta fue: "...buscar el rectángulo con el que obtenemos su mayor área posible". No obstante, el proceso de la formulación aún no ha concluido, la propuesta anterior es todavía imprecisa. Falta que evolucione a una mayor precisión matemática. Este paso tampoco fue fácil, debido a las dificultades de lenguaje para expresar una idea intuitiva en términos matemáticos.

Etapa final del estudio

Finalmente, se presenta un breve análisis de algunas actividades que se realizaron en la tercera fase de la instrucción.

Como una actividad de cierre de curso, se les pidió a los estudiantes que diseñaran por equipo una tarea y la presentaran ante toda la clase para su discusión. Cabe aclarar que no sólo en esta etapa se solicitó a los alumnos que crearan problemas propios, sino que fue una actividad recurrente durante la instrucción. Se avisó que el día de la presentación el instructor seleccionaría un solo equipo, ya que no alcanzaría el tiempo para todos. Asimismo, se les comunicó que la sesión sería filmada y el docente coordinaría la sesión. Se deseaba observar cómo influía un escenario más abierto en la actividad de formulación de problemas. Además, se consideraba que someter un trabajo a la crítica y defenderlo ante los demás es una práctica importante que será de utilidad cuando los alumnos participen en escenarios futuros. Con base en la transcripción del video, a continuación se hace una sucinta descripción de lo acontecido en la polémica desarrollada por los alumnos.

El equipo seleccionado presentó información en un cuadro que representaba los precios del café durante la segunda quincena (del 15 al 30) del mes de noviembre de 1998. Sin embargo, omitieron algunos datos en el cuadro. Con base en esta información incompleta, el tipo de preguntas que plantearon fueron: ¿Podemos encontrar la información faltante? ¿Se pueden encontrar cinco valores anteriores al 15 y cinco valores posteriores (después del 30)? ¿Cuál es la función precio? ¿Cómo es el cambio del precio? ¿Cuál es la acumulación de los precios del café?

Al inicio de la sesión el equipo colocó en el pizarrón una cartulina con la siguiente información que fue la base de la discusión:

Días	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Precio	30				31.24											

Días	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Precio	28.45	28.76	29.07	29.38	29.69	30	30.31	30.62	30.93
Diferencias	–0.31	–0.31	–0.31	–0.31	–0.31	0.31	0.31	0.31	0.31

A continuación se describen los momentos más sobresalientes de la discusión:

El punto esencial bajo el cual se desarrolló el debate se dio en el contexto de la determinación de los precios del café antes del día 15 de noviembre. Para calcularlos, el equipo asumió que la variación era positiva, es decir, que los precios del café siempre iban en aumento uniforme. Para determinar los precios anteriores al día 15 los alumnos utilizaron la fórmula: $30 + 0.31(-d)$. Nótese que no está expresada en términos funcionales. En la expresión anterior, 30 es el precio del día 15 y (0.31) es la tasa en la variación del precio multiplicada por *menos* el día. Por ejemplo, si se quería calcular el precio del café para el día 14, primero hacían la multiplicación $0.31(-1) = -0.31$, en segundo lugar restaban: $30 - 0.31 = 29.69$ y obtenían el precio buscado del día 14. Sin embargo, cuando elaboraron el cuadro de las diferencias (la tasa de cambio en el precio), introdujeron un signo negativo (-0.31) para los días *antes* del día 14. Si ésta era negativa, entonces había una contradicción con lo que antes habían asumido: los precios del café iban en aumento y, por tanto, la tasa de cambio era positiva. Después de una hora de discusión, quedó esclarecido que el equipo había introducido el signo negativo para indicar que se trataba de días anteriores al 14 con la aclaración de que "eso no quiere decir que esté disminuyendo, únicamente indica que son días anteriores". Es decir, al signo le atribuyeron otro significado que no correspondía con el significado establecido (disminución de la cantidad original). Este punto polémico lo aclaró un alumno de la clase con las siguientes palabras: "Lo que pasa es que ese signo negativo que están manejando en la fórmula $30 + 0.31(-d)$ lo están manejando como que 0.31 es negativo y no en el día anterior, *ésa es la confusión*". Deseamos destacar que lo más importante de esta experiencia fue que los mismos estudiantes esclarecieron la dificultad, lo que ayudó a desmitificar la figura del profesor como el poseedor de la verdad o la máxima autoridad para dirimir un punto de controversia.

El análisis de las tres etapas anteriores del estudio proporciona la base para contestar las preguntas de investigación.

Respuestas a las preguntas de investigación

Primera pregunta de investigación: *¿Qué tendencias son notables en los estudiantes que participaron en una instrucción que tuvo como eje actividades la formulación y seguimiento de problemas?*

En las actividades iniciales (primera etapa), se observaron dos patrones: la tendencia *calculista* y la *cualitativa*. En la primera, los estudiantes formularon preguntas que implicaban la realización de cálculos (porcentajes, promedios) con la información dada. En cuanto al manejo de la información, se limitaron a ella, es decir, no fueron más allá de la información dada. El seguimiento de los problemas se limitó a llevar a cabo los cálculos enunciados en la pregunta. La segunda visión atiende los aspectos conceptuales (crecimiento o decrecimiento). Otro rasgo fue que no se limitaron a la información presentada, sino que la usaron para generar nueva información y aplicarla para analizar el comportamiento del fenómeno.

La visión *calculista* se mantuvo en algunos equipos en las actividades subsecuentes; sin embargo, a medida que los equipos interaccionaban con otro tipo de situaciones y se confrontaban con otros equipos en discusiones abiertas en el salón de clase, se notaron cambios hacia rasgos cualitativos. Un indicador de este progreso se revela en el tipo de preguntas planteadas (¿Hay un movimiento constante del tren y, si lo hay, desde cuándo?). Por desgracia, también se notó una tendencia a convertir la actividad de formulación y seguimiento de los problemas en una rutina o en un formato.

Otro avance importante que se logró al inicio del curso fue vencer la renuencia de los jóvenes a formular su propios problemas o preguntas. Esto quizás por la costumbre que impera en los cursos normales de matemáticas, donde las preguntas y los problemas son proporcionados. A medida que se les daba crédito a sus preguntas o problemas, los estudiantes comenzaron a tener una mejor disposición para participar en este tipo de tarea.

Segunda pregunta de investigación: *¿Qué tipo de recursos (representaciones, ideas) revelan o ponen en juego los estudiantes en la formulación? ¿Qué relación existe entre los problemas propuestos por los estudiantes y los procesos de solución?*

Los jóvenes que participaron en esta experiencia habían tomado cursos de álgebra y geometría analítica. Sin embargo, a medida que interaccionaban con las actividades, se empezaron a manifestar deficiencias, o bien no se utilizaban los recursos en las situaciones en que se demandaban; por ejemplo, representar gráficamente los datos.

En estas circunstancias, las primeras actividades sirvieron para subsanar tales deficiencias en los recursos y, al mismo tiempo, introducir nuevas ideas matemáticas (medición de la variación y acumulación). Las cuales se requerían en otras situaciones para la formulación y el seguimiento de los problemas. Fue notorio que en los procesos de solución mostrados por los estudiantes no se rebasara el tratamiento aritmético, a pesar de que habían realizado procedimientos aritméticos que anticipaban un tratamiento simbólico de las relaciones involucradas. Esto es, para elaborar un cuadro de una función que representaba la variación del área de un rectángulo, emplearon expresiones simbólicas ($A = ab$, $b + 2a = 50$), pero cuando se les pedía que realizaran un análisis de la variación del área en términos de a o b, revelaron dificultades para dar este paso ("No, no le entendí, maestro").

En suma, se vuelve a manifestar el escollo para transitar de un nivel aritmético a un nivel simbólico ya informado en la literatura. Por consiguiente, el pasaje anterior no se razona como una simple traducción simbólica de las relaciones o procedimientos aritméticos, sino que, al parecer, está asociado a una manera de pensar diferente a la que se desarrolla en el nivel aritmético. En relación con la última interrogante, hay pruebas de que, durante el planteamiento de un problema, está en ciernes un proceso de solución. Sin embargo, éste no se desarrolla plenamente por las dificultades antes señaladas.

Tercera pregunta de investigación: *¿Se pueden identificar niveles en el proceso de formulación de problemas por los estudiantes?*

Una faceta importante, observada en la formulación de problemas, es que los educandos pasan por fases para asimilar la información y de acuerdo con los niveles que van alcanzando, viene aparejada la reformulación del planteamiento inicial. En consecuencia, la actividad de formulación de problemas pasa por ciclos.

En el primero, los alumnos se fijan en aspectos parciales o superficiales de la situación o dejan de lado o simplemente no ven cierta información (variación de magnitudes), la cual, más tarde, será relevante para la reformulación del problema original. Con base en esta primera interacción, los alumnos formulan sus primeros problemas o preguntas.

En el segundo ciclo, empiezan a poner atención en nuevos atributos que habían sido ignorados. Sin embargo, esta nueva información no los lleva espontáneamente a reexaminar el problema original. Es el cuestionamiento del docente lo que hace que los alumnos se den cuenta de la necesidad de modificar el problema original, etapa que constituye el tercer ciclo; pero la formulación del problema es aún vaga e imprecisa. La evolución a una mayor precisión en términos matemáticos no se produce de inmediato, sino que avanza por la presión del profesor y la interacción que los alumnos realizan con los nuevos componentes descubiertos en la situación.

Un elemento concomitante en este proceso es que los pupilos van adquiriendo un mejor entendimiento, el cual se produce gracias a la introducción de representaciones (gráficas o cuadros). Por desgracia, en algunos casos quedan circunscritos en alguna de ellas; no se mueven con facilidad a otra. Otro aspecto que debe destacarse fue que la formulación y el seguimiento del problema no se presentan de manera separada, sino que ambos se dan de manera conjunta. También fue notable la limitación que tienen los estudiantes para comunicar oralmente el planteamiento de un problema. Las observaciones anteriores podrían esclarecer algunas de las dificultades que muestran los estudiantes cuando enfrentan los problemas en el contexto escolar. A pesar de que se da explícitamente un problema de variación, los alumnos no lo ven.

Cuarta pregunta de investigación: *¿Cuáles fueron las dificultades más recurrentes en el desarrollo de la instrucción? ¿Cómo respondieron los estudiantes? ¿Cuál fue la función del docente?*

Antes de responder a las preguntas, es conveniente subrayar que el eje fundamental con el que se llevó a cabo la instrucción fue la formulación de problemas. Este enfoque implicaba, entre otras cosas, modificar hábitos o creencias que los estudiantes han formado a lo largo de su experiencia escolar. Uno de ellos es: el profesor proporciona siempre los problemas o las preguntas y corresponde a los alumnos resolverlos o contestarlos. En una enseñanza con estas características, no existen las condiciones para que los alumnos puedan ser la fuente para crear sus propios problemas y éstos se discutan en la clase. De ahí, entonces, que la primera dificultad que hubo que vencer fue tal predisposición.

En estas circunstancias, el primer día de clases, el docente inquirió: ¿Qué piensan de lo siguiente: se aprende más si se plantea uno sus propias preguntas o problemas y las responde o si el profesor las formula y ustedes las resuelvan? En un principio las opiniones se dividieron, pero se llegó a un consenso: ambos aspectos eran importantes y no se excluían.

El profesor utilizó la discusión anterior para hacer ver a los estudiantes la importancia de crear un ámbito diferente en el salón de clases, en donde ellos se sientan en libertad de comunicar libremente sus ideas, y que este entorno desempeña un papel primordial en el aprendizaje de las matemáticas.

Dicha *cultura* no se generó en las primeras semanas de la instrucción, sino que se fue conformando paulatinamente.

Otro tipo de escollo fue la propensión calculista de algunos estudiantes, la cual no fue posible erradicar del todo. Por ejemplo, cuando los estudiantes trabajaban en equipo, aparentemente superaban esta tendencia; sin embargo, cuando estos mismos alumnos trabajaban de manera individual, volvían a surgir dichos comportamientos.

Otro problema que se presentó durante la instrucción fue la lentitud con que se desarrolló el proceso. En parte, se debió a que las actividades implicaban varias fases. Por ejemplo, en una sesión los estudiantes trabajaban en equipo en una tarea; luego el profesor las analizaba para observar qué estaba ocurriendo en el proceso. En la siguiente clase, el docente seleccionaba dos equipos representativos que reflejaban diferentes puntos de vista en el desarrollo de una misma tarea para exponer el trabajo ante toda la clase. El papel del profesor se concretaba a coordinar la discusión y a llamar la atención sobre los puntos importantes, pero quienes sugerían una conclusión sobre la cuestión que se debatía eran los propios alumnos. El propósito principal de la experiencia no fue que los estudiantes asimilaran una gran cantidad de contenidos, sino que aprendieran una práctica:

> Una de las principales conclusiones que obtuve en los tres años de investigación fue que el conocimiento y las prácticas están intrínsecamente relacionadas y que los estudios sobre aprendizaje necesitan ir más allá del conocimiento para considerar las prácticas en las que los estudiantes se involucran y que necesitarán en el futuro (Boaler, 2001, p. 9).

En resumen, estas dinámicas en el aula resultaron ser fructíferas para los avances de los jóvenes, en particular, la solicitud de que diseñaran sus propios problemas y los presentaran ante el grupo para su discusión. Por desgracia, hay algunos estudiantes que se muestran renuentes a participar en las discusiones abiertas o en equipo; algunos más desean pasar inadvertidos. En la videograbación se observa que, efectivamente, no todos participaron en la controversia del signo negativo de la variación; pese a que no hablaron durante toda la sesión, se observa que mantuvieron su interés en la cuestión que se debatía.

ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

En esta parte se abordan las implicaciones relacionadas con los planes y programas de estudio, formación de profesores, problemas de aprendizaje detectados en los estudiantes, limitaciones y recomendaciones para futuras investigaciones. A continuación se discuten tales puntos.

La actividad de formulación o reformulación de problemas no debe ser considerada como un aspecto separado de la resolución de problemas; es sólo un momento diferente en esta práctica. Desde esta perspectiva, se necesita repensar el marco en el que está concebido el currículo de matemáticas (acumulación de contenidos). Otro punto al que se deberá poner atención es el señalado por Thompson *et al*. (1994): las acciones que desarrolla un docente en el aula están influidas por las imágenes que posee de las matemáticas y de la enseñanza. Es decir, un mentor que adopta una orientación operacional de las matemáticas posiblemente permeará la actividad de formulación de problemas en esa dirección. De ahí la importancia de contemplar cursos de formación de profesores donde se cuestionen este tipo de tendencias.

Un punto concomitante con lo anterior lo constituyen las creencias que tienen los estudiantes acerca de las matemáticas. En este estudio los alumnos revelaron una visión operacional. Estas concepciones fueron un obstáculo en el avance de la instrucción. Por ello, se deberá poner mayor atención a la *historia* que traen los educandos acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, deberá tenerse en cuenta la concepción en el diseño de las actividades que trabajarán los alumnos. Una característica importante es tener un potencial para crear problemas. También proporcionar mayor énfasis a la generación de problemas por parte de los alumnos y tomarlos como base para las discusiones en el aula; este recurso didáctico mostró ser importante para la comunicación de las ideas y el aprendizaje. Otro elemento que deberá considerarse se relaciona con los recursos que permitan involucrarse en este tipo de actividades. Por ejemplo, la falta de un conocimiento sólido del concepto de función y de tasa de cambio fue un impedimento para desarrollar algunas actividades que involucraban estos conceptos.

Algunos de los problemas de aprendizaje (dificultad para comunicar ideas matemáticas, falta de recursos, rigidez en el uso de una representación, falsas concepciones, énfasis en los cálculos), que ya han sido registrados en otros contextos (resolución de problemas), volvieron a observarse en este estudio. Por ello, es pertinente tomarlos en consideración en una futura investigación.

Un punto débil que quizás podría atribuirse al contexto del curso (cálculo) fue que los problemas o preguntas formulados no fueron más allá de los que suelen plantearse en el ámbito escolar. No obstante, hay una diferencia: fueron los propios alumnos los que generaron los problemas o preguntas y les dieron seguimiento. En este sentido fue una experiencia alentadora, incluso con las limitaciones anteriormente señaladas.

El presente estudio se realizó en un contexto de lápiz y papel. En éste, los alumnos tuvieron problemas para identificar información en las situaciones e inferir los problemas. Una cuestión interesante sería documentar si estas dificultades también aparecen cuando la misma actividad de formulación o reformulación se presenta en un ambiente dinámico. En esta vena, Santos (1999) analiza el potencial de estos contextos dinámicos en el planteamiento de problemas o conjeturas.

Sin embargo, las sugerencias anteriores no deben verse en una perspectiva individual, sino contemplarse en un proyecto colectivo en el que participen los docentes y se involucre la institución para que este tipo de propuesta tenga un impacto en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

AGRADECIMIENTO

Expreso mi reconocimiento al doctor Manuel Santos Trigo por sus valiosas observaciones al presente trabajo, que fue producto de la tesis de doctorado bajo su dirección.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boaler, J. (2001), "Opening the Dimensions of Mathematical Capability: The Development of Knowledge, Practice, and Identity in Mathematics Classrooms", en R. Speiser, C. Maher y Ch. Walter (eds.), *Proceedings of the Twenty-Three Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter,* Snowbird, Utah, pp. 3-21.

Brown, S.I. y M.I. Walter (1990), *The Art of Problem Posing,* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

—— (eds.) (1993), *Problem Posing: Reflections and Applications,* Hillsdale, NJ, Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. (1998), "Children's Problem Posing Within Formal and Informal Contexts", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 29, pp. 83-106.

Kilpatrick, J. (1987), "Problem Formulating: Where Do Good Problems Come From?", en Alan Schoenfeld (ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education,* Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum Associates, pp. 123-147.

Krutetskii, V.A. (1976), *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren,* Chicago, University of Chicago Press.

Lesh, R. y A. Kelly (1997), "Teacher's Evolving Conceptions of One-to-One Tutoring: A Three-Tiered Teaching Experiment", *Journal Research in Mathematics Education,* vol. 28, pp. 398-430.

Lincoln, Y. y E. Guba (1985), *Naturalistic Inquiry,* Beverly Hills, CA, Sage.

National Council of Teachers of Mathematics (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,* Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

—— (1991), *Professional Standars for Teaching Mathematics,* Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

—— (2000), *Principles and Standards for School Mathematics,* Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Polya (1976), *Cómo plantear y resolver problemas,* México, Trillas.

Santos, M. (1999), "The Use Technology as a Means to Explore Mathematics Qualities in Proposed Problems", en *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol. 1, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, pp. 139-146.

Silver, E. y J. Cai (1996), "An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School Students", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 27, pp. 521-539.

Silver, E., J. Mamona-Down, S. Leung y P. Kenney (1996), "Posing Mathematical Problems: An Exploratory Study", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 27, pp. 293-309.

Thompson, A., R. Philpp, P. Thompson y B. Boyd (1994), "Calculational and Conceptual Orientations in Teaching Mathematics", en D.B Aichele y A.F. Coxford (eds.), *Professional Development for Teacher of Mathematics,* Libro del Año, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 79-92.

DATOS DEL AUTOR

Juan Estrada Medina

Departamento de Ingeniería de Sistemas, División de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México

estrada@servidor.unam.mx