Problemas aritméticos. Articulación, significados y procedimientos de resolución[1]

Marie-Lise Peltier

Resumen: En este artículo se hace una síntesis de diversos trabajos relevantes del campo de la psicología cognitiva y de la didáctica de las matemáticas, los cuales abordan la construcción del sentido en el caso particular de los problemas aritméticos. Se pretende aportar elementos teóricos que permitan comprender mejor cómo los alumnos pueden dar sentido al enunciado de un problema y comprometerse en la solución. Se trata también de hacer elecciones argumentadas para planificar la enseñanza de los problemas aritméticos en la escuela elemental.

Palabras clave: Construcción del sentido, problemas aritméticos, escuela primaria.

Abstract: This article proposes a synthesis of various works concerned with the fields of cognitive psychology and the fields of mathematics didactics on the question of meaning construction in the particular case of arithmetic problems. It is a matter of bringing theoretical elements making it possible to better understanding how the students can give sense to a problem statement and engage themselves into the resolution. It is also a question of making sound choices in order to plan the teaching of the arithmetic problems at elementary school.

Keywords: Meaning construction, arithmetical problems, primary school.

INTRODUCCIÓN

La cuestión de la enseñanza de las operaciones y de los problemas aritméticos es recurrente. ¿Cómo articular el trabajo sobre los problemas con la necesidad de adquisición de técnicas operatorias?, ¿Cómo trabajar el "sentido" de las operaciones?, ¿Qué significa "construir el sentido"? En este artículo, me propongo "re-visitar" estas cuestiones a la luz de diversos trabajos sobre el tema, presen-

Fecha de recepción: febrero de 2002.

[1] Traducción del francés de Alicia Ávila, David Block y Guillermina Waldegg.

tando primero diferentes puntos de vista complementarios sobre la noción de sentido.

Actualmente, un *slogan* de la pedagogía es la necesaria construcción del sentido. El postulado sobre el cual se apoya este *slogan* es que un conocimiento no puede ser funcional sino en la medida en que es portador de sentido para quien lo posee. De manera breve se podría decir que un conocimiento es portador de sentido para un sujeto si este último es capaz de identificar un campo de aplicación de este conocimiento. Pero esta formulación es relativamente reduccionista en la medida en que remite principalmente a un aspecto "funcional" de los conocimientos, toma en cuenta al sujeto, pero ignora en parte la naturaleza y el valor intrínseco de los conocimientos.

Desde un punto de vista filosófico, siguiendo a G. Deleuze (1969),[2] podemos considerar la cuestión del sentido a partir de la articulación de tres dimensiones:

- La primera es la relativa a lo que Deleuze designa como "referencia", y que se podría caracterizar de manera un poco simplista como vínculo con el mundo real; se podría igualmente decir que la referencia articula las proposiciones con los objetos de los que éstas hablan, esto remite a una cierta funcionalidad del saber y a una forma de objetividad, puesto que en ese dominio las proposiciones serán susceptibles de verificación.
- La segunda es la "significación", esta dimensión remite a los conceptos en sí mismos y a las relaciones entre los conceptos. En esta dimensión, las proposiciones son susceptibles de tener un valor de verdad, se puede hablar de la pertinencia o de lo absurdo de las proposiciones enunciadas.
- La última, la "manifestación", se refiere a hacerse cargo de la subjetividad de las proposiciones, el sujeto se apropia de la proposiciones o se distancia de ellas; es la relación del sujeto con el saber.

Desde el punto de vista de la psicología cognitiva, el sentido se define con referencia al sujeto. Para G. Vergnaud,[3] por ejemplo, el sentido es una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes.

Más precisamente, son los esquemas, es decir las conductas y su organiza-

[2] Citado por M. Fabre (1999).
[3] G. Vergnaud (1990), p. 158.

ción, evocados por el sujeto individual para una situación o para un significante, los que constituyen el sentido de esta situación o de ese significado para ese individuo. El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner a funcionar para abordar las situaciones a las cuales se enfrenta y que implican la idea de adición, es también el conjunto de esquemas que puede poner en práctica para operar con los símbolos, numéricos, algebraicos, gráficos y lingüísticos que representan la adición.

Desde un punto de vista didáctico, por ejemplo para Brousseau –que se apoya a este respecto en el pensamiento de Bachelard– el sentido de un conocimiento está definido por tres conjuntos:

a) la colección de situaciones en las que este conocimiento se realiza en cuanto teoría matemática (semántica).
b) la colección de problemas en los que este conocimiento interviene como solución (pragmática).
c) el conjunto de concepciones, de elecciones anteriores que él rechaza (historia individual y colectiva).

Se ve aquí aparecer la noción de concepción, tanto desde un punto de vista epistemológico como desde un punto de vista psicológico.

En cada uno de estos tres paradigmas encontramos, con pesos diferentes, la relación con el mundo, el aspecto subjetivo y las características teóricas y epistemológicas de los saberes.

Para la enseñanza que tiene por objetivo trabajar las operaciones aritméticas, la cuestión del sentido se planteará en tres niveles:

- El del concepto (sentido de la adición, de la sustracción, de la multiplicación, etcétera).
- El del problema (cómo ayudar a los niños a comprender un problema y resolverlo).
- El de la articulación entre la comprensión del problema y la puesta en marcha de un procedimiento de resolución.

I. EL SENTIDO DE UN CONCEPTO

I.1. CONCEPTO Y CAMPO CONCEPTUAL

Nos apoyaremos en la definición propuesta por G. Vergnaud:[4]

> Una aproximación psicológica y didáctica de la formación de conceptos matemáticos lleva a considerar un concepto como un conjunto de invariantes utilizables en la acción. La definición pragmática de un concepto apela así al conjunto de situaciones que constituyen la referencia de sus diferentes propiedades y al conjunto de esquemas puestos en práctica por los sujetos en esas situaciones. No obstante, la acción operatoria está lejos de ser la totalidad de la conceptualización de lo real. No se discute la validez o la falsedad de un enunciado totalmente implícito y no se identifican los aspectos de lo real a los cuales hay que poner atención, sin la ayuda de palabras, enunciados, símbolos y signos. El uso de significantes explícitos es indispensable para la conceptualización. Esto nos lleva a considerar que un concepto es una tripleta de tres conjuntos:
>
> C = (S, I, ###)
>
> S: el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencia);
> I: el conjunto de invariantes sobre los cuales descansa la operacionalidad de los esquemas (los significados);
> ###: el conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante).
>
> Estudiar el desarrollo y el funcionamiento de un concepto en el curso del aprendizaje o durante su utilización es necesariamente considerar a la vez estos tres planos. No hay en general una biyección entre significantes y significados, ni entre invariantes y situaciones. No se puede, pues, reducir el significado ni a los significantes ni a las situaciones.

Pero los conceptos no están aislados, están constituidos en una red y mantienen relaciones entre ellos, lo que conduce a G. Vergnaud a definir “campos conceptuales” (en otras disciplinas se habla también de “tramas conceptuales”).

[4] *Ibid.*, p. 145.

En un primer momento, Vergnaud[5] define un campo conceptual como "un conjunto de situaciones, lo que permite generar clasificaciones que se basan en el análisis de las tareas cognitivas y de los procedimientos que pueden ponerse en juego en cada una de ellas".

Así, por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras aditivas es el conjunto de situaciones, en el sentido de tareas, que demandan una adición, una sustracción o una combinación de tales operaciones. Esta primera aproximación permite, como ya señalamos, "generar una clasificación que descansa en el análisis de las tareas cognitivas y de los procedimientos que pueden ponerse en juego en cada una de ellas".

Después, Vergnaud[6] precisa: "el campo conceptual de las estructuras aditivas es a la vez el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas. Son así constitutivas de las estructuras aditivas, los conceptos de cardinal, medida, transformación temporal por aumento o disminución, relación de comparación cualitativa, inversión [...]"

Este segundo enfoque conduce a afinar la clasificación y, con ello, resulta a la vez matemática y psicológica.

La teoría de los campos conceptuales no es propiamente una teoría "didáctica", es una teoría del desarrollo cognitivo que resulta, como acabamos de decirlo, de consideraciones psicológicas y matemáticas. Esta teoría permite un análisis de las situaciones didácticas, pero también de las dificultades conceptuales encontradas por los alumnos, del repertorio de procedimientos disponibles, de formas de representación posibles, etcétera.

En didáctica de las matemáticas, M. Artigue[7] retoma esta definición de concepto de la manera siguiente, posicionándola en relación con la de concepción:

> Así como se distinguen en un concepto matemático la noción matemática tal como se define en el contexto del saber sabio en una época dada, el conjunto de significantes asociados al concepto, la clase de problemas en cuya resolución toma su sentido, los teoremas, las técnicas algorítmicas específicas del tratamiento del concepto, así también se distinguirán en las concepciones de los sujetos esos diferentes componentes y, en particular, la clase de situacio-

[5] *Ibid.*, p. 146.

[6] *Ibid.*, p. 147.

[7] M. Artigue (1984), *Contribution á l'étude de la reproductibilité des situations didactiques,* Tesis de doctorado de Estado, París VII.

nes-problema que dan su sentido al concepto para el alumno, el conjunto de significantes que él es capaz de asociar a dicho concepto, en particular las imágenes mentales, las expresiones simbólicas, los teoremas, los algoritmos de los que dispone para manipular el concepto.

I.2. Los campos conceptuales de las estructuras aditivas y multiplicativas

G. Vergnaud distingue en los problemas, los números que designan estados, que son números reales (positivos si designan estados-medida y positivos o negativos si designan estados relativos), y los números que traducen una transformación o una comparación (y que son reales positivos o negativos).

Así, en el enunciado "Cloé tiene 57 estampas, le da 15 a Jeanne. ¿Cuántas estampas tiene Cloé ahora?", el número "57" designa un estado (el haber inicial de Cloé), cuando Cloé da 15 estampas a Jeanne, se trata de una transformación que aquí es negativa y puede representarse por el número "-15". La pregunta orienta a la determinación del estado final, es decir, el número de imágenes de Cloé después de la transformación de su haber.

Tomemos otro ejemplo: "Pedro tiene 27 canicas, Víctor tiene 15 canicas más que Pedro, ¿cuántas canicas tiene Víctor?", el número "27" designa un estado, es el referente para la comparación, la comparación es positiva "+15", se busca el estado referido, es decir, el haber de Víctor.

Para las estructuras aditivas, G. Vergnaud identifica seis relaciones básicas a partir de las cuales es posible engendrar la casi-totalidad de problemas de adición y de sustracción de la aritmética ordinaria (véase el anexo 1).

Esta clasificación muy fina se apoya a la vez en un análisis matemático de los objetos en juego y de las relaciones entre esos objetos y en un análisis psicológico de la tarea por efectuar para resolver el problema.

La clasificación, que consiste en categorizar los problemas en función de si la resolución experta es una adición o una sustracción, hace caso omiso de los dos análisis anteriores para centrarse solamente en las escrituras matemáticas que traducen no el problema sino su solución. De dicha clasificación se deducía –de manera apresurada– que los problemas cuya resolución implica una sustracción eran más difíciles que los que requerían una adición. El contraejemplo siguiente permite invalidar esta concepción y mostrar que la dificultad de un problema está esencialmente ligada a su estructura y al elemento de esa estructura sobre el cual se plantea la pregunta.

Así el problema: "Paul tenía 105f (francos) en su portamonedas. Gastó 99f, ¿cuánto dinero tiene ahora en su portamonedas?" no plantea grandes dificultades a los alumnos, aunque se trata de una sustracción. En cambio el problema "María va de compras, gasta 150f. Ahora le quedan 200f en su portamonedas. ¿Cuánto dinero tenía María en su portamonedas antes de hacer las compras?" es un problema difícil aunque la situación sea familiar, aunque los números en juego sean simples y aunque la operación por efectuar (una adición) sea elemental.

La aproximación de G. Vergnaud permite poner en evidencia la necesidad de simultaneidad del aprendizaje de la adición y la sustracción, permite conducir un análisis *a priori* de las situaciones al precisar las relaciones matemáticas abordadas y la tarea de los alumnos.

En lo que concierne a las estructuras multiplicativas, G. Vergnaud propone cuatro clases: la comparación multiplicativa, la proporcionalidad simple, la proporcionalidad simple compuesta, la proporcionalidad doble (cf. anexo 2).

Desde un punto de vista didáctico, esta tipología permite re-visitar el problema del momento del aprendizaje en el que se introduce la división abogando por un acercamiento simultáneo con el de la multiplicación, siempre y cuando se elijan los problemas de manera pertinente.

Estas tipologías de problemas aditivos y multiplicativos permiten ayudar a los profesores a identificar con precisión, en los problemas que plantean, los objetos matemáticos en juego y sus relaciones, analizar la complejidad de la tarea que proponen y, por tanto, a decidir, establecer secuencias para conducir a los alumnos a enfrentarse a situaciones variadas y construir evaluaciones en concordancia con los aprendizajes efectuados.

Finalmente, se podrá decir que un sujeto construyó el sentido de una operación si reconoce en cualquier situación relevante del campo conceptual las estructuras que corresponden a esta operación, la estructura específica de esta situación y, posteriormente, si la aborda de manera conveniente. Pero la cuestión de saber cómo va a dar sentido el sujeto a un problema particular queda planteado y es esta cuestión la que vamos a examinar ahora.

II. EL SENTIDO DE UN PROBLEMA, REPRESENTACIÓN Y TRATAMIENTO ASOCIADO

II.1 ¿Qué es un problema?

Comenzaré haciendo una cita de J. Brun:[8]

> Un problema generalmente se define como una situación inicial con un objetivo por alcanzar, que le pide al sujeto realizar una serie de acciones o de operaciones para alcanzar ese objetivo. Sólo hay un problema en la relación sujeto-situación, y sólo cuando la solución no está disponible de golpe pero es posible construirla. Esto significa también que un problema para un cierto sujeto puede no ser problema para otro, debido, por ejemplo, al distinto nivel de desarrollo intelectual de ambos sujetos.

Dar sentido a un problema, o aun comprenderlo, requiere por lo tanto de la articulación de diversas competencias.

Comprender el problema es, por una parte, comprender que el enunciado planteado relata una cierta situación, la cual, en el caso de los problemas aritméticos de la escuela elemental, se obtiene con frecuencia de la vida real y, además, que los datos que se proporcionan son ya respuestas a preguntas que podría haberse planteado un personaje ficticio que se encontrara en la situación evocada. Pero es también comprender que ese enunciado debe conducir a una "acción" que implica una reflexión y tomas de decisión, es decir que no se trata simplemente de un acto de lectura, sino de un texto específico que contiene un proyecto de respuestas a preguntas. Así, Brousseau[9] propone una ingeniería para el aprendizaje de la sustracción que, escribe él, "se propone hacer pasar las preguntas del dominio del profesor al dominio del alumno, enseñar tanto las preguntas como las respuestas y, hasta donde sea posible, enseñar los conocimientos con su sentido"

Es por tanto indispensable que la lectura del enunciado evoque una situación que, si no es ya conocida por el alumno, sea susceptible de ser construida mentalmente por analogía o adaptación de situaciones conocidas. De esta manera, el alumno puede construir una representación mental de la situación evo-

[8] Jean Brun, *Math-Ecole*, núm. 141.
[9] Guy Brousseau (1989), *RDM 9/3*, La Pensée Sauvage, p. 327.

cada y anticipar las que pueden ser preguntas relativas a dicha situación. Puede entonces leer ciertos datos como respuestas a ciertas preguntas, mientras comprueba que otras preguntas no están planteadas en el enunciado pero podrían estarlo manipulando los datos. Sin fase de anticipación, es muy difícil "escoger la operación correcta". A partir de esta representación mental de la situación y de la anticipación de preguntas y de respuestas, el alumno puede resolver el problema y no a partir de rasgos o de índices superficiales del texto o de la proximidad temporal con nociones en proceso de aprendizaje.

II.2. La construcción de las representaciones

Los trabajos en psicología cognitiva que se han realizado desde hace unos 20 años han centrado la atención en la cuestión de la construcción de las representaciones del sujeto, tanto para fines de la comprensión de fenómenos cognitivos como para fines de ayudar al sujeto en casos de disfuncionamiento de los mecanismos cognitivos. El término de representación se utiliza aquí en el sentido de una representación puntual y ocasional ligada a una situación particular (en caso contrario se habla de conocimientos o de concepciones, de conjuntos de conocimientos y de creencias estables en la memoria de largo plazo, o de estructura cognitiva si lo que interesa es su organización).

Estos trabajos toman en cuenta los conocimientos en juego, los problemas y sus características propias, intentan describir la actividad mental en términos de procesos y estudian las representaciones.

Para dar una idea de estos trabajos, voy a hacer referencia en primer lugar a J. Julo.[10]

En la resolución de un problema, la actividad cognitiva se desarrolla en dos vertientes, una relativa a la representación, la otra relativa a la acción. Evidentemente estas dos vertientes están estrechamente ligadas. En esta construcción intervienen varios procesos que están naturalmente concatenados y no son sucesivos:

- Un proceso de interpretación y de selección
  A partir del contexto semántico que se le propone, el sujeto realiza una selección de las informaciones que le parecen pertinentes. Esta selección

[10] J. Julo (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, PUR.

está, por supuesto, en relación con sus conocimientos anteriores disponibles en un doble movimiento, de los conocimientos disponibles hacia las informaciones y de las informaciones hacia los conocimientos disponibles, desencadenados por la consideración de las informaciones.

- Un proceso de estructuración
  El contenido de las representaciones no es un conjunto de entidades disjuntas. Las representaciones están fuertemente organizadas, su contenido constituye "un todo" que tiene su funcionamiento y su lógica propios. La cuestión consiste en saber cómo se efectúa la estructuración de la representación. Intervienen varios factores: el contexto semántico y los conocimientos anteriores que éste permite movilizar, las analogías con otros problemas que él induce (los problemas encontrados con anterioridad se almacenan en la memoria y desempeñan un papel de "esquemas de problemas" que forman parte de los conocimientos puestos en funcionamiento por el sujeto en el momento de conocer el enunciado del problema), pero también los procedimientos y las estrategias puestos en marcha progresivamente conforme se van haciendo intentos de resolución.
- Un proceso de operacionalización
  Ya hemos visto que la representación de la situación en la resolución de un problema tiene como propósito permitirnos actuar para alcanzar el objetivo propuesto.

El proceso de operacionalización es el que permite el paso a la acción, ya sea que se trate de una acción efectiva (hacer un cálculo, un esquema...) o de una acción mental (hacer deducciones, emitir una hipótesis...). Este paso a la acción resulta de la aplicación de los conocimientos operatorios que provienen de nuestra experiencia. Recíprocamente, el hecho de actuar va a tener, como lo hemos sugerido ya, una influencia sobre la representación, especialmente sobre su estructuración, lo cual permitirá también integrar nuevos elementos, ya que, al transformar la situación inicial, la acción va a transformar el contenido de la representación y también, sin duda, tendrá una repercusión sobre el control de la pertinencia de la representación con respecto al objetivo por alcanzar. Este proceso de operacionalización se manifiesta especialmente en el tanteo.

La representación puede ser más o menos operacional, es decir, puede hacer más o menos fácil la elaboración de un procedimiento o de una estrategia.

La cuestión del paso de la representación a la acción todavía no se conoce bien, pero pueden citarse algunos casos en los que este paso parece facilitarse.

El primero es el caso en el que los conocimientos operatorios se pueden poner en movimiento de inmediato ya que hay un reconocimiento por parte del sujeto del tipo de problema. Éste es el caso en particular de los problemas que son objeto de un entrenamiento específico.

El segundo es el caso de los problemas en los que es posible desarrollar una gran cantidad de acciones, hacer numerosos ensayos, ya que en este caso la representación inicial se enriquece y puede estructurarse.

El tercero es el caso más frecuente en matemáticas. Es el caso en el que los conocimientos adquiridos anteriormente y que se pueden poner en movimiento permiten modelizar la situación y trabajar con el modelo mediante modos de representación simbólicos más operacionales que el lenguaje: esquemas, cuadros, diagramas, escrituras aritméticas. En efecto, el proceso de modelización simplifica la representación, la vuelve considerablemente más operacional y permite el control de la pertinencia.

Apoyándose en el análisis de los procesos cognitivos en juego en la actividad de resolución de problemas, J. Julo propone una modalidad de acción didáctica para ayudar a los alumnos a enriquecer su representación del problema y volverla operativa o, dicho de manera más simple, para ayudar a los alumnos a comprender el problema para poderlo resolver y luchar contra los disfuncionamientos. Esta modalidad consiste en enriquecer el contexto que caracteriza el problema dado, proponiendo simultáneamente varios enunciados de ese problema (misma problemática, mismos valores numéricos sólo cambia el contexto semántico) entre los cuales el alumno escoge el que él quiere resolver, o bien, puede resolverlos todos. Esta modalidad está orientada hacia la representación y prácticamente no afecta el proceso de resolución.

Las experiencias realizadas muestran una clara mejoría en el grado de éxito de todos los alumnos, mejoría que puede explicarse por varios factores entre los cuales cabe destacar un peso menor del contexto en la construcción de la representación y, por ello, una posibilidad de estructuración acrecentada, así como un aumento de la probabilidad de poner en movimiento esquemas de problemas y de conocimientos operatorios.

II.3. Las etapas en la construcción del sentido de un problema

La construcción del sentido de un problema se apoya en el paso de una representación de la situación a una representación del problema, es decir, a una representación de la situación que integra la vertiente de la acción. Las modalidades de representación evolucionan progresivamente.

En el caso de los problemas aritméticos, la evolución puede dividirse en varias grandes etapas o, más bien, en varias modalidades grandes, ya que la evolución no es necesariamente lineal.

A. Las modalidades de representación icónicas, figurativas o analógicas

- La modalidad de las representaciones figurativas no operativas se encuentran con frecuencia en el segundo ciclo y pueden estar todavía presentes en algunos alumnos del tercer ciclo.
  El niño percibe la historia con personajes y objetos, y se construye una especie de película pero sin percibir todavía la trama numérica. Si se le pide que represente por escrito la situación, hará dibujos que no permitirían un procedimiento de resolución.
- La modalidad de las representaciones figurativas operativas.
  El niño sigue dependiendo mucho del contexto y de la realidad a la que éste corresponde, pero puede organizarlo de manera operativa. Dibuja todavía de una manera figurativa, pero ya toma en cuenta las informaciones numéricas, el dibujo puede, por tanto, servir como un soporte para la resolución.
- La modalidad de las representaciones analógicas.
  El niño permanece todavía ligado al contexto, a la representación de los personajes y de los objetos, pero, por una parte, no conserva más que aquellos que son pertinentes para el problema, por otra parte, ya no intenta fijar la realidad exactamente, puede simplificar los objetos, simbolizarlos con ruedas, taches, puntos, con sus dedos... y utilizar esas colecciones analógicas para resolver el problema al menos parcialmente, con un procedimiento probablemente muy "primitivo" y de alcance muy local.

B. Las modalidades de las representaciones simbólicas

El niño se desprende de la representación icónica para interesarse ahora sólo en las relaciones entre los objetos. Entre las representaciones simbólicas, se encuentran modos de representación esquemáticos (diagramas de Venn, esquemas con flechas, cuadros, recta numérica, segmentos, tablas de proporcionalidad, etc.). Estos esquemas constituyen un medio para identificar con mayor claridad los objetos matemáticos decisivos para la conceptualización. Constituye una modalidad más abstracta y más rica en el plano operativo.

Encontramos finalmente las escrituras aritméticas que constituyen representaciones simbólicas particulares. Traducir el enunciado de un problema a una escritura numérica (del tipo ecuación para los problemas aritméticos) es una modalidad experta de representación que permite dar la respuesta solicitada a un menor costo. Esta modalidad supone la asimilación de las modalidades anteriores, traduce lo que normalmente se llama la adquisición del sentido del problema.

Estas representaciones simbólicas representan un papel que podría designarse como "en espiral": se apoyan en categorizaciones primitivas de diversas situaciones conocidas ya utilizadas, al mismo tiempo que posibilitan en el alumno el desarrollo de competencias para categorizar las situaciones nuevas que encuentra y, de esta manera, afinar las primeras categorías que sirven otra vez como apoyo para enriquecer las diversas clases de situaciones.

A cada una de estas modalidades se asocia una modalidad de representación mediante el lenguaje cuya función es múltiple: ayuda a la designación que permite la identificación de elementos de la situación y de sus relaciones, ayuda a la anticipación de los efectos y de las metas, ayuda al pensamiento, al razonamiento y a la inferencia, ayuda a la organización de la acción, planificación y control.

II.4. De la representación de la situación a la puesta en marcha de procedimientos de resolución

Descaves[11] insiste en el hecho de que construir la representación de un problema y calcular su solución son dos fases de la resolución que están en interacción, pero que no utilizan los mismos procesos mentales: proceso de categorización para la construcción de la representación, procesos calculatorios en el segundo caso. Plantea la hipótesis de que ciertos registros semióticos (esquemas, escrituras algebraicas) funcionan como interfases y pueden interpretarse primero como modelización de la situación y después como soporte que permite transformaciones simbólicas de los problemas.

[11] A. Descaves (1999), "Introduction du symbolisme à la fin de l'école élémentaire et au début du collège", en *Actes du 26 ième Colloque de la Corirelem*, Limoges, IREM du Limousin.

A continuación damos dos ejemplos que analiza A. Descaves para ilustrar lo anterior, según si la representación icónica de la situación está en concordancia con la escritura aritmética que traduce la solución, o si no lo está. Se trata del problema de Paul, que tenía 105 francos y gastaba 99, y del de María a quien, después de haber gastado 150 francos, todavía le quedaban 200 francos.

El problema de Paul es un caso de concordancia. En efecto, la escritura aritmética que representa el problema es idéntica a la que da la solución: 105 - 99 = ?

El cálculo efectivo de la solución depende por supuesto de los conocimientos empleados por los alumnos. Los procedimientos pueden ser muy numerosos y variados y pueden basarse en:

- la relación de concordancia con la representación mental icónica (figurativa o analógica);
- la transformación previa de la representación icónica (reciprocidad de transformaciones: lo que Paul tiene ahora, agregado a lo que ha gastado es 105 francos, por tanto 99 + ? = 105);
- una transformación de significado en el sistema aritmético del tratamiento (buscar $a - b$ equivale a encontrar lo que hay que agregar a b para obtener a);
- un sistema de transformaciones en el sistema de representación aritmética ($a - b = (a + n) - (b + n)$, por tanto, para calcular la diferencia 105 – 99 se puede calcular la diferencia 106 – 100);
- la ejecución de una técnica operatoria;
- transformaciones que operan sobre la representación aritmética del problema y sobre los conocimientos de numeración (–99 equivale a –100 + 1).

El problema de María es un caso de discordancia, puesto que la representación icónica es la de una disminución y, por tanto, una escritura aritmética que traduce este enunciado es del tipo ? – 150 = 200, en cambio, la escritura aritmética experta que representa la solución es 200 + 150 = ?

Por consiguiente, aquí la discordancia implica necesariamente transformaciones. Los procedimientos pueden basarse en diversos tipos de transformaciones:

- una transformación previa que opera sobre la representación icónica de la situación (¿cuánto hubiera conservado María si no hubiera ido de compras?);
- el tratamiento que opera sobre una representación esquemática del problema, por ejemplo:

   - uso de la reversibilidad de las transformaciones: −150, +105 en un esquema sagital,
     −150
     ? → 200
   - uso de la recta numérica
   - uso de segmentos puestos uno detrás de otro que representan respectivamente el gasto o lo que queda, etcétera.
- el reconocimiento de una situación aditiva y el tanteo controlado, etcétera.

A partir de sus trabajos, A. Descaves propone una ayuda para pasar de la representación a la elaboración de un procedimiento de cálculo a través de un proceso algebraizante. Puesto que la construcción del procedimiento de cálculo requiere una transformación del significado dentro del sistema de representación o en el del tratamiento aritmético, Descaves plantea la hipótesis de que el hecho de poder nombrar la incógnita constituye en sí mismo una ayuda tanto para la comprensión del problema como de para su tratamiento. Además, la introducción y la utilización de escrituras matemáticas pueden tener, según él, un papel determinante como ayuda para la categorización de los problemas. Así, desde el CE2,[12] introduce una representación en un cuadro como soporte para la automatización de ciertas relaciones numéricas, el cual permite imaginar en una coherencia casi formal entre las tres escrituras: 6 + 4= 10, 10 − 4 = 6 y 10 − 6 = 4.

10	
6	4

Se dan entonces varios problemas y varias escrituras matemáticas, los alumnos deben vincular cada problema con las escrituras que lo traducen (un problema, varias escrituras posibles), después deben asociar cada problema a uno de los dos cuadros que le corresponden, lo que conduce a categorizar los problemas.

Por otra parte, si se parte de la hipótesis de que la modelización permite una mejoría en el tratamiento del problema, la pregunta es si sería razonable proponer a los alumnos un aprendizaje de la esquematización. A. Broner y el equipo de investigación ERES de Montepellier realizan actualmente un estudio sobre esa cuestión, apoyándose en las hipótesis siguientes:

[12] N de T: CE2 corresponde al tercer grado de primaria en México.

- Los esquemas desempeñan un papel de representaciones intermedias entre el lenguaje natural y el simbolismo matemático.
- Los esquemas no son ni necesarios ni indispensables para una resolución exitosa del problema; sin embargo, constituyen una ayuda eficaz para la representación y la resolución de problemas estándar difíciles o de problemas complejos que el maestro podría difícilmente proponer en un nivel escolar dado.
- Para ser eficaz, la esquematización supone una enseñanza en la que los esquemas se integran como herramienta de ayuda junto con las herramientas matemáticas, una enseñanza donde el lugar y el estatuto deben pensarse dentro de la progresión de aprendizaje y las situaciones propuestas.

Los primeros resultados parecen mostrar que si bien los alumnos que ya lograban resolver problemas sin utilizar los esquemas no siempre los utilizan en la resolución de nuevos problemas después de la enseñanza específica de la esquematización, algunos de los que no lograban desarrollar procedimientos de resolución antes de la enseñanza se apropian de este procedimiento con éxito.

En la Teoría de las Situaciones, G. Brousseau[13] plantea la hipótesis de que "el sentido de un conocimiento proviene en gran parte del hecho de que el alumno adquiere este conocimiento adaptándose a las situaciones didácticas que le son devueltas" y admite también que "para todo conocimiento existe una familia de situaciones susceptible de darle un sentido correcto". Precisa que "en ciertos casos, existen algunas situaciones fundamentales accesibles al alumno en un momento dado que le permiten construir, en relativamente poco tiempo, una concepción correcta del conocimiento (...)". A partir del ejemplo de la enseñanza de la sustracción, G. Brousseau[14] propone una situación fundamental, la cual, según afirma, permite construir a la vez el sentido correcto de la sustracción y los procedimientos de resolución. Se trata de "el juego de la caja". Para describir esta situación que se desarrolla en 17 sesiones, G. Brousseau empieza por insistir en la necesidad de devolver a los alumnos no únicamente el problema sino también la pregunta, y muestra cómo pueden aprovechar las fases adidácticas en la situación didáctica elaborada por el maestro, de manera que se logre que el alumno se responsabilice del conocimiento que va a adquirir. La articulación del sentido y de la técnica se trata mediante la consideración de los procedimientos empíricos

[13] G. Brousseau (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, p. 73.
[14] *Ibid.*

utilizados por los alumnos en las fases de acción, mediante su evolución a lo largo de un periodo de tiempo largo, gracias a un juego sobre las variables de comando que están a disposición del maestro, y mediante la institucionalización de una técnica oficial cuando ya se ha efectuado un trabajo importante sobre la cuestión.

Aquí el punto de vista de R. Douady sobre la herramienta dialéctica aporta elementos interesantes para comprender el paso de los procedimientos de cálculo empíricos, en cuanto herramientas de resolución, a la utilización de procedimientos expertos de cálculo reflexivo o algoritmizado, es decir, a objetos de saber.

Podemos mencionar también aquí las ideas de R. Brissiaud para ayudar a los alumnos a establecer procedimientos de cálculo expertos. Brissiaud concede especial importancia a las relaciones de concordancia o de discordancia entre la representación inicial de un problema y la economía de su resolución numérica. Considera que se trata aquí de un fenómeno que permite precisar los interjuegos de la conceptualización aritmética y elaborar situaciones de aprendizaje. Brissiaud dice que hay concordancia en un enunciado como "Juan tiene 105 francos, gasta 6 francos, ¿cuánto tiene ahora?", puesto que el resultado de la operación $105 - 6$ puede determinarse por un conteo regresivo de manera económica y, por tanto, sin un procedimiento de cálculo de la sustracción. De la misma manera, el problema "un niño compra tres chocolates a 50 francos cada uno, ¿cuál es el precio total?" es un caso de concordancia pues 3×50 puede calcularse de manera económica, mediante $50 + 50 + 50$. En cambio, hay discordancia en los casos siguientes: "Juan tiene 105 francos gasta 67, ¿cuánto tiene ahora?", o bien, "un niño compra 50 chocolates a 3 francos cada uno ¿cuál es el precio total?", porque el procedimiento de cálculo experto es económico con respecto a los procedimientos empíricos. Brissiaud plantea entonces la hipótesis de que, para que haya aprendizaje, el primer encuentro con una operación debe ser en una situación de discordancia y que, por tanto, conviene enseñar el procedimiento experto en el caso de discordancia. Podría pensarse *por el contrario* que es precisamente el juego sobre las variables numéricas lo que va a permitir una evolución de los procedimientos empíricos hacia procedimientos más elaborados, es decir expertos, sin pérdida de sentido, y que la utilización por parte del alumno de un procedimiento experto en un caso de discordancia podría ser una manifestación de la comprensión de ciertas propiedades de la operación.

Por otra parte el sentido de un problema no es el sentido de un concepto, inferir la construcción del sentido solamente del primer encuentro es tal vez un poco reductor de la manera en la que se puede construir el sentido de un concepto. Estas cuestiones deben seguir siendo estudiadas.

Las investigaciones de D. Butlen y M. Pezard[15] muestran el impacto de una práctica regular de cálculo mental sobre las competencias de los alumnos en la resolución de los problemas aritméticos. En efecto, si el cálculo mental aporta de manera natural un mejor dominio de los cálculos e interviene como una herramienta de previsión o de control, abre paralelamente un espacio de libertad en la búsqueda del modelo, permitiendo tomar cierta distancia con respecto a los datos numéricos y una exploración más cómoda de las relaciones entre los datos. Los autores concluyen: "el aporte de cálculo mental se vincula con la heurística en la medida en que ayuda al alumno a adquirir estrategias de resolución de problemas numéricos".

Finalmente tres tipos de tareas contribuyen a mejorar de manera significativa la resolución de problemas aritméticos en el caso de muchos alumnos:

- El entrenamiento regular en la utilización de diferentes procedimientos de cálculo basados en diferentes significaciones de las operaciones.
- La adquisición de automatismos en la producción de relaciones numéricas.
- El entrenamiento para hacer explícitas las elecciones de las operaciones y de los procedimientos de cálculo empleados en la resolución, esto con diferentes registros de escritura.

II.5. El papel del maestro

Desde un punto de vista práctico, es muy compleja la tarea, delegada al maestro, que consiste en seleccionar o construir clases de problemas que permitan a los alumnos construir un concepto tal como el de una operación aritmética. Para intentar llevar esta tarea a buen término, es importante que el maestro tenga en cuenta cierto número de parámetros sobre los cuales puede maniobrar. Algunos de éstos han sido objeto de amplios comentarios en el presente texto, mientras que otros sólo se han mencionado. Desde nuestro punto de vista, el parámetro fundamental es la estructura del problema. El análisis de esta estructura, la identificación de la subcategoría dentro de la estructura dada, que es función del elemento que se busca, permite ubicar con precisión los conocimientos en juego, entrever *a priori* los procedimientos de los alumnos y, en consecuencia, preparar

[15] D. Butlen y M. Pezard (2000), "Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège", *Revue Repères Inter-IREM,* París, pp. 5-24.

las ayudas que puedan ser necesarias. Este análisis permite construir una progresión a mediano y largo plazo con el propósito de cubrir lo más posible el campo de problemas susceptibles de ser planteados y, por tanto, permite aproximarse al concepto bajo sus múltiples aspectos. Este análisis, finalmente, lleva a proponer evaluaciones adecuadas al trabajo ya efectuado con los alumnos.

Los valores numéricos constituyen el segundo parámetro fundamental, pues, por una parte, haciéndolos variar, el maestro podrá adaptar el problema a sus alumnos y, por otra parte, podrá propiciar la evolución de sus procedimientos de resolución. El docente puede hacer elecciones con respecto a la naturaleza de los números (enteros, decimales, fracciones), con respecto a sus características aritméticas (paridad, divisores primos, relaciones con la base de numeración, etc.), con respecto a su tamaño y a su tamaño relativo y con respecto a la naturaleza de las magnitudes que representan. Por supuesto, es fundamental un análisis del texto del problema, como texto escrito: las características lingüísticas del enunciado (vocabulario, presencia de operadores semánticos, sintaxis, puntuación), su organización (isomorfismo o no, isomorfismo entre la estructura temporal del enunciado y la de la situación evocada), el lugar de la pregunta, todo ello tiene una incidencia importante en la construcción de la representación del problema por parte del alumno. Finalmente, la elección de contextos más o menos vinculados a campos de experiencia de los alumnos puede facilitar o, por el contrario, dificultar esta construcción.

CONCLUSIONES

La aportación de la teoría de campos conceptuales asociada a una reflexión sobre la organización didáctica que tiene en cuenta, a la vez, las funciones epistemológicas de los conceptos, la significación social de los dominios de experiencia a los que éstos hacen referencia, las interacciones entre los actores de la situación didáctica y, en consecuencia, el contrato, es fundamental para llevar a los alumnos a construir el sentido de las "operaciones", proponiéndoles problemas que cubren, tanto como se pueda, una gran variedad de categorías. Queremos insistir en la fuerte imbricación que hay entre la adquisición del sentido de un problema y los procedimientos de resolución que los alumnos ponen en funcionamiento, ya que hemos visto que las tentativas de resolución tienen influencia en la representación del problema y, en consecuencia, que estos procedimientos, aunque sean arcaicos, contribuyen a la construcción del sentido. Insistimos, igualmente, en la necesidad de que el profesor juegue con las variables de las situaciones para hacer evolucionar las técnicas empíricas hacia técnicas más expertas de cálculo reflexivo o algoritmetizado. También quedó planteado el asunto del peso respectivo del trabajo sobre el sentido y de éste sobre la adquisición de técnicas. Pero el sentido y el funcionamiento automático de los conocimientos no se oponen, todo lo contrario, es indispensable tener un funcionamiento automático sobre ciertos puntos para liberar espacio de trabajo en la memoria y abordar así objetos nuevos. Cuando el profesor decide poner orden en estas técnicas diversas y pasar a una fase de institucionalización de una técnica convencional oficial, es posible regresar al sentido, preguntándose por los mecanismos movilizados en la técnica y en su justificación matemática; el funcionamiento automático que se alcanza con fines de aprendizaje necesita, a su vez, la puesta en marcha de medios de control que se apoyen en el sentido.

Finalmente, sólo se puede estar seguro, en términos prácticos, de que un alumno dispone de un concepto matemático con suficiencia de sentido, cuando es capaz de movilizarlo sin ayuda en situaciones suficientemente complejas en las que entra en juego el concepto, y de utilizar los diferentes teoremas asociados. Esto requiere que el alumno haya tenido, con suficiente frecuencia, la ocasión de tener que actuar bajo su propia responsabilidad sobre este tipo de problemas, y que haya tenido que plantearse preguntas fundamentales en relación con el sentido del concepto. Sólo a largo plazo se puede construir tal aprendizaje.

ANEXO 1

Tipología de G Vergnaud[16] relativa a las estructuras aditivas

En la escuela elemental, los problemas aditivos se localizan, esencialmente, en las tres primeras estructuras:

- Composición de dos medidas
  En esta familia se encuentran esencialmente los problemas de reunión o de fraccionamiento de colecciones o de magnitudes medibles. Según que se busque el todo o una de las partes, la operación experta asociada es una adición o una sustracción.

[16] Tomada del libro *Le moniteur de mathématiques, Résolution de problèmes,* bajo la dirección de G. Vergnaud, Nathan (1997), p. 16.

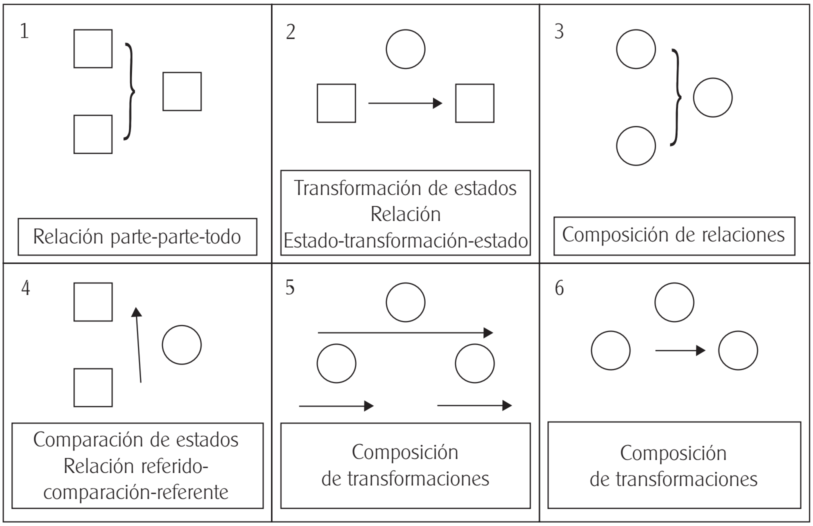
- Relación de transformación de estados
  Se trata de enunciados que describen situaciones que se desarrollan a menudo en el tiempo, en las que se puede identificar un estado inicial y una transformación (positiva o negativa) que opera sobre este estado para llegar a un estado final. Esta estructura permite definir seis categorías de problemas, según si la transformación es positiva o negativa y si la búsqueda lleva al estado final, a la transformación o al estado inicial.
- Relación de comparación aditiva
  Dos estados relativos a dos magnitudes medibles o localizables se comparan de manera aditiva, donde una de las magnitudes desempeña el papel de referente de la otra. La relación se enuncia mediante las expresiones "de más" o "de menos". En esta familia se encuentran, igualmente, seis categorías según si la relación es positiva o negativa, y si la pregunta lleva a la búsqueda del referido, de la comparación o del referente.

Entre las otras estructuras se encuentran:

- Las composiciones de transformaciones
  Dos transformaciones o más se aplican sucesivamente a estados desconocidos (porque si fueran conocidos, caerían en la familia de "relaciones de transformación"). La transformación única, compuesta de estas transformaciones, permite transformar el estado inicial en el estado final obtenido después de la aplicación de todas las transformaciones implicadas.
  En esta familia, el número de subcategorías depende del número de transformaciones compuestas; en el caso de dos, se pueden definir doce subcategorías según si las transformaciones compuestas son del mismo signo (dos casos), de signos opuestos (dos casos, según si la composición es positiva o negativa), y si la pregunta lleva a la determinación de la composición o de una de las dos transformaciones (tres casos).
- Las composiciones de relaciones
- Las comparaciones de transformaciones

Estos dos últimos casos pueden describirse de manera análoga a los anteriores. No aparecen prácticamente en ningún problema planteado en la escuela elemental.

Cuadro de las relaciones aditivas



Algunos ejemplos de problemas aditivos

Matilde gastó 149 F al comprar un casete de 68 F y un libro. ¿Cuál es el precio del libro?	Composición de dos medidas. Se conoce una medida y la composición, se busca la otra.
En el salón hay 42 mesas y 27 sillas. ¿Cuántas sillas es necesario traer para que haya una silla para cada mesa?	Transformación de estados. Se busca la transformación necesaria para que del estado inicial 27, se obtenga el estado final 42 definido por el cardinal de una colección de referencia (las mesas).[17]
Kevin tiene 145 timbres en su colección. Víctor tiene 20 más. ¿Cuántos timbres tiene Víctor?	Comparación positiva entre dos estados. Se busca el estado referido
Hoy hay 15° de temperatura en París, es decir, 12° menos que en Niza. ¿Cuál es la temperatura en Niza?	Comparación negativa entre dos estados. Se busca el estado referente.
En un puesto de la feria, Laura probó suerte dos veces seguidas. La primera vez, perdió 17 puntos. En total, ganó 50 puntos. ¿Qué pasó la segunda vez?	Composición de dos transformaciones, se conoce la primera transformación (negativa) y la composición (positiva), se busca la segunda.

[17] R. Brissiaud define una categoría particular para este tipo de problemas que designa "problemas de igualación". Por nuestra parte, consideramos que se trata de un caso particular de problemas de transformación.

ANEXO 2

Tipología de G. Vergnaud relativa a las estructuras multiplicativas

La comparación multiplicativa de magnitudes

En esta categoría, se encuentran los problemas que utilizan una única magnitud (medible o localizable) y dos estados relativos a esa magnitud, los cuales son objeto de la comparación multiplicativa: uno representa el papel de referente del otro. La relación numérica de comparación es entonces una relación de naturaleza escalar (sin dimensión) que se enuncia mediante las expresiones "tantas veces más", "tantas veces menos", de las que se dice que son difíciles de comprender por el hecho de que se yuxtapone un término que alude al dominio multiplicativo y otro que remite al dominio aditivo.

Se puede pensar en seis subcategorías, según si la relación multiplicativa se define por un coeficiente mayor o menor que 1, y si la pregunta lleva a la búsqueda del referido, de la comparación o del referente.

La proporcionalidad simple

Las situaciones correspondientes a esta categoría pueden representarse mediante tablas numéricas y están asociadas a una función lineal (función "multiplicar por" o "dividir entre"), conducen a realizar ya sea una multiplicación, una división, una división cociente, o una "regla de tres", es decir, buscan la cuarta proporcional.

En estos problemas se utilizan dos dominios de magnitudes y una relación funcional multiplicativa entre éstos. A menudo, en los problemas de esta categoría parece que sólo intervienen dos números, de hecho, también interviene la unidad, aunque con frecuencia no aparece explícitamente como su número ("¿cuál es el costo de 8 cuernitos de 4F cada uno?").

Para resolver estos problemas, el razonamiento puede pasar por el coeficiente de proporcionalidad entre las dos magnitudes; o por las propiedades de linealidad de la función lineal asociada:[18] multiplicación por un escalar o propiedad de aditividad.

[18] Una función lineal f de R en R es una función que a todo número real x le asocia el número ax, que se obtiene multiplicando el número x por el coeficiente a llamado coeficiente de la función lineal (corresponde al coeficiente de proporcionalidad).

Se llama propiedades de linealidad a las dos propiedades siguientes:

Proporcionalidad simple compuesta

En estos problemas intervienen tres magnitudes; se definen dos relaciones de proporcionalidad simple y la situación conduce a componer estas dos relaciones de proporcionalidad.

Este caso lleva a numerosos problemas según si los elementos se dan o se buscan.

La proporcionalidad doble (o múltiple)

Los problemas de proporcionalidad doble (o múltiple) son problemas en los que intervienen dos dominios de magnitudes (o más) que son independientes (no hay ninguna relación funcional entre ellos) y tales que una relación asocia a una pareja (o a una n-ada) de medidas de cada magnitud una tercera (o una $n + 1$-ésima) magnitud llamada magnitud producto.

Entonces, es fundamental determinar la imagen de la pareja (o de la n-ada) de las unidades de las dos (o n) magnitudes. Esta imagen puede ser la unidad de la magnitud producto u otra magnitud.

Las magnitudes pueden ser discretas o continuas.

El caso particular de la búsqueda de la relación entre el cardinal del producto cartesiano[19] de dos conjuntos finitos y el cardinal de cada uno de ellos corresponde a dos magnitudes discretas para las que la imagen de la pareja (1, 1) es igual a 1. En esta categoría se encuentran los problemas del número de cuadrados de una cuadrícula rectangular y, de manera general, los problemas que corresponden a una composición multiplicativa de dos magnitudes discretas.

La relación entre la medida del área de un rectángulo y las de las longitudes de sus lados pertenece igualmente a este caso. Aquí, las magnitudes son continuas y la imagen de la pareja (1, 1) es 1 y, entonces, la de la pareja (x, y) es xy.

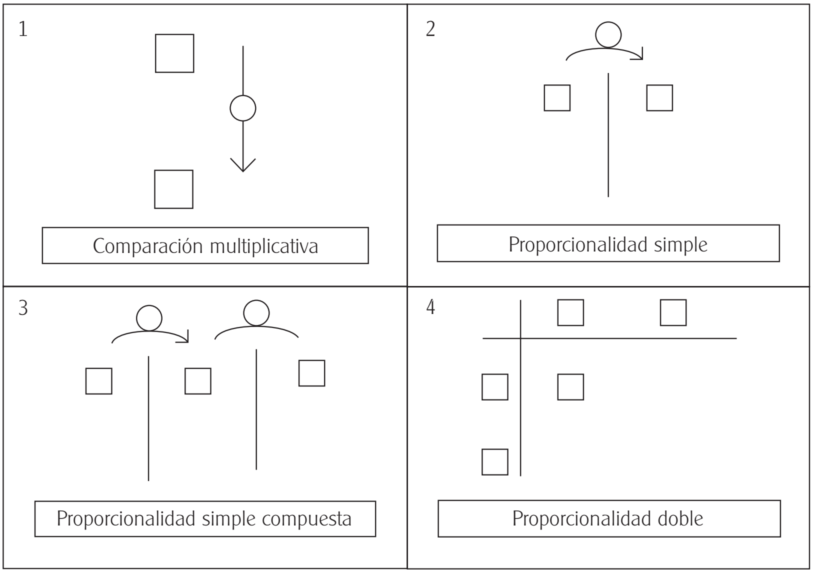
En el caso general, si la imagen de la pareja (1, 1) es el número real α, la imagen de la pareja (x, y) es αxy.

Para todo par (x, y) de números reales, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Para todo real x, y para todo escalar real λ, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

[19] El producto cartesiano de dos conjuntos es el conjunto de todas las parejas posibles cuya primera coordenada es un elemento del primer conjunto y la segunda, un elemento del segundo conjunto.

Cuadro de relaciones multiplicativas



Ejemplos de problemas multiplicativos

Un ciclista hace un recorrido en una pista de 350 m, si da 2 vueltas a la pista por minuto, durante 25 minutos ¿qué distancia recorre?	Proporcionalidad simple compuesta
Para transportar 840 huevos, un mayorista utiliza 7 cajas en las que puede poner bandejas de 24 huevos. ¿Cuántas bandejas pone en cada caja?	Proporcionalidad simple compuesta
Un restaurante hace un pedido por 540 F de botellas de agua mineral de 3 F la botella; las botellas vienen en paquetes de 12. ¿Cuántos paquetes recibirá?	Proporcionalidad simple compuesta
Para disfrazar a un payaso se tienen 5 sombreros y 12 trajes ¿de cuántas maneras diferentes se puede disfrazar el payaso?	Caso particular de proporcionalidad doble: búsqueda del cardinal de un producto cartesiano, la imagen de la pareja (1, 1) es 1.
Un rectángulo cuadriculado está compuesto de 48 cuadrados, sobre su largo hay 8 cuadrados, ¿Cuántos cuadrados hay sobre su ancho?	Caso particular de proporcionalidad doble: búsqueda del cardinal de un producto cartesiano, la imagen de la pareja (1, 1) es 1.

La pensión en un hotel es de 250 F por persona y por día. ¿Cuánto pagará un grupo de 5 personas por una estancia de 17 días?	Proporcionalidad doble: la imagen de la pareja (1, 1) es 250
Un terreno rectangular mide 120 m de largo y 47 m de ancho. ¿Cuál es su área?	Caso particular de proporcionalidad doble: búsqueda del cardinal de un producto de dos medidas, la imagen de la pareja (1, 1) es 1.
Para regar los árboles de su huerta, un productor de frutas utilizó 560 litros de agua en 7 días. Se necesitan 8 litros de agua por árbol por día. ¿Cuántos árboles hay en la huerta?	Proporcionalidad doble, la imagen de la pareja (1, 1) es 8.
En una caja de chocolates, hay 6 chocolates amargos y 3 veces más chocolates con leche. ¿Cuántos chocolates con leche hay?	Comparación multiplicativa
En el grupo A, hay 15 niños, tres veces menos que en el grupo B. ¿Cuántos niños hay en el grupo B?	Comparación multiplicativa
Juan tiene 54 canicas y Pedro tiene 18, ¿cuántas veces menos que Juan?	Comparación multiplicativa
Un objeto cuesta 18 F en el supermercado y, en la tienda del barrio, 27 F ¿cuántas veces más que en el supermercado?	Comparación multiplicativa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1984), *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques,* tesis de doctorado de Estado, París VII.

Brissiaud, R. (1998), *Le progrès en arithmétiques : continuités et ruptures avec l'expérience quotidienne. L'articulation entre le calcul et la résolution de problèmes: quatre attitudes pédagogiques,* libro del maestro del manual escolar *J'apprends les maths,* CM1, Retz, París, pp. 4-27.

Brousseau G. (1989), *RDM 9/3,* Grenoble, La pensée sauvage, p. 327.

—— (1998), *Théorie des situations didactiques,* Grenoble, La pensée sauvage, p. 73.

Brun, J. (1990), "La résolution de problèmes arithmétiques-Bilan et perspectives", *Math-Ecole,* Neufchatel, núm. 141.

Butlen D. y M. Pezard (2000), "Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège", *Revue Repères Inter-IREM,* París, pp. 5-24.

Descaves, A. (1999), "Introduction du symbolisme à la fin de l'école élémentaire et au début du collège", en *Actes du 26ème Colloque de la Corirelem,* Limoges, IREM du Limousin.

—— (2001), "L'apprentissage du sens, certes! mais dans quel sens prendre le sens", en *Actes du 28ème Colloque de la Copirelem,* Tours, Orleans, PUO.

Douady, R. (1986), "Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques", *RDM 7.2,* Grenoble, La pensée sauvage.

Fabre, M. (1999), *Situations problèmes et apprentissages scolaires.* París, PUF.

Julo, J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques,* PUR.

Vergnaud, G. (1990), "La théorie des champs conceptuels", *RDM 10.2.3,* Grenoble, La pensée sauvage.

—— (1994), "Le rôle de l'enseignant à la limite des concepts de schème et de champ conceptuel", *Vingt ans de Didactique des mathématiques en France,* bajo la dirección de M. Artigue, Grenoble, La pensée sauvage.

—— (1997) (dir.), *Le moniteur de mathématiques, Résolution de problémes.* Francia, Nathan.

DATOS DE LA AUTORA

Marie-Lise Peltier Barbier

Maestra de conferencias en didáctica de las matemáticas, IUFM, de Rouen, Francia

marie-lise.peltier@rouen.iufm.fr