

Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación

Modesto Arrieta

Resumen: Desde los años cincuenta los educadores matemáticos han estado interesados en la capacidad espacial, debido principalmente a su relación con la matemática en general y la geometría en particular. Términos como pensamiento espacial, visualización, orientación espacial... han sido tratados sin un modelo teórico de referencia, lo que dificulta la obtención de conclusiones válidas.

Se proponen tres problemas para el futuro de la investigación: La necesidad de un modelo que haga referencia a la estructura factorial, a los procesos cognitivos y a las estrategias utilizadas en las tareas espaciales; la necesidad de otro modelo de desarrollo de los contenidos geométricos asociados a la capacidad espacial; y la necesidad de un modelo de propuesta didáctica que nos permita elaborar propuestas coherentes y eficaces.

Palabras clave: Capacidad espacial, orientación espacial, visualización, geometría.

Abstract: Ever since the 50s, mathematics tutors have been interested in spatial ability, mainly, due to its connection to performance of mathematics in general and in geometry in particular. Terms such as spatial thought, visualization, spatial orientation, have been dealt with, without having a model on which to fall back on, which has brought about such variety of names, concepts and tests from carried out research that makes it extremely difficult to obtain valid conclusions.

Three problems for the future of the investigation are proposed: The need of a model that do reference to the structure factorial, to the cognitive processes and to the strategies utilized in the spatial tasks. The need of another development model of geometrics concepts associated to the spatial ability and the need of a didactics model that permit us to elaborate efficient and coherent proposals.

Keywords: Spatial ability, spatial orientation, visualization, spatial thought.

Fecha de recepción: febrero de 2002.

INTRODUCCIÓN

De la importancia de la Capacidad de Visualización Espacial en la Educación Matemática dan fe las investigaciones desarrolladas a lo largo de estos últimos años y cuyos resultados más relevantes vienen discutidos en las revisiones realizadas por Bishop (1980, 1989), Clements y Battista (1992), Clements (1998) y Gutiérrez (1998).

Esta importancia proviene de la necesidad teórica y práctica para entender cómo los individuos representan mentalmente el mundo físico y que éste está centrado en la existencia de varias capacidades espaciales (asociadas al hemisferio derecho del cerebro), que se diferencian de las capacidades verbales (asociadas al hemisferio izquierdo) y, aunque la identificación del factor espacial tiene sus raíces en el estudio de la aptitud mecánica (Stenquist, 1922; Cox, 1928) y la capacidad práctica (Kohs, 1923; Mac-Farlane, 1925), desde 1925 numerosos estudios factoriales han identificado un factor espacial matemáticamente distinto de la capacidad verbal, el cual Kelley (1928) describió como la capacidad de manipular mentalmente figuras (véase McGee, 1979).

Pero no es hasta los años cincuenta cuando los educadores matemáticos se interesan por dicho campo y relacionan la capacidad espacial con la capacidad matemática. Murray (1949), Barakat (1951) y Wrigley (1958) encuentran que la capacidad de resolver tests espaciales correlaciona más alto con la capacidad en geometría que en álgebra. Mac-Farlane (1964) argumentó que la capacidad espacial era esencial para la capacidad matemática al igual que Fennema (1979) y Tartre (1990), que también reconocen la relación de la capacidad espacial con las matemáticas.

¿PARA QUÉ ES NECESARIA LA CAPACIDAD ESPACIAL?

Los currícula de la enseñanza obligatoria dan fe de esta finalidad, ya que al estudio de la Matemática se le reconoce el desarrollo de la capacidad intelectual de los sujetos. Además, el pensamiento espacial es esencial para el pensamiento científico. Así lo creían Hadamard y Einstein, que lo consideraban esencial para el pensamiento creativo en todos los niveles de matemáticas (Lean y Clements, 1981). Además el pensamiento espacial está relacionado con la geometría tal como lo indican Suydam (1985), Usiskin (1987) y el National Council of Teachers of Mathematics (1989), y se utiliza para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas (véase Clements y Battista, 1992).

Además, en algunas profesiones esta habilidad es imprescindible: por ejemplo, para un escultor, un dibujante, un ingeniero, un arquitecto, un topógrafo... ya que es difícil imaginar el progreso en estos dominios sin una habilidad visoespacial especialmente desarrollada y, con frecuencia, las medidas de capacidad espacial son las únicas que discriminan para ciertos cursos gráficos y de diseño de ingeniería o en trabajos como mecánico, arquitecto o piloto.

¿POR QUÉ ELEGIMOS LA CAPACIDAD ESPACIAL?

¿Por qué elegimos la capacidad espacial en detrimento de la capacidad numérica o de la capacidad de razonamiento? Evidentemente, todas estas capacidades que tienen una relación directa con el estudio de la Matemática, sobre todo en edades elementales, son susceptibles de estudio y análisis por parte de los educadores matemáticos, pero se constata un déficit de instrucción en contenidos matemáticos asociados a la capacidad espacial que conviene compensar.

El desarrollo de la aptitud numérica ha sido impulsado en todos los currículos sin distinción, ya que el Bloque Temático de Aritmética dedicado a Números y Operaciones nunca ha sido puesto en entredicho. El desarrollo de la Capacidad de razonamiento lógico tampoco se ha puesto nunca en duda y ha tenido un lugar preponderante en los diferentes niveles educativos, aunque su tratamiento siempre ha tenido el problema de la falta de explicitación como contenido matemático, pues se asocia a la demostración y al uso de estrategias en la resolución de problemas.

Por el contrario, los contenidos geométricos asociados a la capacidad espacial sí han tenido durante años un déficit de tratamiento, ya que en los años de implantación de la Enseñanza General Básica, prácticamente desapareció de los planes de estudio en las décadas de los sesenta y setenta, debido al impulso de la llamada "Matemática moderna", a su formalismo y a la algebrización de la geometría.

Como botón de muestra basta citar el libro de Brueckner y Bond (1981), *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje*, todo un clásico que trata del diagnóstico y tratamiento de las dificultades de lenguaje en su vertiente lectora, escritora... pero en lo que a las matemáticas se refiere sólo trata las dificultades aritméticas y las de la resolución de problemas asociados sin mencionar las dificultades geométricas.

En el *Manual de IGF-inteligencia general y factorial* (Yuste, 1997), se menciona que la correlación de la aptitud espacial con lengua, inglés, matemáticas, natura-

les y sociales es la menor de las correlaciones de entre todas las aptitudes consideradas. De ahí que de las cuatro capacidades primarias: razonamiento abstracto, aptitud espacial, razonamiento verbal y aptitud numérica, la aptitud espacial es la que menos relación tiene con todas y cada una de las áreas del currículum, incluida la matemática. Esto nos indica la menor relación del área de matemáticas con la aptitud espacial y justifica el empeño de dedicar nuestro tiempo y esfuerzo al análisis de dicha capacidad y paliar en lo posible este déficit.

Clements y Battista (1992) dan cuenta de la poca atención instruccional en los Estados Unidos, así como Herskowitz, Parzysz y Van Dormolen (1996) destacan el déficit instruccional y señalan que la educación visual se descuida a menudo en el currículum.

En los años ochenta se ha intentado comprender mejor los fenómenos ligados al aprendizaje y se le ha dado mayor importancia a la generación de imágenes mentales adecuadas para el desarrollo de habilidades como la visualización matemática en la resolución de problemas.

En España, es a partir de los Programas Renovados de 1985 cuando la capacidad espacial vuelve a adquirir una importancia análoga al resto de las capacidades, al incluirse los conceptos propios de una geometría más intuitiva y práctica.

También interesa destacar que últimamente se está detectando una mejora en la aptitud espacial de los alumnos debido, seguramente, a la “cultura” de la TV y al uso de máquinas electrónicas, ordenadores, juegos electrónicos tipo “tetris”, calculadoras gráficas... con mayor presencia de lo visoespacial, aunque todavía se detecta un menor aprovechamiento escolar en matemáticas debido, seguramente, a la menor presencia de todo lo espacial y geométrico en los programas escolares (Hidalgo, Maroto, Palacios, 1999).

¿QUÉ NOS INTERESA DE LA CAPACIDAD ESPACIAL?

Adentrarse en el tema de la capacidad de visualización espacial supone adentrarse en un tema controvertido y aparentemente anárquico, pues difícilmente dos investigadores se ponen de acuerdo en conceptos básicos y fundamentales como: capacidad espacial, visualización, orientación espacial, relaciones espaciales, pensamiento espacial... Lohman *et al.* (1987) identifican algunos de estos problemas:

- Idénticos tests aparecen con diferentes nombres en diferentes estudios.
- Tests con el mismo nombre son a veces diferentes.

- El formato y la administración pueden alterar la composición factorial de un test.
- Más importante es la omnipresente diferencia en el factor de extracción y criterio de rotación usados por diferentes investigadores incluso por el mismo investigador

De ahí que, antes que nada, debemos poner un poco de orden en esta aparente maraña de conceptos y, en la medida de lo posible, proponer una estructura con las suficientes garantías teóricas y empíricas que nos permitan situar la capacidad espacial de tal manera que las investigaciones posteriores puedan trabajar con conceptos y pruebas unificadas y replicables.

Históricamente, las capacidades espaciales son las primeras que fueron medidas usando materiales concretos. La aplicación de tests de papel-y-lápiz a grupos (dictado por conveniencia y no por teoría) alteró más sustancialmente la medida de las capacidades espaciales que la medida de las capacidades verbales.

Pero seguramente el problema más complejo es el de que los sujetos pueden utilizar diferentes estrategias en el mismo test. Esto complica enormemente la interpretación conjunta de estudios correlacionales y de procesamiento de la información de la capacidad espacial.

La falta de un modelo teórico, tanto de factores como de procesos y estrategias, ha dificultado enormemente un avance en el estudio de la capacidad de visualización espacial y, como dicen Lohman *et al.* (1987), quizás el único camino para resumir toda la literatura es reanalizar estudios desde una perspectiva teórica común.

1^{ER} PROBLEMA: ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA DE LA CAPACIDAD ESPACIAL REFERIDA A FACTORES, A LOS PROCESOS COGNITIVOS ASOCIADOS Y A LAS ESTRATEGIAS UTILIZADAS EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ESPACIALES

FACTORES

Terman y Merrill (1916) fueron los primeros en presentar la capacidad espacial de manera explícita, describiendo las pruebas que hacen referencia a diferentes aspectos de la capacidad espacial: reconocimiento de objetos por su imagen, discriminación de formas, doblado de papel, orientación...

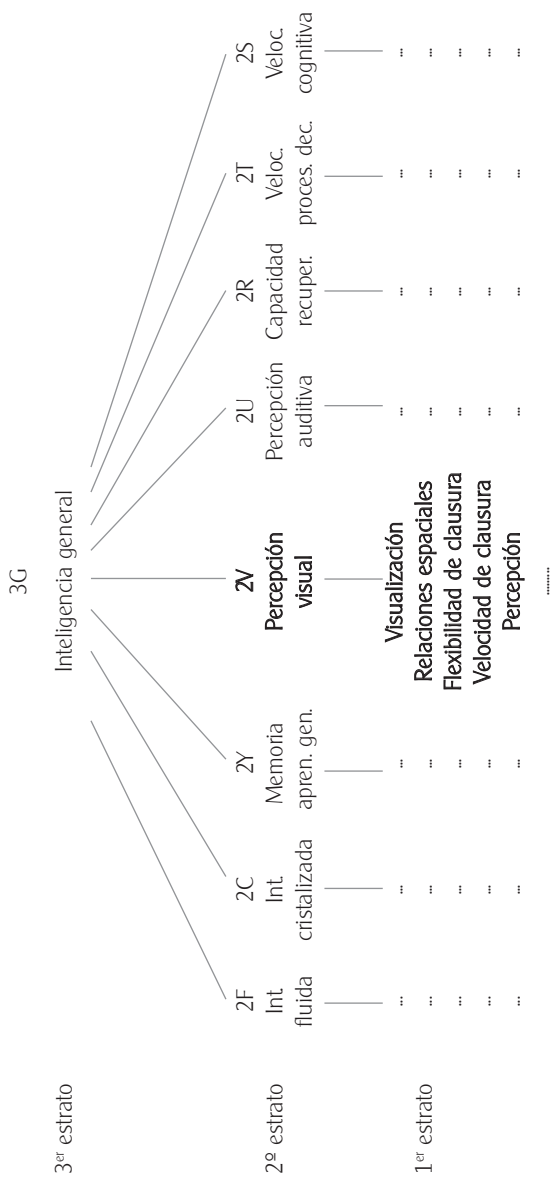
Spearman (1904, 1927), al observar correlaciones positivas entre tests mentales aplicados a una muestra de sujetos, sugirió que los tests no miden atributos totalmente independientes del funcionamiento mental y estableció un modelo bifactorial que contiene un factor común, general o factor “g” y otros factores específicos. Thurstone (1938) propuso siete factores independientes, entre los que figuraba un factor de visualización espacial que implicaba visualización de formas, rotación de objetos... Negó la existencia del factor “g” ya que la rotación ortogonal impedía la obtención de “g” como factor de 2º orden, aunque con rotación oblicua, obtuvo un factor de 2º orden que podía ser interpretado como el factor “g” de Spearman. Otros investigadores, como Burt (1949), Vernon (1950), Guilford (1967) y Cattell (1971), propusieron sendos modelos jerarquizados en diferentes niveles.

En los últimos veinte años ha habido intentos de revisar modelos anteriores y se ha tratado de unificarlos. Se considera el modelo de los tres estratos de Carroll (1988, 1993, 1994) como la síntesis final de muchas investigaciones realizadas en la literatura científica desde Spearman. Manejando 461 conjuntos de datos y utilizando las matrices de correlaciones iniciales con 2.272 factores de 1º orden, 572 factores de 2º orden y 36 de 3º orden el modelo de Carroll (Carroll, 1993) presenta la siguiente estructura factorial (pág. 63).

Los resultados evidencian la existencia de un factor 3G de inteligencia (el factor “g” de Spearman) que se constituye como un rasgo fuente que también fue incorporado por Vernon en su modelo y que se ha replicado 36 veces como factor de 3º orden. Las aptitudes primarias de Thurstone se confirman en el 1º estrato aunque aquí aparecen más (40 han podido ser replicados) y abarcan buena parte de los propuestos por Guilford. En el 2º estrato, la propuesta de Cattell y Horn obtiene apoyo suficiente (véase Carroll, 1993).

El equipo de trabajo de Horn (1985) ha estudiado la estructura de la inteligencia entre los 4 y 5 años y los 7 años. Para Horn, aunque en estas edades aparecen vestigios de la capacidad visoespacial como aptitud diferenciada, apenas puede diferenciarse de la inteligencia fluida.

A partir de los 6 años, la estructura de las aptitudes tiende a consolidarse en términos generales, tal y como la conocemos a través del modelo de los tres estratos. Bickeley, Keith y Wolfle (1995) evaluaron el modelo de los tres estratos. Para ello, tomaron una muestra de 2.201 sujetos subdividida en grupos de edad: 6, 8, 10, 13, 30-39, 50-59 y 70-79 y les aplicaron 16 tests que cubrían las aptitudes primarias. Los resultados indican que no aparecen cambios en la organización de la inteligencia a lo largo del ciclo vital (de los 6 a los 79 años).



No conozco todavía ningún estudio en Educación Matemática que tenga en cuenta esta estructural factorial. Permitaseme el atrevimiento de, por lo menos, poner sobre la mesa diferentes aspectos que me han llamado la atención y que tendremos que aclarar para poder hablar con propiedad de la capacidad espacial.

Si analizamos los factores de 1^{er} orden correspondientes a la percepción visual descritos por Carroll (1993), llama la atención que no figure la orientación espacial. Lo dice explícitamente y señala que las pruebas o tests no lo distinguen de la visualización o de las relaciones espaciales.

Aunque la mayoría de los estudios desde la Educación Matemática relacionados con la capacidad espacial hacen referencia exclusivamente a la visualización (Fennema y Sherman, 1977; Battista *et al.*, 1982; Fennema y Tartre, 1985; Battista, 1990), también hay autores como Young y Becker (1977), Lean y Clements (1981), Mitchelmore (1980) y Bishop (1983) que, además de la visualización, también consideran otros factores como la flexibilidad de clausura, la velocidad de clausura o las relaciones espaciales. De todas maneras, hay que llamar la atención sobre el hecho de que estudios significativos y relevantes en Educación Matemática (Guay y McDaniel, 1977; Tartre, 1990) discriminan, al menos desde un punto de vista teórico, ambos factores:

Visualización: Aptitud para manipular objetos mentalmente (el objeto es lo que es manipulado por el sujeto).

Orientación espacial: Aptitud para imaginar un objeto desde otra perspectiva (el sujeto es el que cambia de posición ante el objeto).

Esta diferencia teórica, o por lo menos de matiz, entre ambos conceptos contrasta con los resultados empíricos de Carroll. Desde la Educación Matemática es un aspecto tan importante que necesitaría mejores y más potentes argumentos para decidir en uno u otro sentido.

Sorprende que los cinco factores citados aparezcan en el modelo ocupando el mismo nivel (1^{er} estrato) sin que se proponga una jerarquía entre ellos, cuando un análisis de las pruebas en las que se basan los tests que hacen referencia a esos cinco factores parecen corresponderse con factores de muy diferentes niveles.

Al analizar las pruebas correspondientes a visualización o flexibilidad de clausura y ver su dificultad, se entiende que sean pruebas apropiadas para sujetos con edad superior a 11-12 años, lo que hace pensar que el modelo funciona bien a partir de esa edad, pero los estudios de Bickley *et al.* (1995) citados antes confirman la estructura de los tres estratos desde los 6 años (véase Carroll, 1993, p. 626).

Un análisis de las pruebas utilizadas por estos autores revela que las dos pruebas utilizadas para la capacidad espacial coinciden con la velocidad de clausura y la percepción, dos de las consideradas sencillas y por tanto aptas para edades tempranas. Este estudio corrobora la estructura de los tres estratos a partir de los 6 años, pero no aporta nada en la clarificación de la posible jerarquía entre los factores de 1^{er} orden de la capacidad espacial.

Esto no quiere decir que la estructura de los tres estratos esté bajo sospecha, sino que, cumpliéndose el modelo de Carroll, sería posible ir un poco más lejos en esa estructura jerarquizando los factores de 1^{er} orden, lo que nos ayudaría a los educadores matemáticos a entender mejor dicha capacidad y nos permitiría ser más eficaces en la ayuda que podamos prestar a nuestros alumnos.

PROCESOS COGNITIVOS

El simple estudio de los factores, por muy jerarquizados que los podamos mostrar, nunca va a ser suficiente para un diagnóstico eficaz de nuestros alumnos, mientras no caractericemos dichos factores y asociemos a ellos los procesos cognitivos inherentes.

Los trabajos en este campo insisten en los procesos mentales de las tareas espaciales, en la rapidez y exactitud con la que se ejecutan esos procesos, en cómo se combinan estos procesos para la resolución de tareas, cuál es la base cognitiva organizada de estas formas de representación, cómo afecta, y cómo se ve afectada por los procesos, estrategias y representaciones que utilizan las personas.

Kosslyn (1980) propone una teoría general sobre el funcionamiento de la imagen mental en el sistema cognitivo, donde se establece una serie de procesos necesarios para la construcción de la representación imaginística y de procesos que deberían utilizarse para operar mentalmente con esa representación.

Las teorías cognitivas del procesamiento de la información aplicadas a la inteligencia pretenden explicar la inteligencia humana en términos de procesos mentales que contribuyen a la resolución de tareas cognitivas. Algunos investigadores han intentado controlar y medir los procesos que operan entre el estímulo y la respuesta, utilizando tareas experimentales cuyos resultados se han correlacionado con resultados en tests psicométricos tradicionales.

Destacan los trabajos de Cooper y Shepard (1973), Metzler y Shepard (1974) y Shepard (1975), donde la capacidad espacial es evaluada por tests de veloci-

dad en los que el individuo debe decidir acerca de la identidad de una figura en 2D o 3D, rotándola mentalmente y comparándola con otra o varias.

Otros investigadores han estudiado formas muy complejas de resolución de problemas en las que se estudian la precisión y las estrategias de procesamiento utilizadas (Sternberg, 1985, 1988) e intentan detectar procesos cognitivos implicados en la resolución de tareas espaciales.

¿Son coherentes estos resultados con el modelo de Carroll? ¿Hasta qué punto podemos utilizar estos procesos cognitivos para caracterizar los factores?

ESTRATEGIAS

Para Schmeck (1988), el estilo de aprendizaje es una predisposición para utilizar una estrategia particular de aprendizaje al margen de las demandas específicas de la tarea y en diferentes situaciones. La estrategia de aprendizaje es un conjunto de actividades de procesamiento de información que se utilizan para mejorar el aprendizaje. Para Schmeck, el estilo de aprendizaje es una instancia intermedia entre la personalidad y la estrategia de aprendizaje. El estilo no es tan específico como la estrategia ni tan general como la personalidad.

Para Sternberg (1999), un estilo es una manera de pensar. No es una aptitud, sino más bien una forma preferida de emplear las aptitudes que uno posee. Aptitud se refiere a lo bien que alguien puede hacer algo, estilo se refiere a cómo le gusta a alguien hacer algo. Sternberg clasifica los estilos de pensamiento según las funciones, las formas, los niveles, el alcance o las inclinaciones. Desgraciadamente, el análisis factorial confirmatorio no coincide estrictamente con el modelo teórico, ya que los estilos judicial y oligárquico se confunden en un mismo factor, cuando en el modelo teórico pertenece a categorías diferentes.

Desde la perspectiva de la Educación Matemática, Krutetski (1976) definió tres estilos:

- Analítico: los sujetos prefieren modos de pensamiento lógico-verbales en la resolución de problemas.
- Geométrico: los sujetos prefieren esquemas pictórico-visuales.
- Armónico: no tiene preferencia por uno u otro.

Suwarsono (1982) distingue dos tipos de personas:

- *Visualisers*: Individuos que prefieren usar métodos visuales cuando intentan resolver problemas que pueden resolverse utilizando métodos tanto visuales como no visuales.
- *Non-visualisers*: Sujetos que prefieren no usar métodos visuales... e indica que los mejores son *Non-visualisers* en *High School* y cita razones que justifican esos resultados. La Matemática, por su naturaleza deductiva, favorece al pensador no visual y si la componente verbal-lógica de pensamiento es una condición *sine-qua-non* de las capacidades matemáticas, la componente visoespacial no es obligatoria. Además, el currículum y los exámenes favorecen al pensador no visual (Presmeg, 1986.)

Burden y Coulson (1981), en su modelo cognitivo, señalan que toda estrategia de resolución de un determinado ítem espacial obedece fundamentalmente a tres características, dependiendo del modo de representación utilizado por el sujeto, aquello sobre lo que el sujeto concentra su atención y los medios concretos auxiliares utilizados.

Atendiendo al modo de representación empleado por el sujeto:

- Visual: el sujeto necesita formar una imagen mental.
- Verbal: el sujeto no necesita hacer uso de una imagen mental.
- Mixto: el sujeto emplea ambas estrategias.

Atendiendo a aquello sobre lo que el sujeto concentra su atención:

- Global: considera el objeto globalmente.
- Local: considera el objeto parcialmente.

Atendiendo a los medios concretos auxiliares utilizados: los sujetos toman notas, inclinan la cabeza, desplazan el lápiz...

Otros autores, como Lahrizi (1984) y Cossio (1997), han utilizado esta misma clasificación, aunque sin tener en cuenta los medios auxiliares, y han clasificado a los sujetos según las estrategias utilizadas en un estilo y una intensidad determinadas.

Autores como Lohman y Kyllonen (1983) y Lohman *et al.* (1987) analizan las estrategias utilizadas por los sujetos en tareas espaciales y definen tres fases en su resolución: codificación, síntesis y comparación, y distinguen a los sujetos por el modo de afrontar cada una de estas fases en la resolución de tareas espaciales.

De ahí que la tarea principal relativa a este primer problema sea proponer un modelo estructural de la capacidad espacial que abarque sendos modelos de factores, de procesos cognitivos y de estrategias y que, una vez combinados en un modelo integrado, nos permita diagnosticar al alumno a lo largo de todo el ciclo vital.

2º PROBLEMA: ANÁLISIS DEL DESARROLLO DE LA CAPACIDAD ESPACIAL Y DE LOS CONTENIDOS GEOMÉTRICOS ASOCIADOS A LO LARGO DE TODA LA ESCOLARIDAD.

Piaget (Piaget, Inhelder, 1956; Piaget, Inhelder, Szeminska, 1960) fue el impulsor de estos estudios y en su enfoque se preocupaba más de los aspectos cualitativos de la inteligencia y de los patrones universales establecidos, como los órdenes invariantes de adquisición. La teoría de Piaget abarca toda la escala de edades y, al examinar su trabajo, es posible observar muchos conceptos que evolucionan desde formas rudimentarias durante la primera infancia hasta formas más complejas en la niñez o en la adolescencia.

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele (1986) se plantea la existencia de diversos niveles de razonamiento geométrico, que van desde el puramente visual, propio de los niños de los primeros cursos de Primaria, hasta el lógico-formal que desarrolla un matemático. Este modelo también sugiere cómo lograr que los alumnos mejoren la calidad de su razonamiento matemático. Para ello propone fases de aprendizaje, organizando la enseñanza para ayudar a los estudiantes a construir las estructuras mentales que les permitan lograr un nivel superior de razonamiento.

Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento. Si una relación matemática no puede ser expresada de manera comprensible para el nivel de razonamiento actual de los estudiantes, es necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela. No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada manera; sólo se aprende a razonar mediante la propia experiencia. Pero sí se puede ayudar a esa persona, por medio de una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que adquiera lo antes posible la experiencia necesaria para que llegue a razonar de esa manera.

Así pues, el modelo de Van Hiele enfatiza la existencia de diferentes modos de razonamiento en Geometría y señala la necesidad de que los profesores ten-

gan en consideración la capacidad de razonamiento de sus alumnos al decidir la forma y el rigor de sus clases.

Otros estudios han continuado esta labor (Clements *et al.*, 1999) y han extendido el análisis a los movimientos en el plano (Jaime, Gutiérrez, 1996), a los sólidos geométricos (Guillén, 1997) o proponiendo paradigmas complementarios para evaluar los niveles de Van Hiele (Gutiérrez, Jaime, Fortuny, 1991).

Además de un modelo de desarrollo de la capacidad espacial, necesitamos un modelo de desarrollo de los contenidos geométricos asociados, tanto espontáneos como adquiridos. En definitiva, un modelo integrado que nos sirva para situar al alumno en el lugar que le corresponde a lo largo de toda la escolaridad.

3^{ER} PROBLEMA: HACIA UN MODELO DE PROPUESTAS DIDÁCTICAS. ¿QUÉ CONDICIONES HA DE CUMPLIR UNA PROPUESTA PARA QUE FAVOREZCA UN DESARROLLO EQUILIBRADO Y PROGRESIVO DE LA CAPACIDAD ESPACIAL?

Diferentes estudios han defendido la intuición (Fischbein, Tirosh, Hess, 1979), el entrenamiento (Connor y Serbin, 1985), el uso de materiales manipulativos (Prigge, 1978; Sowell, 1989), el uso del ordenador-Logo (Noss, 1987; Clements y Battista, 1989, 1990) para la mejora en la adquisición de conceptos geométricos, pero ¿qué valor tienen si no se utilizan conjuntamente para proponer un modelo de propuesta didáctica que nos permita elaborar propuestas eficaces? De hecho, las propuestas habituales son parciales y sólo tienen en cuenta el aspecto tratado. Lo que aquí se propone es integrar todas ellas en un modelo unitario de propuesta teniendo en cuenta todos esos aspectos e incluso otros como los errores, las ideas previas o los estilos de aprendizaje de los alumnos.

Además, una propuesta de mejora ha de plantearse en el contexto didáctico adecuado lo que conlleva la aceptación de un modelo que urge desarrollar. La teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986; Chevallard, 1991) pretende ofrecer un marco de referencia donde encajen las propuestas que pretenden mejorar la situación del alumno en cualquier faceta donde presente un déficit.

Por ello, este problema no es exclusivo de la investigación de la capacidad espacial, sino de todas aquellas investigaciones cuyo objetivo sea plantear propuestas enriquecedoras. De ahí que la tarea de proponer modelos didácticos que tengan en cuenta las ventajas de la intuición, del entrenamiento, del uso de los materiales manipulativos y del ordenador, o el conocimiento por parte del profe-

sor de los errores, de las ideas previas o de los estilos de aprendizaje de los alumnos y dónde se pueden encajar las propuestas didácticas concretas referidas al contenido matemático propiamente dicho sea una de las tareas más urgentes de la Educación Matemática. Esperemos que para cuando lo necesitemos, dicho paradigma esté lo suficientemente desarrollado y explicitado como para poder utilizarlo en las propuestas que tengamos que elaborar relacionadas con la capacidad espacial y el contenido geométrico asociado a ella.

¿CÓMO VAMOS A ANALIZAR ESTOS PROBLEMAS?

No es fácil indicar *a priori* cuáles son los pasos a dar en el intento de resolución de todas los problemas que se han planteado anteriormente. Me gustaría destacar que las revisiones teóricas exhaustivas son imprescindibles para un avance significativo. La mirada crítica en todos los trabajos realizados hasta ahora es fundamental y es evidente de que no avanzaremos mientras no basemos nuestras investigaciones en modelos establecidos, justificados teóricamente y, en la medida de lo posible, contrastados empíricamente.

De ahí que todas las investigaciones en este campo habrán de basarse y encajar en:

- un modelo estructural
- un modelo de desarrollo
- un modelo de propuesta

para que todas aquellas investigaciones que pretendan elaborar una propuesta de mejora lo hagan dentro de un marco teórico replicable.

Por otro lado, los avances estadísticos, el acceso al ordenador personal, la facilidad de acceso bibliográfico, el software como SPSS o LISREL posibilitan un trabajo impensable hace unos cuantos años.

EPÍLOGO

El análisis exhaustivo de todas las cuestiones planteadas hasta ahora nos permitiría proponer un modelo que nos serviría de referencia en todas las investigaciones relacionadas con la capacidad espacial y que básicamente consistiría en ofre-

cer a la Educación Matemática información relevante que se podría contrastar o replicar sobre:

- Diagnóstico de la capacidad espacial del alumno.
- Encaje del nivel de capacidad espacial del alumno con el desarrollo de los conocimientos geométricos espontáneos y adquiridos de acuerdo a su nivel de desarrollo.
- Propuestas de mejora coherentes y eficaces.

Si esto lo hacemos con la capacidad espacial, también lo podríamos hacer con la aptitud numérica o con la capacidad de razonamiento lógico tanto inductivo como deductivo, lo que nos permitiría conocer el mapa cognitivo del alumno que más relación guarda con la enseñanza-aprendizaje de la matemática.

De todas maneras uno no puede más que sorprenderse de que, a pesar de los esfuerzos realizados en este siglo, todavía hay mucho por hacer, tanto que a veces puede resultar tan abrumador que no estamos seguros sobre lo que deberíamos hacer a continuación; pero permita el lector que emule a Moon-Watcher, el inolvidable protagonista de la novela de Arthur C. Clarke 2001; *una odisea espacial*, diciendo que ya pensaremos en algo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barakat, M. K. (1951), "A Factorial Study of Mathematical Abilities", *British Journal of Psychology: Statistics Section*, núm. 4, pp. 137-156.
- Battista, M. T. (1990), "Spatial Visualization and Gender Differences in High School Geometry", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 1, pp. 47-60.
- Battista, M. T., G. H. Wheatley, G. Talsma (1982), "The Importance of Spatial Visualization and Cognitive Development for Geometry Learning in Preservice Elementary Teachers", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 13, núm. 5, pp. 332-340.
- Bickley, P. G., T. Z. Keith y L. M. Wolfle (1995), "The Three-Stratum Theory of Cognitive Abilities: Test of the Structure of Intelligence Across the Life Span", *Intelligence*, núm. 20, pp. 309-328.
- Binet, A. y T. Simon (1905), "Méthodes nouvelles pour le diagnostique du niveau intellectuel des anormaux", *L'Année Psychologique*, núm. 11, pp. 191-244.

- Bishop, A. (1980), "Spatial Abilities and Mathematics Education". *Educational Studies in Mathematics*, núm. 11, pp. 257-269.
- (1983), "Space and Geometry", en R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Nueva York, pp. 175-203.
- (1989), "Review of Research on Visualization in Mathematics Education", *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 11, núm 1, pp. 7-16.
- Brousseau, G. (1986), "Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, núm 2, pp. 33-115.
- Brueckner, L. y G. L. Bond (1981), *Diagnóstico y tratamiento de las dificultades en el aprendizaje*, Madrid, Rialp.
- Burden, L. D. y S. A. Coulson (1981), *Processing of spatial tasks*, tesis de doctorado inédita, Melbourne, Monash University.
- Burt, C. (1949), "The structure of mind: A review of the results of factor analysis", *British Journal of Educational Psychology*, núm. 19, pp. 100-111, 176-199.
- Carroll, J. B. (1988), "Cognitive abilities, factors and processes", *Intelligence*, vol. 12, núm. 2, pp. 101-109.
- (1993), *Human cognitive Abilities: A Survey of Factor Analytic Studies*, Cambridge, Cambridge University Press.
- (1994), "Constructing a Theory from Data", en D. K. Detterman (ed.), *Current Topics in Human Intelligence*, vol. 4. *Theories of Intelligence*, Norwood, New Jersey, Ablex.
- Cattell, J. M. (1890), "Mental Tests and Measurements", *Mind*, núm. 15, pp. 373-80.
- Cattell, R. B. (1971), *Intelligence: Its Structure, Growth and Action*, Boston, Houghton-Mifflin.
- Chevallard (1991), *La transposition didactique-Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Clements, M. A. (1998b), *Visualisation and Mathematics Education*, Barcelona, TIEM.
- Clements, D. H. y M. T. Battista (1989), "Learning of Geometric Concepts in a Logo Environment", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 5, pp. 450-467.
- (1990), "The Effects of Logo on Children's Conceptualizations of Angle and Polygons", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 5, pp. 356-371.
- (1992), "Geometry and Spatial Reasoning", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning*, NCTM; MacMillan Pub. Company, pp. 420-464.

- Clements, D. H., S. Swaminathan, M. A. Z. Hannibal y J. Sarama (1999), "Young Children's Concepts of Shape", *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 30, núm. 2, pp. 192-212.
- Connor, J. M. y L. A. Serbin (1985), "Visual-Spatial Skill: Is it Important for Mathematics? Can it be Taught?", en S. F. Chipman, L. R. Brush y D. M. Wilson (eds.), *Women and Mathematics*, Hillsdale, N. J., Lawrence Erlbaum, pp. 151-174.
- Cooper, L. A. y R. N. Shepard (1973), "Chronometric studies of the rotation of mental images", en W. G. Chase (ed.), *Visual Information Processing*, Academic Press.
- Cossio, J. (1997), *Diagnosis de la habilidad de visualizar en el espacio 3D con estudiantes de Bachillerato (BUP) del Bilbao metropolitano*, Lejona, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.
- Cox, J. W. (1928), *Mechanical aptitude*, Londres, Methuen.
- Fennema, E. (1979), "Women and Girls in Mathematics-Equity in Mathematics Education", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 10, pp. 389-401.
- Fennema, E. y J. Sherman (1977), "Sex-related Differences in Mathematics Achievement, Spatial Visualization and Affective Factors", *American Educational Research Journal*, vol. 14, núm. 1, pp. 51-71.
- Fennema, E. y L.A. Tartre (1985), "The Use of Spatial Visualization in Mathematics by Girls and Boys", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 16, núm. 3, pp. 184-206.
- Fischbein, E., D. Tirosh y P. Hess (1979), "The Intuition of Infinity", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 10, pp. 3-40.
- Galton, F. (1869), *Hereditary Genius*, Londres, J. Alen Fiedmann Publishers (1978).
- Guay, R. B. y E. D. McDaniel (1977), "The Relationship between Mathematics Achievement and Spatial Abilities Among Elementary School Children", *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 8, pp. 211-215.
- Guilford, J. P. (1967), *The Nature of Human Intelligence*, Nueva York, McGraw-Hill.
- Guillen, G. (1997), *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje*, Universidad de Valencia.
- Gustaffson, J. E. (1988), "Hierarchical Models of Individual Differences", en R. J. Sternberg (ed.), *Advances in the Psychology of Human Intelligence*, Hillsdale, New Jersey, Erlbaum, vol. 4.
- (1985), "Measuring and interpreting 'g'", *Behavioral and Brain Sciences*, núm. 8, pp. 231-232.
- Gutiérrez, A. (1998), *Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización*, Barcelona, TIEM.

- Gutiérrez, A., A. Jaime y J. M. Fortuny (1991), "An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the Van Hiele Levels", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 22, núm. 3, pp. 237-251.
- Herschkowitz, R., B. Parzys y J. Van Dormolen (1996), "Space and Shape", en A. Bishop *et al.* (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*.
- Hidalgo, S., A. Maroto y A. Palacios (1999), "Evolución de las destrezas básicas para el cálculo y su influencia en el rendimiento escolar en Matemáticas", *Suma*, núm. 30, pp. 37-45.
- Horn, J. L. (1985), "Remodeling Old Models of Intelligence", en B. B. Wolman (ed.), *Handbook of Intelligence: Theories, Measurement and Applications*, Nueva York, John Wiley and Sons.
- Jaime, A. y A. Gutiérrez (1996), *El grupo de las isometrías en el plano*, Madrid, Síntesis.
- Juan Espinosa, M. (1997), *Geografía de la inteligencia humana*, Madrid, Pirámide.
- Kelley, T. L. (1928), *Crossroads in the Mind*, Stanford, Stanford University Press.
- Kosh, S. C. (1923), *Intelligence Measurement*, Nueva York, Macmillan.
- Kosslyn, S. M. (1980), *Image and Mind*, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press.
- Krutetski, V. A. (1976), *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, Chicago, University of Chicago Press.
- Lahrizi, H. (1984), *Etude de l'habilité a visuliser des relations geométriques dans trois dimensions chez les élèves-profeseurs au Maroc*, Quebec, Université de Laval.
- Lean, G. y M. A. Clements (1981), "Spatial ability, Visual Imagery, and Mathematical Performance", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 12, pp. 267-299.
- Lohman, D. F. y P. C. Kyllonen (1983), "Individual Differences in Solution Strategy on Spatial Tasks", en Dyllon y Schemeck (eds.), *Individual Differences in Cognition*, Academic Press, vol. 1.
- Lohman, D. F., J. W. Pellegrino, D. L. Alderton y J. W. Regian (1987), *Dimensions and Components of Individual Differences in Spatial Abilities*, pp. 253-312.
- Mcfarlane, M. (1925), "A Study of Practical Ability", *British Journal of Psychology, Monograph Supplement*, núm. 8.
- Mcfarlane Smith, I. (1964), *Spatial Ability: Its Educational and Social Significance*, Londres, University of London Press.
- Mcgee, M. G. (1979), "Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal, and Neurological Influences", *Psychological Bulletin*, vol. 86, núm. 5, pp. 889-918.

- Metzler, J. y R. W. Shepard (1974), "Transformational Studies of the Internal Representation of Three-Dimensional Objects", en R. L. Solso (ed.), *Theorie in Cognitive Psychology: The Loyola Symposium*, Potomac, Lawrence Erlbaum.
- Mitchelmore, M. C. (1980), "Three-Dimensional Geometrical Drawing in Three Cultures", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 11, pp. 205-216.
- Murray, J. E. (1949), "Analysis of Geometric Ability", *Journal of Educational Psychology*, núm. 40, pp. 118-124.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989), *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, Va, N. C. T. M.
- Noss, R. (1987), "Children's Learning of Geometrical Concepts Through Logo", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 18, núm. 5, pp. 343-362.
- Piaget, J. y B. Inhelder (1956), *La conception de l'espace chez l'enfant*, Paris, Presse Universitaires de France.
- Piaget, J., B. Inhelder y A. Szeminska (1960), *The Child's Conception of Geometry*, Londres, Routledge.
- Prigge, G. R. (1978) "The Differential Effects of the Use of Manipulative Aids on the Learning of Geometric Concepts by Elementary School Children", *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 9, pp. 361, 367.
- Presmeg, N. (1986), "Visualisation and Mathematical Giftedness", *Educational Studies in Mathematics*, núm. 17, pp. 297-311.
- Schmeck, R. S. (1988), *Learning strategies and learning styles*, Nueva York, Plenum Press.
- Shepard, R. N. (1975), "Form, Formation, and Transformation of Internal Representations", en R. L. Solso (ed.), *Information Processing and Cognition: The Loyola Symposium*.
- Sowell, E. (1989), Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 5, pp. 498-505.
- Spearman, C. (1904), General intelligence, objectively determined and measured. *American Journal Of Psychology*, núm. 15, pp. 72-101.
- Spearman, N. C. (1927), *The Abilities of Man*. London: Macmillan.
- Stenquist, J. L. (1922), *Mechanical aptitude tests*. Nueva York, World Book.
- Sternberg R. J. (1985), *Beyond IQ: A triarchic theory of human intelligence*, Cambridge, Cambridge University Press.
- (1988), *Las capacidades humanas*, Madrid, Labor.
- (1999) *Estilos de pensamiento*, Barcelona, Paidós.
- Suwarsono, S. (1982), *Visual Imagery in the Mathematical Thinking of Seventh Grade Students*, tesis de doctorado inédita, Melbourne, Monash University.

- Suydam, M. N. (1985), "The shape of instruction in geometry: Some highlights from research", *Mathematics Teacher*, núm. 78, pp. 481-486.
- Tartre, L. A. (1990), "Spatial orientation skill and mathematical problem solving", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 21, núm. 3, pp. 216-229.
- Terman, L. M. y M. A. Merrill (1916), *Measuring Intelligence*, Boston, Houghton-Mifflin.
- Thurstone, L. L. (1938), *Primary Mental Abilities*, Chicago, University of Chicago Press.
- Usiskin, Z. (1987), "Resolving the continuing dilemmas in school geometry", en M.M. Lindquist y A. P. Shulte (eds.), *Learning and Teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 17-31.
- Van Hiele, P. M. (1986), *Structure and Insight*, Orlando, Academic Press.
- Vernon, P. E. (1950), *The Structure of Human Abilities*, Nueva York, Wiley.
- Wrigley, J. (1958), "The factorial nature of ability in elementary mathematics", *British Journal of Educational Psychology*, núm. 1, pp. 61-78.
- Young, C. D. y J. P. Becker (1977), "The Interaction of Cognitive Aptitudes with Sequencies of Figural and Symbolic Treatments of Mathematical Inequalities", *Journal for Research in Mathematics Education*, núm. 10, pp. 24-36.
- Yuste, C. (1997), *Manual de IGF-inteligencia general y factorial*, Madrid, TEA.

DATOS DEL AUTOR

Modesto Arrieta

Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad del País Vasco, España
teparilm@sc.ehu.es