Si no demuestro... ¿enseño Matemática?

Víctor Larios Osorio

Resumen: En este artículo se explora la concepción de la demostración desde la Matemática misma para exponer razones por las que no es conveniente eliminarla de la formación matemática de los alumnos. Además, se muestra que la función y el sentido de ésta no es único, por lo que debe estar acorde al desarrollo cognitivo de los alumnos y a consideraciones epistemológicas. Se exhibe el hecho de que las conjeturas y las argumentaciones son una manera de aprender a construir demostraciones, presentando como ejemplo el concepto de *unidad cognitiva de teoremas*.

Palabras clave: demostración, validación matemática, enseñanza de la demostración, argumentación, conjeturas.

Abstract: This paper shows the proof conception in mathematics in order to present reasons for avoiding its elimination from the students' mathematical training. Moreover, this work shows that functions and sense of proof are not unique, and it has to be presented according to the students cognitive development and some epistemological considerations. The paper shows also that conjectures and arguments are one way to learn the constructions of proof, including the concept of *cognitive unity of theorems* as an example.

Key words: proof, mathematical validation, proof teaching, argumentation, conjectures.

INTRODUCCIÓN

Se puede considerar la demostración matemática como una parte medular de la ciencia matemática y en este escrito ahondaremos en el papel que representa en la Matemática y en su enseñanza. Así pues, es importante considerar lo que se

Fecha de recepción: noviembre de 2001.

concibe comúnmente por una demostración en la escuela. A continuación tres ejemplos:

1. En el contexto de una clase de Geometría Euclidiana en bachillerato se les han presentado varias parejas de triángulos a los alumnos y se les ha solicitado que seleccionen aquéllas en las que los triángulos sean semejantes entre sí, además de anotar el criterio en el que basaron su conclusión. Un alumno se levanta, le enseña el cuaderno al profesor y pregunta:

—Maestro, ¿el ejercicio lo dejo así o lo demuestro?

Intrigado por la última palabra utilizada por el alumno, el profesor contesta con otra pregunta:

—¿Cómo lo demuestras?

—Le pongo el dibujo.

Con una sonrisa en los labios, el profesor contesta:

—No, así está bien.

2. En un curso de posgrado de Enseñanza de las Matemáticas, dirigido a profesores en activo de bachilleratos o tecnológicos, en el tema referente a los números complejos aparece el siguiente ejercicio:

Verifique que, si z_1 y z_2 son dos complejos diferentes de cero, entonces $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Donde el término *verifique* se refiere a realizar una demostración, es decir, una verificación de *todos los casos posibles* en los que z_1 y z_2 son números complejos.

Un primer *profesor A* escribe lo siguiente:

$$z_1 = (1+i) \text{ y } \bar{z}_1 = (1-i)$$

$$z_2 = (2+i) \text{ y } \bar{z}_2 = (2-i)$$

$$z_1/z_2 = (1+i)/(2+i) = ((1)(2)+(1)(1))/(2^2+1^2) + ((1)(2)-(1)(1))/(2^2+1^2)i$$

$$z_1/z_2 = (1+i)/(2+i) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{1+i}{2+i} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{1-i}{2+i} = \frac{1(2)+(-1)(-1)}{2^2+1^2} + \frac{-1(2)-1(-1)}{2^2+1^2}i = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i$$

Es decir, escoge un par de números complejos *en particular*, sustituye en el miembro izquierdo de la igualdad que se supone se va a demostrar, simplifica y luego hace lo mismo con el miembro derecho de la misma igualdad y, como en ambos casos llega a la misma expresión, concluye que el teorema es verdadero.

Un segundo *profesor B* inicia su desarrollo definiendo dos números complejos cualesquiera:

$$\text{Sean} \quad z_1 = x_1 + y_1 i \quad \text{y} \quad z_2 = x_2 + y_2 i$$
$$z_1 = r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \quad \text{y} \quad z_2 = r_2 \operatorname{cis} \theta_2$$

posteriormente declara a los conjugados de tales números y realiza una serie de pasos deductivos hasta que, efectivamente, determina que se cumple el teorema para cualquier par de números complejos. Pero para finalizar su ejercicio anuncia en el último renglón: *“Queda demostrado con el ejemplo anterior”*.

La duda que puede resonar sobre lo que le representó a este profesor es cómo concibió el proceso: ¿como un ejemplo? o ¿cómo una demostración?

3. Al inicio de los dos últimos cursos propedéuticos de la Maestría en Docencia de las Matemáticas[1] en la Universidad Autónoma de Querétaro se han aplicado encuestas donde se les hacen preguntas sobre la Matemática, sus métodos, objetos de estudio, etcétera, a los aspirantes al programa. Dos de las preguntas están relacionadas con la demostración, tanto en la Matemática misma como en su docencia.

Una de éstas es: *¿Para qué crees que se usa, en Matemáticas, la demostración matemática?* Y algunas de las respuestas representativas han sido:[2]

- “Para *validar* el conocimiento usado en las matemáticas, es el punto de partida y fin para los desarrollos matemáticos.”
- “Para *comprobar* que los resultados obtenidos son los correctos.”
- “Para *verificar* que alguna aseveración es válida con fundamentos teóricos.”

[1] Este programa de posgrado, de ingreso anual, se imparte en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro y está dirigido a los interesados en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática y toda la problemática que rodea a estos procesos, dándole preferencia a profesores en activo.

[2] Las cursivas en las respuestas (tanto de ésta como de la siguiente pregunta) han sido añadidas.

- "Para *corroborar* un conocimiento."
- "Para *demostrar* que las Matemáticas son *exactas*."

La otra pregunta es: *¿Tu crees que tenga alguna función la demostración matemática en la enseñanza de las Matemáticas?* Algunas respuestas han sido:

- "Sí, es la de permitir a un concepto matemático *ser considerado como cierto y aceptado* por todo el mundo y le permiten a las Matemáticas *ser exactas*."
- "Es lo *más importante* en el proceso matemático."
- "Para *verificar* que alguna ley está bien fundamentada."
- "Sí, porque así el alumno se entera *cómo funcionan las Matemáticas*, y no sólo se aprende de memoria los procedimientos."
- "El poderle *demostrar* al alumno de dónde y cómo se llega a una fórmula."
- "Con ella se logra *el rigor* de la atención esmerada hacia un tema, se obtiene claridad y precisión en el lenguaje."
- "Sí, permite *comprobar el aprendizaje* y reafirmarlo."

Éstos son algunos ejemplos de lo que se concibe como la demostración, hablando específicamente en el contexto educativo, lo cual tiene una influencia decisiva (para el caso del docente) sobre la manera en que se aborda la temática en clase.

LA DEMOSTRACIÓN EN LA CIENCIA MATEMÁTICA

Pero antes que nada, convendría establecer lo que *es* la demostración desde el punto de vista matemático.

Más que nada, la demostración en la ciencia matemática cumple un papel fundamental y epistemológicamente indispensable. En efecto, este método no es otra cosa que *el método de validación* del conocimiento científico producido en una ciencia en particular: la Matemática.

Aquí van tres ejemplos de lo que algunos matemáticos han expresado y con los cuales se podrán vislumbrar algunas de sus características:

- Morris Kline (Estados Unidos, siglo XX): "*todas las demostraciones matemáticas deben ser deductivas*. Cada demostración es una cadena de inferencias deductivas, y cada una de éstas con sus correspondientes premisas y conclusiones." (1992, p. 54.)

- Ignacio Bartolache (Nueva España, siglo XVIII): "[Es,] *por un exacto y bien ordenado discurso, la conexión que hay entre la hipótesis y la tesis, empleando para esto otras proposiciones establecidas de antemano, hasta venir a caer de silogismo en silogismo en la dicha tesis como en una consecuencia necesaria.*" (1990, p. 54.)
- Simon Singh (Inglaterra, siglo XX): "La idea clásica de una demostración matemática consiste en partir de una serie de axiomas o afirmaciones que pueden considerarse ciertos o que por evidencia propia lo son. Después, con una argumentación lógica y progresiva, se puede llegar a una conclusión. Si los axiomas son correctos y la lógica es impecable, la conclusión final es innegable. Esta conclusión constituye un teorema [...] La diferencia entre las pruebas científicas y las matemáticas es a la vez sutil y profunda y resulta crucial para poder comprender la obra de todo matemático [...] La prueba científica es tornadiza y chapucera sin remedio. Por el contrario, la demostración matemática es absoluta y libre de dudas." (1998, pp. 39-41.)

En términos generales, la concepción de lo que es una demostración no ha variado mucho desde la Grecia clásica hasta nuestros días (véase Bourbaki, 1972) y se puede ver que la característica más importante es la que se refiere a que debe ser *una cadena de deducciones*. Además, tales deducciones son abstractas, más que nada porque los mismos objetos de estudio de la Matemática también tienen este carácter. En definitiva, la demostración ha existido por la necesidad de justificar conocimientos abstractos que tienen que ser validados, proporcionando simultáneamente razones sobre su plausibilidad.

Sin embargo, existen impedimentos, tanto teóricos como prácticos, para lograr construir las demostraciones.

Un impedimento teórico está relacionado con resultados como los que obtuvo Kurt Gödel con sus teoremas de completez e incompletez para sistemas axiomáticos como los propuestos por David Hilbert a inicios del siglo pasado. Estos resultados muestran que no todas las proposiciones ciertas en un sistema axiomático como, por ejemplo, el de la Aritmética pueden ser deducidas a partir de los axiomas iniciales y utilizando las reglas de deducción establecidas. Esto quiere decir que existen conjeturas en algunas ramas de la Matemática que no pueden ser demostradas.

Por otro lado, una de las complicaciones prácticas es ejemplificada por Morris Kline (1992, p. 54) de la siguiente manera: "La inferencia inductiva de la suma de los ángulos de un triángulo puede efectuarse en cosa de minutos [...] Por otro lado, para llegar deductivamente a las mismas conclusiones tal vez harían falta semanas o acaso no alcanzara la vida entera del individuo normal".

Además, existe la situación, también práctica, de la casi imposibilidad de escribir deducciones rigurosas y exhaustivas en una demostración, teniéndose que obviar algunos pasos e introducir frases temidas como: "este hecho es trivial". Esta situación, en particular, ha implicado que algunas demostraciones no puedan ser entendidas por todos los miembros de la comunidad matemática, sino sólo por un grupo selecto de ella, quedando a su cargo la validación del procedimiento y convirtiendo a la demostración, en la práctica real, en un "argumento convincente, juzgado como tal por jueces calificados" (Rodino y Recio, 1997). Como consecuencia, la demostración matemática es deductiva pero no formal, y toma un carácter falsacionista, social, convencional e, incluso, temporal. Una demostración es, como menciona Pluvinage (1996, p. 77), "lo que los matemáticos aceptan como demostración". Incluso Gila Hanna (citada por Mariotti, 2001, pp. 3-4) proporciona varias condiciones para que un teorema sea aceptado:

- [Que los matemáticos] entienden el teorema (esto es, los conceptos involucrados, sus antecedentes lógicos y sus implicaciones) y no existe nada que sugiera que no es verdadero;
- [que] el teorema es lo suficientemente significativo para tener implicaciones en una o más ramas de las matemáticas, y así justificar un estudio y análisis detallados;
- [que] el teorema es consistente con el cuerpo de resultados aceptados;
- [que] el autor tiene una reputación impecable como un experto del tema del teorema;
- [que] existe un argumento matemático convincente para éste, riguroso o de lo contrario de un tipo que ha sido encontrado antes.

Como resultado de lo anterior, y de otros aspectos como el costo económico que representan investigaciones largas o como algunas posturas filosóficas, se ha propiciado la aparición de otros métodos que intentan ser reconocidos como de validación de la Matemática: la *demostración a conocimiento cero,* la *demostración holográfica* y la que usa computadoras. Estos métodos tienen sus inconvenientes desde el punto de vista lógico-epistemológico, especialmente porque podrían conducir a una *cultura matemática semirrigurosa,* que a la larga podría ser contraproducente para el desarrollo de la Matemática.[3]

Además, regresando al aspecto histórico, resulta que no siempre la demostración ha tenido la misma *función,* sino que ha tomado algunas características del ambiente científico-filosófico del momento. Por ejemplo, Evelyn Barbin (del IREM du Mans, Francia) ha dividido la historia de la demostración en tres etapas, de acuerdo, precisamente, con la intencionalidad que ha tenido (Arsac, 1988):

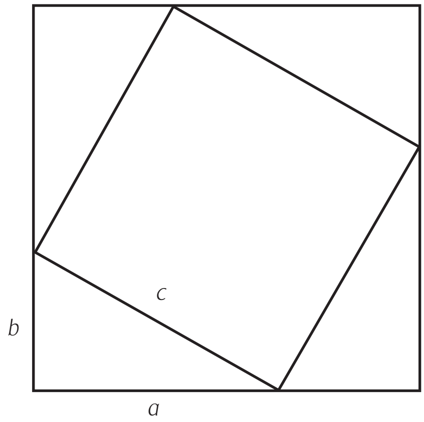
1. En Grecia, la demostración buscaba convencer en medio del debate.
2. En el siglo XVII, se buscaba que las demostraciones aclararan más que convencieran, y los métodos de descubrimiento desempeñaban un papel central.
3. En el siglo XIX, se regresó al rigor que permitió hacer frente a nuevas concepciones de los objetos matemáticos, lo cual trajo consigo problemas de fundamentos de la Matemática y la aceptación de teorías antiintuitivas o no evidentes.

Además, aun en nuestros días, es posible encontrar dos tipos de demostraciones,[4] unas *demuestran* (o verifican) y otras *explican,* es decir, unas están enfocadas a determinar si una proposición *es* verdadera y las otras, además de éste hecho, añaden información sobre el *por qué* es verdadera. Vale decir que no todos los teoremas tienen ambos tipos de demostraciones, mientras que otros no sólo tienen una de cada una, sino varias.

Un ejemplo al respecto son las demostraciones de la proposición 47 del libro I de *Los Elementos* de Euclides, que es el *Teorema de Pitágoras*. Una demostración que demuestra es, precisamente, la que exhibe Euclides. Por otro lado, una demostración que explica (usada eventualmente en las escuelas del nivel medio) es la que considera un triángulo rectángulo cuyos lados miden *a, b* y *c* (correspondientes a los catetos y la hipotenusa, respectivamente), para después construir un cuadrado como se muestra:

[3] La intención de este trabajo no es ahondar en este punto, pero el lector puede ver argumentos en contra y a favor de estos métodos de "validación" del conocimiento matemático en, por ejemplo, trabajos de Gila Hanna (1997) y de John Horgan (1993).

[4] Una nota importante: aquí no se está hablando de *teoremas,* sino de *las demostraciones* que puede tener *un* mismo teorema.



Se observa que el área del cuadrado es $(a + b)^2$, pero también se observa que se puede calcular sumando las áreas de los triángulos y la del cuadrado interior, por lo que se puede establecer la igualdad:

$$(a+b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right)+c^2$$

que desarrollada queda como:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

y, finalmente, simplificando se obtiene:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Hasta aquí con estos ejemplos.

Con lo expuesto en esta sección se puede vislumbrar que, en la Matemática, al igual que en las demás ciencias y como producto de una comunidad humana, existen "convenios" dentro de la misma comunidad con respecto a sus métodos científicos. Las concepciones de demostración y de los procesos válidos de validación están determinados por tales convenios y se modifican de acuerdo con las necesidades culturales y científico-filosóficas del entorno. Aunque por sus mismas características e importancia histórico-epistemológica resulta difícil modificarla en un futuro cercano, no se puede decir que la demostración (y el rigor) sea algo monolítico e inmutable.

LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA Y LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

En la enseñanza de la Matemática existe la postura de enfrentar a los alumnos a situaciones similares a la de los matemáticos para que construyan su conocimiento. Hay que aclarar que, con el término "similar", se refiere a situaciones donde se busca un conocimiento matemático y el desarrollo de habilidades en un nivel adecuado para el alumno, para que éste se involucre en un quehacer matemático y, entre otras cosas, desarrolle un conocimiento *funcional* de la Matemática.

De lo anterior se desprende que es necesario que los alumnos se enfrenten a las demostraciones y las construyan. No podemos esperar que conozcan el espíritu de la ciencia matemática completamente si se elimina una parte medular y epistemológicamente indispensable. (Un símil es la eliminación de los últimos pasos del método científico en el estudio de la Biología, de la Química o de la Física.) Sin embargo, si en la misma Matemática, como se dijo al final de la sección anterior, no existe una concepción única e inmutable de la demostración, entonces no es posible esperar que, en la escuela, la demostración tenga una sola concepción y que ésta se encuentre ligada fuertemente a un rigor exagerado que, ocasionalmente, se funda en el desconocimiento.

Para tratar de resolver esta situación podemos utilizar el concepto de *trasposición didáctica,* el cual tiene que ver con el trabajo de adaptación o de transformación del saber en objeto de enseñanza, en función del lugar, del público y de las finalidades didácticas que se persiguen. Al docente le toca la tarea de tomar el conocimiento matemático y adaptarlo o contextualizarlo al momento y lugar particular de su aula. En este proceso, hay que decirlo, existen fuertes influencias y las mayores son las concepciones epistemológicas del profesor, las cuales generalmente son implícitas. El conocimiento del docente sobre el carácter social y temporal de la Matemática es uno de los aportes más importantes que proporciona el conocimiento de la Filosofía, los fundamentos y la Historia de la Matemática.

De hecho, si se reduce el papel de la demostración en la escuela al de sólo una herramienta lógica de verificación de veracidad de una proposición (y más si éstas son evidentes por sí mismas), entonces los alumnos no hallarán justificaciones suficientes para ese trabajo y no se alcanzarán propósitos como el de construir relaciones complejas entre la observación, la argumentación y la construcción de demostraciones. Además, aparecen dificultades cognitivas, por ejemplo, como plantea Acuña (1996), los alumnos de ingreso al nivel medio superior no tienen herramientas para enfrentarse a situaciones como las de argumentar, conjeturar, deducir o demostrar, pues todas sus herramientas mentales han sido desarrolladas para otro tipo de problemas, como el cálculo, la construcción y el uso de algoritmos.

Entonces, considerando los problemas de concepción en la Matemática, la necesidad de llevar a cabo una transposición de dichas concepciones hacia el aula y de que la demostración no sólo verifique la veracidad de una afirmación, se hace necesario un replanteamiento al respecto.

Nicolás Balacheff ha definido la demostración como sigue:

> Prueba es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. En la comunidad matemática sólo pueden ser aceptadas como prueba las explicaciones que adoptan una forma peculiar, son una serie de enunciados organizados según reglas determinadas, un enunciado se conoce verdadero o bien se deduce de los que lo preceden a través de una regla de deducción tomada de un grupo de reglas bien definidas, llamamos demostración a estas pruebas. (Acuña, 1996, p. 95.)

Observando un poco, y refiriéndose al concepto de *explicación,* Balacheff sitúa la demostración no sólo como un método de validación, sino como un medio para comunicar ideas. En otras palabras, la demostración no sólo es un medio para validar conocimiento, sino que también puede ser un medio de comunicación. Michael de Villiers (1990) plantea cinco funciones que puede tener la demostración en el aprendizaje de la Matemática: *como verificación o convicción,* cuando se utiliza para plantear la verdad de un enunciado; *como explicación,* cuando provee una idea del por qué un enunciado es verdadero; *como sistematización,* cuando se plantean varios resultados dentro de un sistema de axiomas o teoremas; *como descubrimiento,* cuando se descubren o inventan nuevos resultados; y *como medio de comunicación,* cuando se utiliza para trasmitir el conocimiento matemático.

Ante esta diversidad, es necesario que el docente no sólo esté consciente de los dos tipos de demostraciones existentes, sino también de las funciones que pueden tener. Al profesor le toca decidir en qué momento una demostración (de uno u otro tipo) puede tomar una función u otra, ya que podría ser desastroso que no pudiera establecer una diferencia entre tipos y funciones, enfrentando a los alumnos a todos de manera indistinta.

LA PRODUCCIÓN DE CONJETURAS

El interés en la demostración en la enseñanza de la Matemática, por tanto, no se puede centrar únicamente (y a veces ni siquiera mayoritariamente) en la estructura lógico-axiomática de la demostración, sino en su *sentido* y en la *producción de argumentos encadenados deductivamente*. El rigor utilizado, ligado íntimamente a la misma concepción de la demostración, depende también del nivel en el que se trabaja (tanto de edad como de desarrollo cognitivo de los alumnos), pues no vale la pena aumentarlo a cambio de sacrificar la comprensión. Recordemos que la demostración como producto final, equivalente a lo que se publica en libros o revistas, es sólo la "punta del iceberg", como dice Tall (1992), y no refleja todo el proceso previo donde se plantearon conjeturas, se hicieron observaciones y análisis, se aportaron argumentaciones y se desarrollaron conocimientos y razonamientos.

En efecto, es muy fácil imaginar que los matemáticos, antes de publicar sus resultados, reflexionan sobre ellos, los corrigen y revisan, para después hacer que sólo aparezca un producto refinado y limpio. Incluso, históricamente hablando, los procesos de construcción del saber matemático comúnmente han pasado por dos momentos: uno de producción de una conjetura como el corazón mismo de la producción del conocimiento y otro, en el cual se realizó su sistematización. Lo razonable sería que en el aula ocurriese lo mismo, a un nivel de abstracción y rigor acorde con el desarrollo cognitivo de los alumnos.

Resulta útil para estos procesos considerar el concepto de *Unidad Cognitiva de Teoremas*, basado en la continuidad existente entre la producción de una conjetura y la construcción posible de su demostración (Garuti, Boero y Lemut, 1998). En otras palabras, se plantea que existe un ciclo continuo del tipo:

explorar → *conjeturar* → *explorar* → *organizar una demostración,*

donde las primeras dos etapas incluyen la parte del proceso relacionada con la producción de conjeturas, en la cual se llevan a cabo exploraciones, conjeturaciones, discusiones de tales afirmaciones y una primera sistematización de los enunciados; y las últimas etapas del proceso están enfocadas a la propia construcción de la demostración, después de una segunda exploración, de la búsqueda de argumentos convenientes y del encadenamiento deductivo necesario.

Esta propuesta insiste en el hecho de que todo ello funciona como una unidad, la cual se puede romper por diversos motivos. Uno de los casos más comunes es exponer a los alumnos a consignas del tipo "demuestre que...", donde se elimina la primera parte; otra posibilidad es que en la segunda parte del ciclo se pierda de vista el objetivo, por lo que sería necesario reapropiarse del proceso. Por tanto, es muy posible que el ciclo no sea lineal, sino que pueda convertirse en un proceso de "ida y vuelta" que haga que los individuos exploren, conjeturen, observen, desechen conjeturas, etcétera, en un proceso que no necesariamente sea corto.

Considerando todo lo anterior, se plantea aquí un esquema como la figura 1.

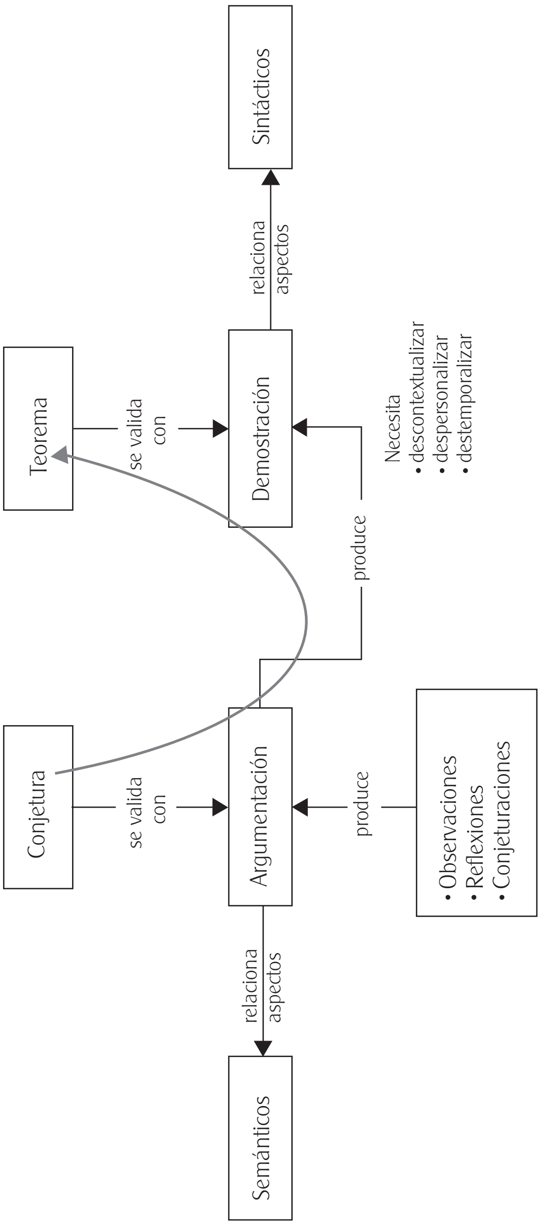
En la figura 1 se propone que una conjetura y un teorema se encuentran en el mismo nivel semiótico, pues en ambos casos se trata de proposiciones, aunque cada una de éstas obtiene su validez por diversos medios: mientras que la primera "la adquiere" con base en argumentos que son producto de observaciones, reflexiones y conjeturaciones y que tienen relaciones semánticas entre sí, el teorema obtiene su validez de la demostración, cuyas relaciones son más bien sintácticas.

El camino hacia la construcción de la demostración muy bien puede seguir la línea curva gruesa: venir de la producción de conjeturas, con el soporte de argumentos, para pasar a la demostración con un proceso de sistematización y "limpieza" que *descontextualice, despersonalice* y *destemporalice* los argumentos y los encadene en razonamiento deductivos. Conviene comprender que estos procesos no son simples, sino que implican un trabajo de dirección específico y, más que nada, uno de construcción por parte del alumno. En palabras de Bruno D'Amore (1999), se hace necesaria una didáctica específica que permita completar este paso efectivamente.

El profesor tiene algunos apoyos didácticos para poder planear este trabajo, pero también se tiene como un aspecto fundamental el lenguaje. Para la construcción de demostraciones o la misma producción de conjeturas y argumentos, se requiere un manejo cada vez más preciso del lenguaje natural y, también, de un lenguaje artificial. En este aspecto, los problemas que aparezcan no sólo le conciernen al profesor de Matemática, sino también al encargado de las áreas del lenguaje.

Así pues, el docente debe reflexionar sobre su situación, en particular con cada uno de los grupos o alumnos que tiene a su cargo. A este actor del proceso escolar le toca seleccionar qué se demuestra, con qué sentido y con qué profundidad, pues si bien no debe ser posible que un alumno pase por todos los niveles educativos preuniversitarios sin haber demostrado (repito: de acuerdo con su desarrollo cognitivo), tampoco es posible (ni recomendable) que *todo* sea demos-

Figura 1


Conjetura
se valida con
Argumentación
relaciona aspectos
Semánticos
produce
• Observaciones
• Reflexiones
• Conjeturaciones
Teorema
se valida con
Demostración
relaciona aspectos
Sintácticos
produce
Necesita
• descontextualizar
• despersonalizar
• destemporalizar

trado. Por tanto, la concepción de demostración no debe quedar encasillada en un canon inmutable lleno de un rigor exacerbado, pero tampoco se puede eliminar de la formación matemática del individuo.

Es peligroso tomar posiciones simplistas que eliminen las reflexiones didáctico-epistemológicas, pues esto llevaría a quitarle a los alumnos la oportunidad de conocer una parte importante de la Matemática (a la cual tienen derecho) y, al profesor, la oportunidad de explorar instrumentos didácticos válidos para la enseñanza de la Matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuña Soto, C.M. (1996), "Un modelo de tratamiento didáctico para la enseñanza del razonamiento deductivo y de la demostración en el nivel medio superior", en E.F. Hitt (ed.), *Investigaciones en matemática educativa*, México, Grupo Editorial Ibearomérica, pp. 93-109.

Arsac, G. (1988), "Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démostration et les phénomènes de validation en France", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, núm. 3, pp. 247-280.

Barozzi, G.C. (1995), "Il ruolo dell'informatica nella didattica della Matematica", en *Actas del XV Congreso UMI*, Padua, Italia, 1995.

Bartolache, J.I. (1990), *Lecciones matemáticas*, México, Gobierno del Estado de Guanajuato. (La edición original data de 1769.)

Boero, P., R. Garuti, E. Lemut y M.A. Mariotti (1996), "Challenging the Traditional School Approach to Theorems: A Hypothesis about the Cognitive Unity of Theorems", en A. Gutiérrez y L. Puig, (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, España, vol. 2, pp. 113-120. (http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes-/Boero/Boero96a.html)

Bourbaki, N. (1972), *Elementos de historia de las matemáticas*, España, Alianza.

D'Amore, B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*, Italia, Pitagora Editrice Bologna.

De Villiers, M. (1990), "The Role and Function of Proof in Mathematics", *Pythagoras*, núm. 24, pp. 17-24.

—— (1995), "An Alternative Introduction to Proof in Dynamic Geometry", *Micromath*, vol. 11, núm. 1, pp. 14-19.

Garuti, R., P. Boero y E. Lemut (1998), "Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof", en A. Olivier K. Newstead (eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education,* Sudáfrica, Universidad de Stellenbosch, vol. 2, pp. 345-352. (http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Garuti/Garuti98.html.)

Godino, J.D. y A. M. Recio (1997), "Meaning of Proofs in Mathematics Education", E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education,* Finlandia, Universidad de Helsinki, vol. 2, pp. 313-320. (http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Godino/Godino97.html.)

Hanna, G. (1997), "Il valore permanente della dimostrazione", *La matematica e la sua didattica,* vol. 3, pp. 236-252. (http://www.oise.utoronto.ca/~ghanna/pme96pfr.html.)

Horgan, J. (1993), "The Death of Proof", *Scientific American,* vol. 269, núm. 4, pp. 74-82.

Hoyles, C. (1998), "L'influenza del curriculum sull'approccio degli studenti alla dimostrazione", *La matematica e la sua didattica,* núm. 3, pp. 248-270.

Kline, M. (1992), *Matemáticas para los estudiantes de humanidades,* México, Fondo de Cultura Económica.

Larios O., V. (2000), *Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación Matemática,* Tesis de maestría, México, Universidad Autónoma de Querétaro. (http://www.geocities.com/discendi2/tm/tm.html.)

—— (2001), "Demostraciones y conjeturas en la escuela media", en J.E. Sagula y O.L. Isnardi (eds.), *Memorias del III Simposio de Educación Matemática,* Argentina, Universidad Nacional de Luján.

Mariotti, M.A. (2000), "La preuve en mathématiques", en actas de la Conferencia Enseigner les Mathématiques, Grenoble, Francia, julio de 2000. (http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Mariotti/Mariotti00.pdf)

DATOS DEL AUTOR

Víctor Larios Osorio

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ingeniería,

Universidad Autónoma de Querétaro, México

vil@sunserver.uaq.mx

Pluvinage, F. (1996), "Diferentes formas de razonamiento matemático", en P. Hitt E. (ed.), *Investigaciones en matemática educativa,* México, Grupo Editorial Ibearomérica, pp. 77-91.

Singh, S. (1998), *El enigma de Fermat,* México, Planeta.

Tall, D. (1992), "The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof", en D.A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics,* Estados Unidos, Macmillan, pp. 495-511.