

Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *DERIVE*

Matías Camacho Machín y Ramón Depool Rivero

Dedicado al Dr. Nácere Hayek Calil, en su 80^o cumpleaños.

Resumen: A fin de contribuir a mejorar la enseñanza y aprendizaje del cálculo, se presenta un programa de utilidades (PU) diseñado con el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) *DERIVE*, para ser utilizado por estudiantes de Cálculo I de un primer curso de ingeniería. Este PU es el núcleo del material curricular utilizado en un proyecto de investigación más amplio que se desarrolla en la actualidad, uno de cuyos objetivos consiste en analizar las potencialidades y dificultades que surgen con la introducción de *DERIVE* como recurso didáctico en los cursos de iniciación al cálculo. El PU ha sido elaborado partiendo del problema clásico de las cuadraturas, esto es, se calcula el área limitada por una curva con el eje de las abscisas en el sentido de distintas aproximaciones (Riemann-Darboux, regla de los trapecios...), para posteriormente introducir el concepto de integral definida, previo al estudio del cálculo de primitivas (integral indefinida). Se introduce, consecuentemente, el concepto de integral definida desde una perspectiva gráfica y numérica, desglosando paso a paso los distintos procedimientos de aproximación del área limitada por una curva y el eje de las abscisas. Se incluyen en este artículo algunas aportaciones didácticas que han sido obtenidas empíricamente después de utilizar el PU en un estudio exploratorio que realizamos actualmente con un grupo de 14 estudiantes.

Palabras clave: Educación matemática, enseñanza y aprendizaje del cálculo, programas de cálculo simbólico, *DERIVE*, integral definida.

Abstract: With the aim of improving the teaching and learning of calculus a Utility File (UF) designed with the Computer Algebra System (CAS) *DERIVE* is presented to be used by first year engineering students taking Calculus I. The UF is the

Fecha de recepción: junio de 2002.

core of the curricular material used in a wider research project that is currently being developed. One of the objectives of this project consists in analyzing the potential and difficulties arising when *DERIVE* is introduced as a didactic resource in the introductory calculus course. The UF has been designed beginning the classic problem of the quadratures, that is the area limited by a curve with the x-axis is calculated using different approximations (Riemann-Darboux-Cauchy, trapezoidal rule...). This approach enables us to introduce the concept of definite integral before the study of the antiderivative (indefinite integral). Consequently, the concept of definite integral is presented from a graphical and numerical perspective, analyzing different approaches step by step in order to obtain the area limited by a curve and the x-axis. In addition, some didactical consequences empirically obtained in an ongoing exploratory study of the UF with a group of 14 students are included.

Keywords: Mathematics education, teaching and learning of calculus, computer algebra system, *DERIVE*, definite integral.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza y aprendizaje de los conceptos de cálculo infinitesimal posee una problemática que surge paralelamente con su aparición en los programas de la enseñanza media y primeros cursos universitarios. El cálculo siempre ha sido considerado un tema difícil de enseñar, a la vez que complejo.

El trabajo que se presenta forma parte de una investigación que se realiza conjuntamente entre la Universidad de La Laguna (España) y la Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre Unexpo (Venezuela), mediante la cual se pretenden analizar las potencialidades y dificultades que surgen con la introducción del software *DERIVE* en los cursos de cálculo para los estudiantes de ingeniería. Se ha elegido como tópico concreto el concepto de integral definida y se elaboró para tal efecto un programa de utilidades (PU) sustancialmente diferente al que viene incorporado en *DERIVE*, con el objetivo de introducir el concepto de integral definida partiendo del problema clásico de las cuadraturas y mostrando cómo aproximar el área limitada por una curva. Se pretende con ello, por una parte, que el estudiante asimile tanto la perspectiva gráfica como numérica del concepto de integral definida y, por otra, que el cálculo de la integral definida de una función (continua o no) no sea visto exclusivamente como la diferencia de una primitiva evaluada en los extremos del intervalo de integra-

ción. $\left(\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F(x) \text{ primitiva} \right)$, tal y como se muestra en algunas investigaciones (Orton, 1983, pp. 1-18; Eisenberg y Dreyfus, 1991, pp. 25-37).

Resultan frecuentes las incoherencias que surgen en los estudiantes al tener que resolver la integral definida de una función de la que no puede encontrar su primitiva. Se pretende, con la utilización de prácticas de laboratorio basadas en el PU elaborado, que el estudiante comprenda el significado de la integración aproximada como un medio para encontrar respuestas a situaciones que modelizan la realidad (Weigand y Weller, 1998, pp. 251-267), las cuales son susceptibles de ser resueltas mediante el cálculo de integrales definidas.

ANTECEDENTES

Desde la inclusión de las materias de cálculo en las carreras de ingeniería ha habido diferentes enfoques de los métodos para enseñarlo, aunque existe una predisposición al uso casi exclusivo de procedimientos algorítmicos para la resolución de los diferentes problemas que se plantean. Una gran cantidad de libros de texto favorecen esa concepción de la enseñanza, ya que, en general, dedican a la resolución de ejercicios rutinarios una parte importante –entre 30 y 50%– tal y como señala Tall (Tall, 1997, pp. 289-325).

A partir de los años ochenta, con la rápida evolución de las nuevas tecnologías informáticas, empiezan a aparecer en el mercado un tipo de programas para ordenadores personales, tales como el MACSYMA, MUMATH, etc. –denominados manipuladores simbólicos–, que son capaces de resolver fácilmente los ejercicios rutinarios que de otro modo requerirían de una instrucción en técnicas de cálculo muy laboriosas. Comenzó a partir de entonces, principalmente en Estados Unidos y Canadá, un replanteamiento sobre qué y cómo debe ser enseñado el cálculo en los últimos cursos de secundaria y primeros cursos de universidad. En una sociedad, donde cada vez más la computadora desempeña un papel fundamental, la enseñanza del cálculo debe plantearse sin obviar esta realidad.

En la década de los noventa y con la aparición de algunos programas más específicos, con más capacidades tanto simbólicas como gráficas (MAPLE, MATEMÁTICA, MATLAB, MATHCAD, DERIVE, etc.), el uso de los PCS (Programas de Cálculo Simbólico) se ha ido extendiendo, aunque en ningún caso el manejo de estos puede considerarse como generalizado. Los libros de texto empiezan en estos últimos años a incluir problemas específicos que, para su resolución, necesitan utilizar

tales programas, y usan gráficas sugerentes construidas haciendo uso de este software (Thomas y Finney, 1992; Edwards y Penney, 1996; Bradley y Smith, 1998; Stewart, 1999). Ahora bien, el uso de estos PCS queda reducido, en general, a desarrollar cálculos directos de las primitivas de funciones, de desarrollos de Taylor de representaciones de funciones, y no suelen ser utilizados como herramientas de enseñanza y aprendizaje que permitan construir a los estudiantes los conceptos básicos del cálculo.

Quizás uno de los PCS que, por sus propias características (fácil manejo, economía de memoria, etc.), ofrece más posibilidades didácticas es el *DERIVE*. Este programa permite, tal vez de modo más elemental que otros, debido principalmente a su concepción con fines educativos:

- Realizar operaciones de cálculo simbólico, entre las que se cuentan: operaciones con vectores, matrices y determinantes; resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones; cálculo de derivadas e integrales (definidas e indefinidas), sumas de series, cálculo de límites, obtención de los polinomios de Taylor de una función; representación gráfica de funciones en forma explícitas, implícitas, paramétrica y en coordenadas polares.
- Programar funciones que usen las distintas capacidades del programa antes mencionadas, es decir, definir una serie de funciones que combinen las operaciones básicas que vienen implementadas en *DERIVE*.
- Utilizar ficheros con funciones (programa de utilidades-PU) definidas por otros usuarios para propósitos diversos como: resolver ecuaciones diferenciales, trabajar con álgebra lineal, etcétera.

La incorporación de *DERIVE* como apoyo para la enseñanza de las matemáticas en los últimos cursos de secundaria y primeros cursos de universidad, comienza a ser una realidad. Se han desarrollado diferentes proyectos de investigación subvencionados por las instituciones académicas responsables que han tratado de extender el uso de este software (Artigue y otros, 1995; Drijvers y otros, 1997, pp. 118-123; Heugl, 1997 pp. 142-148), y han arrojado resultados bastante alentadores.

El PU que describiremos fue utilizado por un grupo de 14 estudiantes (7 de nuevo ingreso y 7 repetidores) de Cálculo I en la Unexpo-Barquisimeto (Venezuela) en el mes de julio de 1999, como parte de las actividades programadas para un estudio exploratorio previo a un trabajo más amplio que se proyecta. En su desarrollo, se logró observar la fácil adaptación de los estudiantes en cuanto a la

manipulación de las sentencias del programa, así como también su efectivo desempeño en los sistemas de representación gráfico y numérico, lo cual se requería para el estudio del concepto de la integral definida partiendo de la aproximación al cálculo del área limitada por una curva y el eje de abscisas.

2. DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA DE UTILIDADES (PU)

Se describe primeramente la función que se relaciona con la integral definida que viene incorporada en el software original; seguidamente, la descripción del PU con el que se ha desarrollado el trabajo de formación de los estudiantes, y finaliza con una aplicación del PU a un problema planteado en un texto de cálculo.

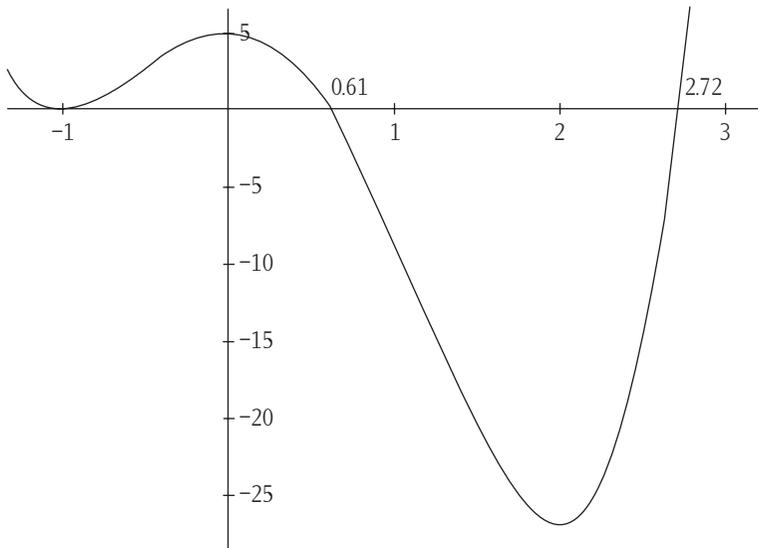
La versión 4 de *DERIVE* posee un programa de utilidades (PU) que se encuentra incorporado en la carpeta *MATH* del software original, donde se hace alguna referencia al cálculo de la integral de Riemann, es el archivo *Misc.mth*, en él aparece definida la siguiente función:

$$\text{LEFT_RIEMANN}(u, x, a, b, n) := \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \lim_{x \rightarrow a+(b-a)k/n} u$$

Esta función solamente proporciona resultados numéricos de aproximación para la integral en el sentido de Riemann. Los aspectos gráficos no aparecen en ningún momento. Por ello, con el PU que hemos diseñado –que constituye el núcleo básico utilizado en el proceso de formación de los alumnos– tratamos de que el alumno asimile el concepto, atendiendo principalmente a sus aspectos gráficos y numéricos e interpretando la integral definida como un proceso del cálculo aproximado de áreas.

El programa (véase anexo) tiene 58 sentencias, de la sentencia núm. 1 a la núm. 37 se denomina programa base (PB) y de la núm. 38 a la núm. 58 es el programa que llamamos ejecutable (PE).

En el programa base se definen las distintas funciones que se utilizan en el programa ejecutable. Este último es el que deberán trabajar los estudiantes cuando resuelvan las actividades. En él se puede seguir el procedimiento de cálculo del área aproximada de una manera gráfica y numérica en el sentido de Riemann-Darboux, es decir, utilizando rectángulos superiores o inferiores y tomando el punto medio de la base de cada rectángulo; así como por el método de los trapecios y también mediante porciones de parábolas (regla de Simpson). La metodología utilizada en el aula es la siguiente: se proporciona al estudiante un material

Figura 1 Gráfica de la curva

escrito (práctica de enseñanza) que incluye las actividades por desarrollar, secuenciadas de tal manera que los estudiantes construyan distintos procedimientos de aproximación del área limitadas por la curva. Al finalizar cada experiencia de aprendizaje, los estudiantes pueden analizar tanto el marco gráfico como el numérico de cada aproximación. Cada práctica incluye al final una evaluación de la práctica y una autoevaluación para el estudiante.

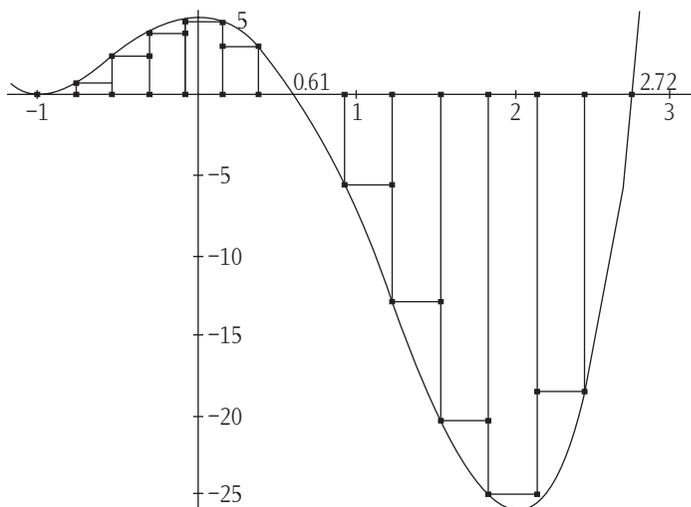
Vamos ahora a detallar el proceso que debe seguir el estudiante cuando utiliza el programa de utilidades. Para ello, se desarrolla a continuación un problema similar a los trabajados en el aula por los estudiantes, a fin de exponer los resultados de aplicación de nuestro programa de utilidades.

El problema consiste en calcular el área limitada por la grafica de la función $f(x)=3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ mediante distintas aproximaciones

Una vez definida la función: $F(x): =3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$, lo primero que se debe hacer es representarla gráficamente y obtener los puntos de corte con el eje de las abscisas (figura 1).

La gráfica tendrá una parte “sobre” el eje OX para el intervalo $[-1,0.612574]$, y otra “bajo” el eje OX en $[0.612574,2.72075]$ (figura 1). Se trata ahora de visualizar las distintas aproximaciones.

Figura 2 Rectángulos inferiores



Grafiquemos 7 rectángulos inferiores en cada región. Para tal efecto, se procede así: se calcula la matriz que representa los 7 rectángulos inferiores (en el sentido de Darboux) “sobre” el eje OX en $[-1, 0.612574]$, utilizando la sentencia núm. 38,

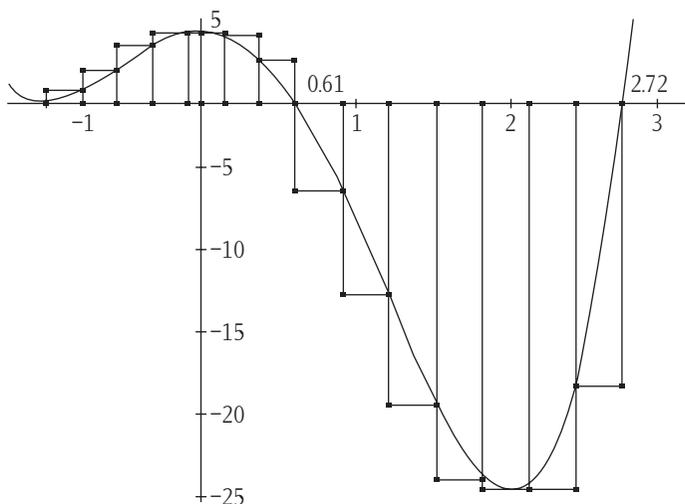
$$\text{RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X}(a,b,n),$$

sustituir (a,b,n) por los valores $(-1, 0.612574, 7)$ y graficando se obtiene lo requerido (figura 2). Esta sentencia del PE está en correspondencia con la sentencia núm. 12 del PB,

$$\text{RECT_INF_EL_EJE_X}(a,b,n):=\text{VECTOR}(\text{RECTANGULO}(a+iH(a,b,n), \\ a+(i+1)H(a,b,n),\text{FMIN}(a,b,n)),i,0,n-1)$$

Resulta pertinente destacar que el nombre de cada función del PE (y del PB) expresa lo que se hace. En este caso “representa gráficamente los rectángulos inferiores para la parte de la función que está sobre el eje OX”, donde se conocen los extremos del intervalo, el número de figuras deseadas; el lado derecho de la

Figura 3 Rectángulos superiores



sentencia núm. 12 expresa la matriz de rectángulos inferiores construida a partir de los extremos de la base de cada uno (lo cual resulta de subdividir el intervalo en n subintervalos) y su respectiva altura. Sentencias similares permiten trabajar con el resto de las aproximaciones. Estas sentencias constituyen el marco gráfico del procedimiento.

De la misma manera, la sentencia núm. 40,

$$\text{RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X}(a,b,n),$$

la utilizamos para la parte donde la función es negativa (el intervalo $[0.612574, 2.72075]$) y, graficando la matriz obtenida para 7 intervalos, tendremos la aproximación inferior para el área limitada por la función y el eje OX (figura 2).

A continuación presentamos los diferentes gráficos que el estudiante puede construir siguiendo la práctica de enseñanza. Rectángulos superiores, tomando el punto medio de cada intervalo (figuras 3 y 4), trapecios (figura 5) y porciones de parábolas (figura 6).

La figura 7 presenta todas las aproximaciones.

Este proceso se puede realizar para un número mayor de subdivisiones de los intervalos, con lo cual se logra visualizar cómo, a medida que se aumenta el

Figura 4 Rectángulos punto medio

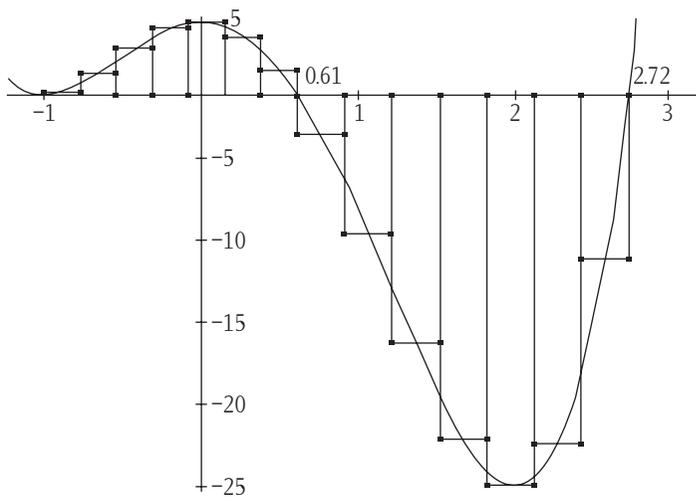


Figura 5 Trapecios

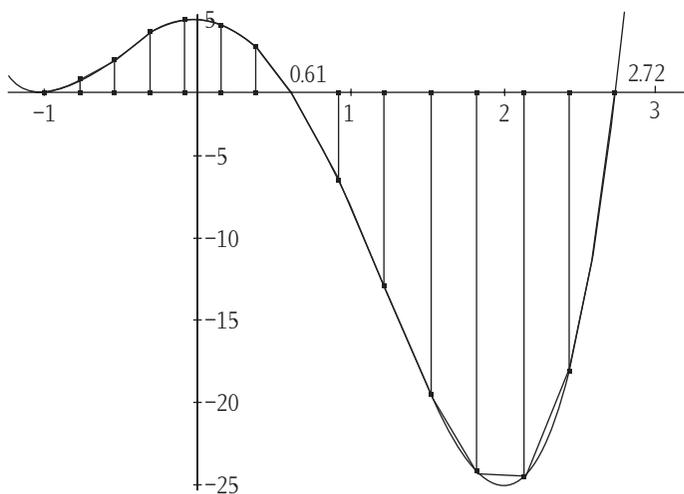


Figura 6 Regla de Simpson

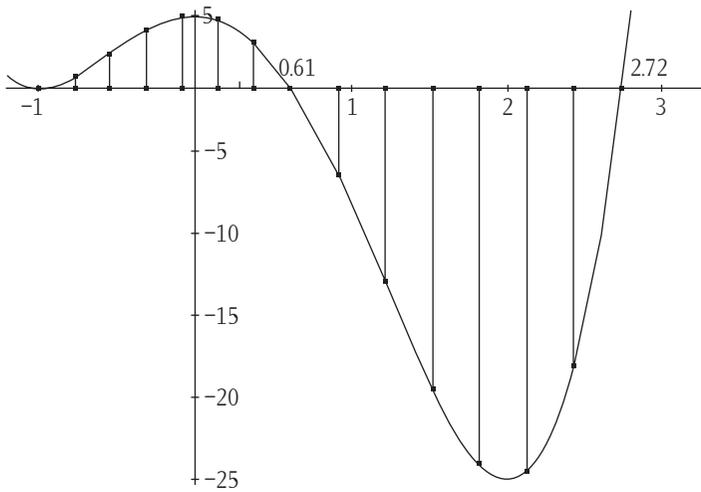
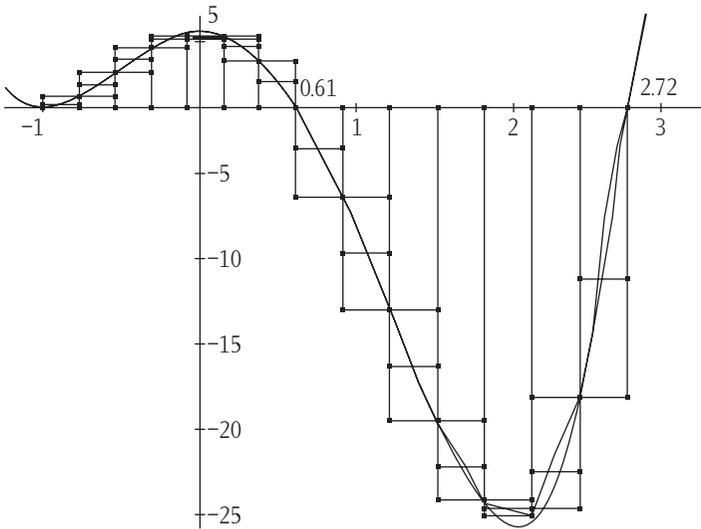


Figura 7 Rectángulos, trapecios y Simpson



número de elementos de aproximación (trapezios, rectángulos y parábolas), éstos van “llenando” la superficie tanto “bajo” la curva (parte positiva de la función), como “sobre” la curva (parte negativa de la función); cuando esto sucede, puede dar la impresión de que la superficie puede cubrirse en su totalidad, el estudiante puede creer que con un número determinado de figuras es suficiente para llenar la superficie, sin embargo, utilizando el zoom que incorpora *DERIVE* podrá observarse que necesitaría un número cada vez mayor de elementos de aproximación para lograr recubrir toda la superficie (figuras 8 y 9).

Conviene señalar, que el programa de cálculo simbólico *MAPLE*, en su versión V (Release 5), contiene en el paquete “student” algunas sentencias relacionadas con el cálculo de la integral definida. Para la integral de Riemann, aparecen de-

Figura 8

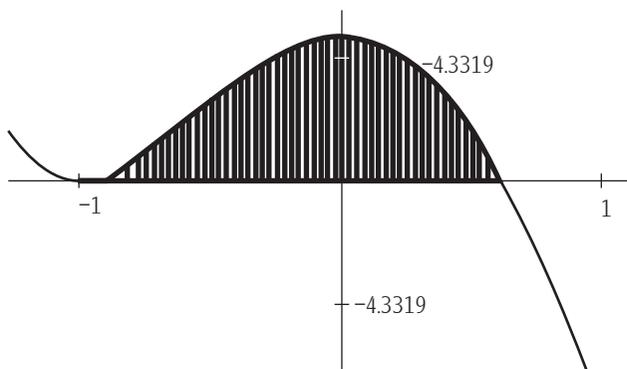
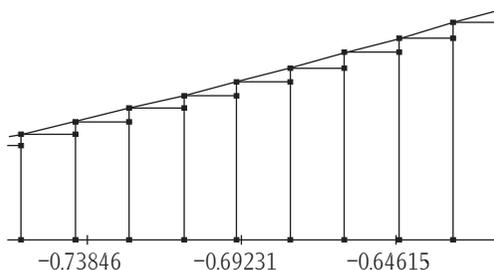


Figura 9



finidas las órdenes “leftbox”, “rightbox” y “middlebox”, que representan gráficamente los rectángulos de altura, las imágenes de los extremos inferiores, superiores y el punto medio de los subintervalos de integración, respectivamente. Nuestro programa de utilidades complementa estas aproximaciones gráficas con la incorporación de trapecios y porciones de parábolas (en el sentido de Simpson), además, es capaz de representar las distintas figuras en un mismo gráfico, con lo que se puede facilitar la comparación entre ellas.

Para establecer el marco numérico del trabajo con el PU, hemos definido las funciones núm. 21 al núm. 37 en el PB y que se reducen en el PE a las sentencias núm. 47 al núm. 58, tanto si el área por calcular está sobre el eje OX o bajo el eje OX. Sin perder generalidad, escogimos calcular el área en el intervalo $[-1,0.612574]$, cuya área se encuentra sobre el eje OX, utilizando 7 rectángulos inferiores. De manera análoga, se puede proceder utilizando rectángulos superiores, tomando el punto medio de cada subintervalo, trapecios o porciones de parábolas (regla de Simpson).

Utilizando la sentencia núm. 47,

$$\text{AREA_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X}(a,b,n),$$

que está en correspondencia con la sentencia núm. 21,

$$\begin{aligned} \text{AREA_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X}(a,b,n) := \\ \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA_RECT}(\text{FMIN}(a,b,n), H(a,b,n)) \end{aligned}$$

y sustituyendo (a, b, n) por los valores $(-1,0.612574,7)$ en núm. 47 obtenemos el valor del área 3.44589.

Análogamente, con la sentencia núm. 48,

$$\text{AREA_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X}(a, b, n),$$

que está en correspondencia con la sentencia núm. 22,

$$\begin{aligned} \text{AREA_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X}(a,b,n) := \\ \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA_RECT}(\text{FMAX}(a,b,n), H(a,b,n)) \right| \end{aligned}$$

y sustituyendo los valores (a, b, n) por $(0.612574, 2.72075, 7)$ obtenemos el área de la segunda región que es: 25.60203.

De manera análoga, se utilizarían, en su caso, las sentencias correspondientes para las demás aproximaciones (punto medio, trapecio, Simpson).

Con la finalidad de comparar las distintas aproximaciones que se obtienen, se utilizan las sentencias núm. 56,

$$\text{APROX_DEL_AREA_SOBRE_X}(a, b, j, k, m)$$

y núm. 57,

$$\text{APROX_DEL_AREA_BAJO_X}(a, b, j, k, m),$$

para las dos partes de la curva, respectivamente, donde a y b son los extremos del intervalo de integración, j y k , la cantidad de subintervalos, y m , la variación de estas cantidades; se obtiene así una matriz donde, de izquierda a derecha se tienen la cantidad de figuras, aproximación con rectángulos inferiores, aproximación con punto medio, aproximación con trapecios, regla de Simpson y aproximación con rectángulos superiores. Esto le permite al estudiante comparar las diferentes aproximaciones con el valor exacto y poder determinar cuál es la mejor. Sustituyendo (a, b, j, k, m) por $(-1, 0.612574, 20, 50, 10)$ respectivamente obtenemos,

N.F.	R. INF	R. PTO. M	TRAP	SIMPSON	R. SUP.
20	4.243295639	4.658808640	4.645431180	4.654349487	5.047566721
30	4.381918849	4.656328914	4.650386531	4.654348120	4.918852413
40	4.450578153	4.655461879	4.652119910	4.654347890	4.853661667
50	4.491664689	4.655060719	4.652922043	4.654347827	4.814179396

Donde N.F. significa número de figuras; R. INF., rectángulos inferiores; R. PTO. M., rectángulos punto Medio; TRAP., Trapecios; R. SUP., rectángulos superiores.

Se procede a continuación a calcular el valor exacto del área, utilizando la sentencia núm. 58, sustituyendo los valores de $"a, b"$ por -1 y 0.612574 respectivamente, y se obtiene

límite rect. inf	límite pto. medio	límite trapecio	límite simpson	límite rect. sup
4.654347783	4.654347783	4.654347783	4.654347783	4.654347783

En esta matriz, el estudiante puede observar, por una parte, que al tomar el límite en cualquiera de los casos el valor es el mismo; y, por otra, puede comparar ésta con la matriz de aproximaciones y determinar cuál aproximación es la mejor.

Introducido el concepto de integral definida desde la perspectiva anterior, el estudiante tendrá claro, por un lado, cuál es el problema real que da lugar al cálculo integral, la cuadratura de curvas o, lo que es lo mismo, el cálculo de áreas limitadas por ciertas curvas, y por el otro, la importancia de la aproximación gráfica y numérica para la resolución del problema.

Nuestra propuesta de enseñanza continuaría ahora desde el punto de vista habitual, esto es, se trabaja con el cálculo de primitivas, para posteriormente conectar la integral definida con la indefinida mediante el Teorema Fundamental del Cálculo.

Desde el punto de vista numérico, las órdenes “leftsum”, “rightsum” y “middlesum, simpson” y “trapezoid”, de MAPLE, hacen los cálculos de la aproximación numérica. Nuestro PU complementa estos cálculos con la presentación de una matriz de aproximaciones que puede facilitar la comparación de las aproximaciones numéricas, tomando distintas cantidades de figuras.

3. RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Es sabido que las aplicaciones de la integral nos permiten calcular longitudes de arcos de curvas, calcular volúmenes de sólidos, tanto de revolución como por secciones, etcétera.

La idea de introducir el concepto de integral definida de esta manera nos lleva a afirmar que algunas situaciones problemáticas pueden ser resueltas de manera natural por los estudiantes. Veamos a continuación un ejemplo.

El siguiente problema ha sido extraído de un texto clásico de cálculo (Edwards y Penney, 1996, pp. 370-371);

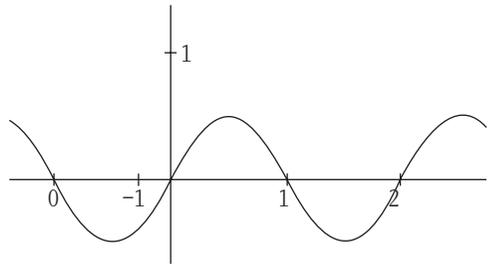
Un fabricante necesita hacer hojas de metal corrugado de 36 pulgadas (90 cm) de ancho con secciones transversales con la forma de la curva (figuras 10 y 11)

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \pi x, \quad 0 \leq x \leq 36$$

Figura 10 Lámina de metal



Figura 11 Gráfica de $y = \frac{1}{2} \text{sen } \pi x$



¿Qué ancho deben tener las hojas originales extendidas para que el fabricante produzca estas hojas corrugadas?

Teniendo en cuenta que la longitud de un arco de curva entre dos puntos cualesquiera a y b viene dada por la fórmula

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

se tiene en este caso (véase la figura 11)

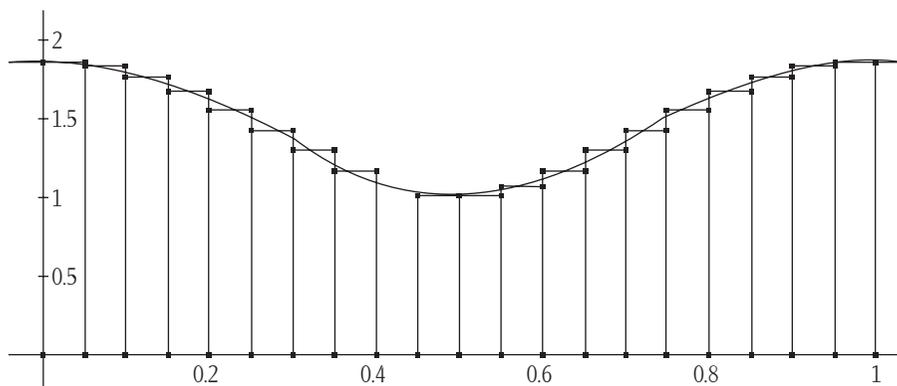
$$S(x) = \int_0^{36} \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 \pi x\right)} dx = 36 \int_0^1 \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 \pi x\right)} dx \quad (4)$$

En el texto mencionado se señala *Estas integrales no pueden ser evaluadas en términos de funciones elementales* (p. 370) para remitir al lector a otro capítulo del libro donde se trata la integración numérica. Presenta entonces la siguiente solución:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 \pi x} dx = 1.46$$

Por lo tanto, la solución del problema es: $36 (1.46) = 52.56$ pulgadas (131.4 cm).
Con la secuencia de enseñanza desarrollada por los estudiantes para el estu-

Figura 12 Gráfica con rectángulos punto medio



dio del concepto de integral definida vista como el cálculo de áreas limitadas por una curva, no necesitamos darle solamente una solución numérica, tal y como se hace en el texto, sino que podría obtenerse dicha solución desde el punto de vista gráfico y numérico. Para lo cual bastaría con considerar la función:

$$F(x) := \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 \pi x}$$

que, al graficarla (figura 12), nos permite observar que es una función positiva. El PU servirá ahora para resolver el problema; se pueden observar en la figura los distintos rectángulos y el “llenado” de la superficie limitada con el eje de las abscisas.

Utilizando la matriz con 10, 20 y 30 subintervalos en la que aparecen las diferentes aproximaciones tenemos que la integral es aproximadamente 1.46369.

10	1.377485726	1.463695629	1.463695315	1.463695524	1.549904904
20	1.420590677	1.463695472	1.463695472	1.463695472	1.506800266
30	1.434958942	1.463695472	1.463695472	1.463695472	1.492432002

Concluimos, en definitiva, que el fabricante debe utilizar hojas extendidas de aproximadamente $36 (1.46369) \approx 52.69$ pulgadas de ancho, lo que equivale a 131.73 centímetros de ancho, que es la solución buscada.

4. ALGUNAS APORTACIONES DIDÁCTICAS

Después de llevar al aula esta experiencia y, aunque nuestras observaciones no se encuentran aún sistematizadas, nos encontramos en disposición de señalar que:

- Con la introducción del concepto de integral definida desde esta perspectiva gráfica y numérica con el uso del software *DERIVE*, se consigue que los estudiantes descubran que existen procedimientos aproximados que, en muchas ocasiones, permiten resolver problemas que en otros casos serían demasiado complicados.
- El PU proporciona una herramienta efectiva en el momento de calcular integrales definidas, donde el integrando está constituido por funciones cuyas primitivas no pueden ser expresadas mediante funciones elementales.
- El PU puede ser incorporado como complemento de las actividades de los textos que incluyen problemas específicos en cuya resolución se utilizan, implícitamente, programas como éstos.
- El PU contribuye a formar una imagen del concepto de integral definida más flexible, ya que el estudiante tiene la posibilidad de observar paso a paso el desarrollo de todo el proceso de construcción de la integral como área, evitando así que los conocimientos se impartan utilizando exclusivamente procedimientos algorítmicos.
- Se observó empíricamente cómo los estudiantes pueden comprender el sentido de la aproximación con una adecuada utilización del software matemático, lo que siempre resulta complicado sin el uso de estos recursos. Los estudiantes constataron como *DERIVE* brinda la posibilidad de crear sencillos programas para abordar problemas que modelizan situaciones de la vida real.
- Se ha confirmado además que la posibilidad de presentar los procedimientos de resolución paso a paso en los sistemas de representación gráfico y numérico proporcionan una ventaja considerable en comparación con procedimientos utilizados en las clases habituales, donde una representación pormenorizada de los conceptos requerirían un tiempo y un nivel de comprensión considerablemente mayores.

ANEXO

PROGRAMA BASE (PB)

```

#1: F(x) :=
#2: AREA_RECT(c, d) := c · d
#3: AREA_TRAP(c, d, h) :=  $\frac{(c + d) \cdot h}{2}$ 
#4: RECTANGULO(a, b, h) :=  $\begin{bmatrix} a & 0 \\ a & h \\ b & h \\ b & 0 \end{bmatrix}$ 
#5: TRAPECIO(a, α, b, β) :=  $\begin{bmatrix} a & 0 \\ a & \alpha \\ b & \beta \\ b & 0 \end{bmatrix}$ 
#6: H(a, b, n) :=  $\frac{b - a}{n}$ 
#7: FMIN(a, b, n) := MIN(F(a + i · H(a, b, n)), F(a + (i + 1) · H(a, b, n)))
#8: FMAX(a, b, n) := MAX(F(a + i · H(a, b, n)), F(a + (i + 1) · H(a, b, n)))
#9: XL(a, b, n) := a + (i - 1) · H(a, b, n)
#10: XR(a, b, n) := a + i · H(a, b, n)
#11: XM(a, b, n) := a + (i - 0.5) · H(a, b, n)
#12: RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) := UECTOR(RECTANGULO(a + i · H(a, b, n), a + (i + 1) · H(a, b, n), FMIN(a, b, n)), i, 0, n - 1)
#13: RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n) := UECTOR(RECTANGULO(a + i · H(a, b, n), a + (i + 1) · H(a, b, n), FMAX(a, b, n)), i, 0, n - 1)
#14: RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n) := UECTOR(RECTANGULO(a + i · H(a, b, n), a + (i + 1) · H(a, b, n), FMAX(a, b, n)), i, 0, n - 1)
#15: RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n) := UECTOR(RECTANGULO(a + i · H(a, b, n), a + (i + 1) · H(a, b, n), FMIN(a, b, n)), i, 0, n - 1)
#16: RECT_PTO_MEDIO(a, b, n) := UECTOR  $\left( \text{RECTANGULO} \left( a + i \cdot H(a, b, n), a + (i + 1) \cdot H(a, b, n), F \left( a + (2 \cdot i + 1) \cdot \frac{H(a, b, n)}{2} \right) \right), i, 0, n - 1 \right)$ 
#17: TRAPECIOS(a, b, n) := UECTOR(TRAPECIO(a + i · H(a, b, n), F(a + i · H(a, b, n)), a + (i + 1) · H(a, b, n), F(a + (i + 1) · H(a, b, n))), i, 0, n - 1)

```

$$\#18: \text{PARAB_SIM}(a, b, n) := \text{VECTOR} \left(\left[\begin{array}{c} \text{FIT} \left[\begin{array}{cc} x & p \cdot x^2 + q \cdot x + r \\ \text{XL}(a, b, n) & F(\text{XL}(a, b, n)) \\ \text{XM}(a, b, n) & F(\text{XM}(a, b, n)) \\ \text{XR}(a, b, n) & F(\text{XR}(a, b, n)) \end{array} \right] \end{array} \right], i, 1, n \right)$$

$$\#19: \text{SEGMENTOS_SIM}(a, b, n) := \text{VECTOR} \left(\left[\begin{array}{cc} \text{XL}(a, b, n) & F(\text{XL}(a, b, n)) \\ \text{XL}(a, b, n) & \emptyset \\ \text{XR}(a, b, n) & \emptyset \\ \text{XR}(a, b, n) & F(\text{XR}(a, b, n)) \end{array} \right] \right), i, 1, n$$

$$\#20: \text{CURVA_SIM}(a, b, n) := \text{VECTOR}(\text{CHI}(\text{XL}(a, b, n), x, \text{XR}(a, b, n)) \cdot \text{ELEMENT}(\text{PARAB_SIM}(a, b, n), i), i, 1, n)$$

$$\#21: \text{AREAS_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X}(a, b, n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA_RECT}(F_{\text{MIN}}(a, b, n), H(a, b, n))$$

$$\#22: \text{AREAS_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X}(a, b, n) := \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA_RECT}(F_{\text{MAX}}(a, b, n), H(a, b, n)) \right|$$

$$\#23: \text{AREAS_RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X}(a, b, n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA_RECT}(F_{\text{MAX}}(a, b, n), H(a, b, n))$$

$$\#24: \text{AREAS_RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X}(a, b, n) := \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA_RECT}(F_{\text{MIN}}(a, b, n), H(a, b, n)) \right|$$

$$\#25: \text{AREAS_PTO_MEDIO_SOBRE_EL_EJE_X}(a, b, n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA_RECT} \left(F \left(a + (2 \cdot i + 1) \cdot \frac{H(a, b, n)}{2} \right), H(a, b, n) \right)$$

$$\#26: \text{AREAS_PTO_MEDIO_BAJO_EL_EJE_X}(a, b, n) := \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA_RECT} \left(F \left(a + (2 \cdot i + 1) \cdot \frac{H(a, b, n)}{2} \right), H(a, b, n) \right) \right|$$

$$\#27: \text{AREAS_TRAP_SOBRE_EL_EJE_X}(a, b, n) := \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA_TRAP}(F(a + i \cdot H(a, b, n)), F(a + (i + 1) \cdot H(a, b, n)), H(a, b, n))$$

$$\#28: \text{AREAS_TRAP_BAJO_EL_EJE_X}(a, b, n) := \left| \sum_{i=0}^{n-1} \text{AREA_TRAP}(F(a + i \cdot H(a, b, n)), F(a + (i + 1) \cdot H(a, b, n)), H(a, b, n)) \right|$$

$$\#29: \text{ÁREA_SIMP}(a, b, n) := \left| \frac{\sum_{i=1}^n H(a, b, n) \cdot (F(\text{XL}(a, b, n)) + 4 \cdot F(\text{XM}(a, b, n)) + F(\text{XR}(a, b, n)))}{6} \right|$$

$$\#30: \text{APROX_DEL_ÁREA_SOBRE_X}(a, b, j, k, m) := \text{VECTOR}([n, \text{AREAS_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X}(a, b, n), \text{AREAS_PTO_MEDIO_SOBRE_EL_EJE_X}(a, b, n), \text{AREAS_TRAP_SOBRE_EL_EJE_X}(a, b, n), \text{ÁREA_SIMP}(a, b, n), \text{AREAS_RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X}(a, b, n)], n, j, k, m)$$

```
#31: APROX_DEL_ÁREA_BAJO_X(a, b, n, j, k, m) := VECTOR([n, AREAS_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b,
n), AREAS_PTO_MEDIO_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n), AREAS_TRAP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n),
ÁREA_SIMP(a, b, n), AREAS_RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)], n, j, k, m)

#32: LIM_RECT_INF(a, b) := lim_{n→∞} | Σ_{i=0}^{n-1} AREA_RECT(F(a + (i + 1)·H(a, b, n)), H(a, b, n)) |

#33: LIM_RECT_SUP(a, b) := lim_{n→∞} | Σ_{i=0}^{n-1} AREA_RECT(F(a + i·H(a, b, n)), H(a, b, n)) |

#34: LIM_PTO_MEDIO(a, b) := lim_{n→∞} | Σ_{i=0}^{n-1} AREA_RECT(F(a + (2·i + 1)·(H(a, b, n)/2)), H(a, b, n)) |

#35: LIM_TRAP(a, b) := lim_{n→∞} | Σ_{i=0}^{n-1} AREA_TRAP(F(a + i·H(a, b, n)), F(a + (i + 1)·H(a, b, n)),
H(a, b, n)) |

#36: LÍMITE_SIMP(a, b) := lim_{n→∞} ÁREA_SIMP(a, b, n)

#37: LÍMITE_SUMAS_RIEMANN(a, b) := [ límite rect.inf   límite pto Medio   límite trapecio
LIM_RECT_INF(a, b) LIM_PTO_MEDIO(a, b) LIM_TRAP(a, b)
límite simpson   límite rect. sup ]
LÍMITE_SIMP(a, b) LIM_RECT_SUP(a, b) ]
```

PROGRAMA EJECUTABLE (PE)

```
#38: RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#39: RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#40: RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#41: RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#42: RECT_PTO_MEDIO(a, b, n)
#43: TRAPECIOS(a, b, n)
#44: PARAB_SIM(a, b, n)
#45: CURVA_SIM(a, b, n)
#46: SEGMENTOS_SIM(a, b, n)
#47: AREAS_RECT_INF_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#48: AREAS_RECT_INF_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#49: AREAS_RECT_SUP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#50: AREAS_RECT_SUP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#51: AREAS_PTO_MEDIO_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#52: AREAS_PTO_MEDIO_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#53: AREAS_TRAP_SOBRE_EL_EJE_X(a, b, n)
#54: AREAS_TRAP_BAJO_EL_EJE_X(a, b, n)
#55: ÁREA_SIMP(a, b, n)
#56: APROX_DEL_ÁREA_SOBRE_X(a, b, j, k, m)
#57: APROX_DEL_ÁREA_BAJO_X(a, b, n, j, k, m)
#58: LÍMITE_SUMAS_RIEMANN(a, b)
```

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Proyecto de Investigación de la DGIBXX2000-0069.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M., M. Abboud, P. Drouhard y J. B. Lagrange (1995), *Une recherche sur le logiciel DERIVE*, Cahier de DIDIREM núm. 3 (número especial), IREM, París, p. 7.
- Bradley, G. y K. Smith (1998), *Cálculo de una variable*, Madrid, Prentice Hall.
- Edwards, C. y D. Penney (1996), *Cálculo*, México, Prentice Hall.
- Eisenberg, T. y T. Dreyfus (1991), "On the reluctance to visualize in Mathematics", en W. Zimmermann y S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Washington, MAA, pp. 25-37.
- Drijvers, U., A. Verweij y E. Winsen (1997), "Mathematics Lessons with DERIVE. Developed by the CAVO working group", *ZDM*, núm. 4, pp. 118-123.
- Heugl, H. (1997), "Experimental and Active Learning with DERIVE" *ZDM*, vol. 4, núm. 4, pp. 142-148.
- Orton, A. (1983), "Students' understanding of integration" *Educational Studies in Mathematics*, vol. 14, núm. 1, pp. 1-18.
- Stewart, J. (1999), *Cálculo*, México, Thomson.

DATOS DE LOS AUTORES

Matías Camacho Machín

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, Islas Canarias, España
mcamacho@ulles

Ramón Depool Rivero

Universidad Politécnica "Antonio José de Sucre", UNEXPO, Venezuela
rdepool@unexpo.edu.ve

- Tall, D. (1997), "Function and Calculus", en Bishop *et al.* (ed.), *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 289-325.
- Thomas, G. y R. Finney (1992), *Calculus and Analytic Geometry*, Nueva York, Addison Wesley.
- Weigand, H. G. y H. Weller (1998), "Modelling Real-life Problems Involving Periodic Processes with Computer Algebra", *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, vol. 5, núm. 4, pp. 251-267.